Fakultät für Mathematik

Prof. Dr. Peter Junghanns

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Chemnitz, 13. Februar 2008

Prüfungsklausur Algebra I für Physiker

- **Arbeitszeit**: 90 min, 9:00–10:30
- **Hilfsmittel**: dünne Formelsammlung (**kein** Taschenrechner)
- Der Lösungsweg sollte klar erkennbar sein. Alle Aussagen sind zu begründen!

Viel Erfolg!

1. Gilt im Allg. die Mengengleichheit $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$? Begründen Sie Ihre Aussage **ohne** Verwendung eines Venn-Diagramms!

2. (a) Wann heißt eine Funktion

$$f : X \longrightarrow Y\,, \quad x \mapsto f(x)$$

injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

(b) Untersuchen Sie folgende Funktionen auf diese Eigenschaften:

(b1) $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad f(z) = z^6 - 1\,,$

(b2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(z) = z^6 - 1\,,$

(b3) $f_3 : (0, \infty) \to (-1, \infty)\,, \quad f(z) = z^6 - 1\,.$

(c) Bestimmen Sie die Menge N der Lösungen der Gleichung $f_1(z) = 0$ und zeigen Sie, dass diese mit der üblichen Multiplikation komplexer Zahlen eine Gruppe bildet.

Zusatz: Ist N zyklisch? Wenn ja, geben Sie alle Elemente an, die N erzeugen!

(d) Zeigen Sie, dass durch

$$z_1 R z_2 \;\Leftrightarrow_{\text{def}}\; z_1 z_2^{-1} \in \mathbb{R}$$

eine Äquivalenzrelation auf N erklärt ist. Geben Sie die Klasseneinteilung an!

Bitte wenden!

3. Für welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ (in algebraischer Darstellung) gilt

$$\text{(a) } z = \frac{(1+\mathbf{i})^{10}}{1-\mathbf{i}}\,, \qquad \text{(b) } z(z-4\mathbf{i}) = 4\,, \qquad \textbf{(Zusatz)}\ \left|\frac{\bar{z}}{z}\right| + 1 = z\,?$$

4. Es seien g_P, g_Q und g_R drei Geraden, die jeweils durch den Koordinatenursprung und den Punkt $P(1,1,1)$, $Q(1,2,1)$ bez. $R(2,2,0)$ verlaufen. Desweiteren enthalte die Ebene E_1 die Geraden g_P und g_Q, und die Ebene E_2 enthalte g_P und g_R.

   (a) Unter welchem Winkel schneiden sich E_1 und E_2?

   (b) Bestimmen Sie den Abstand von R zu E_1 sowie den Lotfußpunkt von R auf E_1.

   (c) Bestimmen Sie das Volumen der durch P, Q, R und den Ursprung gegebenen 3-seitigen Pyramide.

5. $\mathbb{R}_4[x] = \{p(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i \,:\, a_0, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens 4.

   (a) Überprüfen Sie, dass die Menge

   $$W = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(\pi) = 0\}\,,$$

   versehen mit den üblichen Operationen

   $$(p+q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\alpha p)(x) = \alpha p(x) \qquad (p, q \in W,\ \alpha \in \mathbb{R}),$$

   einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

   (b) Wann heißt eine Teilmenge $B = \{p_1, \ldots, p_m\} \subset W$ Basis des Vektorraums W?

   (c) Bestimmen Sie eine Basis von W.

Punktbewertung der einzelnen Aufgaben:

1	**2**					**3**			**4**			**5**		
	a	b	c	**Z**	d	a	b	**Z**	a	b	c	a	b	c
3	2	3	4	1	4	2	2	1	3	2	1	2	2	2

Gesamtpunktzahl: 32+2Z

Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0
Punkte	30	29	27	25	24	21	19	17	14	13