Algebra II für Physiker

Prüfungsklausur, 30. Juli 2008

Lösungen

1.
   - Aus $\det A_1 = -13$ folgt die Umkehrbarkeit von $\mathcal{A}_1$, und damit $\dim\ker\mathcal{A}_1 = 0$ sowie $\dim\operatorname{im}\mathcal{A}_1 = 3$. (3P)
   - Es gilt $\operatorname{rang} A_2 = \dim\operatorname{im}\mathcal{A}_2 = 2$ und bekanntermaßen $\dim\operatorname{im}\mathcal{A}_2 + \dim\ker\mathcal{A}_2 = 4$ also $\dim\ker\mathcal{A}_2 = 2$. Insbesondere zeigt dies: $\mathcal{A}_2$ nicht umkehrbar. (3P)
   - Im Falle $r = 0$ gilt $\dim\ker\mathcal{A}_3 = 2$ und $\dim\operatorname{im}\mathcal{A}_3 = 1$. Im Falle $r = 1$ erhalten wir $\dim\ker\mathcal{A}_3 = 1$ und $\dim\operatorname{im}\mathcal{A}_3 = 2$. In allen anderen Fällen ist $\mathcal{A}_3$ umkehrbar mit $\dim\ker\mathcal{A}_3 = 0$ und $\dim\operatorname{im}\mathcal{A}_3 = 3$. (3P)

2. (a) Da $(t^2 + t) - t^2 = t$ bildet die erste der gegebenen Mengen keinen Unterraum.
   Gelte $p_1(0) = p_2(0) = 1$. Dann gilt $(p_1 + p_2)(0) = 2$. Die zweite Menge ist also ebenfalls kein Unterraum.
   Seien schließlich p_1, p_2 vom Grad ≤ 10 mit $p_i(0) = p_i(\pi)$ $(i = 1, 2)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist stets auch $q := \alpha p_1 + \beta p_2$ vom Grad ≤ 10 und $q(0) = q(\pi)$. Also ist die dritte der gegebenen Mengen ein Unterraum. (4P)

   (b) Aus $\mathcal{A}(1) = 1$, $\mathcal{A}(t) = t + 1$, $\mathcal{A}(t^2) = t^2 + 2t + 2$ und $\mathcal{A}(t^3) = t^3 + 3t^2 + 6t$ folgt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3P)

3. Die Eigenwerte von $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sind $0, 0$ und 3 und zugehörige Eigenvektoren z.B. $[1, -1, 0]^T$, $[1, 0, -1]^T$, bzw. $[1, 1, 1]$. Das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren liefert dann leicht die orthogonale Transformationsmatrix

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{so dass } \operatorname{diag}(0, 0, 3) = T^{-1} A_3 T.$$

Dabei gilt $T^{-1} = T^T$. (4P)

Zusatz: Die Matrix A_n besitzt die $n-1$ linear unabhängigen Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert 0 und den Eigenvektor $[1, 1, \ldots, 1]^T$ zum Eigenwert n. (3Z)

4. Die Matrix A besitzt offenbar die Eigenwerte 1 und 2 jeweils mit algebraischer Vielfachheit 2. Zu 2 hat sie offenbar die Eigenvektoren $[0, 1, 1, 0]^T$ und $[0, 0, 1, 1]^T$. Also ist die geometrische Vielfachheit von 2 gleich 2. Weiter ist $\operatorname{rang}(A - I) = 3$, woraus folgt, dass die geometrische Vielfachheit von 1 gleich 1 ist. Daraus ergibt sich die JNF J von A zu

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Außerdem berechnet man leicht (3P)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2P)

5. Haben

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix} - 50 = 0.$$

Aus

$$\operatorname{diag}(0, 5) = T^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} T, \quad \text{mit} \quad T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

ergibt sich mit $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$5\eta_2^2 - 10\sqrt{5}\eta_1 - 50 = 0.$$

Eine geeignete Substitution führt schließlich auf die Normalform einer Parabelgleichung:

$$x_2^2 - 2\sqrt{5}x_1 = 0.$$

(5P)

6. (a) Sei x ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann gilt

$$\lambda x = Px = P^2 x = P(\lambda x) = \lambda P x = \lambda^2 x.$$

Haben also $\lambda - \lambda^2 = 0$, woraus $\lambda \in \{0, 1\}$ folgt. (3P)

(b) Sei $Q = T^{-1}PT$. Dann gilt (2P)

$$Q^2 = T^{-1}PTT^{-1}PT = T^{-1}PPT = T^{-1}PT = Q.$$