



Chemnitz, 30. Juli 2008

## Prüfungsklausur Algebra II für Physiker

- **Arbeitszeit:** 90 min, 10:00–11:30
- **Hilfsmittel:** dünne Formelsammlung (**kein** Taschenrechner)
- Der Lösungsweg sollte klar erkennbar sein. Alle Aussagen sind zu begründen!

**Viel Erfolg!**

1. Die nachfolgenden Matrizen  $A_i$  seien jeweils die Matrixdarstellungen linearer Abbildungen  $\mathcal{A}_i$  bezüglich der kanonischen Basen. Untersuchen Sie, ob diese Abbildungen eine Umkehrabbildung besitzen und geben Sie jeweils die Dimensionen des Kerns und des Bildes von  $\mathcal{A}_i$  an.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \text{diag}(r, r, r - 1), \quad r \in \mathbb{R}.$$

2. (a) Welche der folgenden Teilmengen des Polynomraumes  $\mathbb{R}[x]$  sind Unterräume?
  - i. Alle Polynome mit geradem Grad.
  - ii. Alle Polynome  $p$  mit  $p(0) = 1$ .
  - iii. Alle Polynome  $p$  vom Grad  $\leq 10$  mit  $p(0) = p(\pi)$ .
- (b) Es seien nun  $\mathcal{P}_3$  der Unterraum aller Polynome höchstens dritten Grades und

$$\mathcal{A} : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3, \quad p(t) \mapsto p(t) + p'(t) + p''(t).$$

Geben Sie die Matrixdarstellung  $A$  der linearen Abbildung  $\mathcal{A}$  in der kanonischen Basis  $\{1, t, t^2, t^3\}$  an.

**Bitte wenden!**

3. Es seien  $v_n := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  und  $A_n := v_n v_n^T$ .

Ist  $A_3$  in einer orthogonalen Basis von Diagonalgestalt? Wenn ja, geben Sie eine orthogonale Transformationsmatrix  $T$  und eine Diagonalmatrix  $D$  an, so dass

$$T^{-1}A_3T = D$$

gilt. Bestimmen Sie möglichst effektiv  $T^{-1}$ .

**Zusatz:** Geben Sie alle Eigenwerte  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sowie ein zugehöriges linear unabhängiges System von Eigenvektoren  $\{u^1, \dots, u^n\}$  der Matrix  $A_n$  an.

(Hinweis: Betrachten Sie ggf. zunächst noch  $A_2$ .)

4. Bestimmen Sie möglichst effizient die Jordansche Normalform und die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Bestimmen Sie durch *Hauptachsentransformation* die Normalform der quadratischen Gleichung

$$\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2 - 20\xi_1 + 10\xi_2 - 50 = 0.$$

Entscheiden Sie, was für eine Kurve durch diese Gleichung beschrieben wird.

6. Es sei  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ein Projektor, d.h., es gilt  $P^2 = P$ . Zeigen Sie:

- (a)  $P$  kann nur die Eigenwerte 0 oder 1 haben.  
 (b) Jede zu  $P$  ähnliche Matrix ist wieder ein Projektor.

Punktbewertung der einzelnen Aufgaben:

1	2	3	4	5	6			
a	b		<b>Z</b>		a	b		
9	4	3	4	3	5	5	3	2

Gesamtpunktzahl:  $35+3Z$

Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0
Punkte	33	32	30	28	26	23	21	19	16	14

Normalform	Bezeichnung der Quadrik
$\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = 1$	Ellipse mit den Halbachsen $a$ und $b$
$\frac{\eta_1^2}{a^2} - \frac{\eta_2^2}{b^2} = 1$	Hyperbel mit den Halbachsen $a$ und $b$
$\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = 0$	ein Punkt
$\frac{\eta_1^2}{a^2} - \frac{\eta_2^2}{b^2} = 0$	zwei sich schneidende Geraden
$\frac{\eta_1^2}{a^2} = 1$	zwei parallele Geraden
$\eta_1^2 = 0$	eine Gerade
$\eta_1^2 + c \eta_2 = 0$	Parabel
$\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = -1$	leere Menge
$\frac{\eta_1^2}{a^2} = -1$	leere Menge