Skript zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

für Physiker

SS 2008

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

6 Matrizen und lineare Gleichungssysteme **5**
6.1 Lineare Abbildungen und Matrizen 5
6.2 Multiplikation von Matrizen 6
6.3 Lineare Funktionale und die adjungierte Matrix 8
6.4 Der Begriff der Determinante 9
6.5 Der Rang einer Matrix 12
6.6 Übungsaufgaben 13
6.7 Lineare Gleichungssysteme 15
6.8 Übungsaufgaben 19

7 Eigenwerte linearer Abbildungen **23**
7.1 Eigenwerte und Eigenunterräume 23
7.2 Das Matrizeneigenwertproblem 24
7.3 Selbstadjungierte (hermitesche) Matrizen 25
7.4 Basistransformationen 27
7.5 Übungsaufgaben 30

8 Die Hauptachsentransformation von Quadriken **33**
8.1 Kurven zweiten Grades (Kegelschnitte) 36
8.2 Flächen zweiten Grades 41
8.3 Übungsaufgaben 47

9 Die Jordansche Normalform . . . **49**
9.1 Die Jordansche Normalform 49
9.2 Zur praktischen Durchführung 54
9.3 Die matrixwertige Exponentialfunktion 58
9.4 Zweidimensionale lineare Systeme gew. Dgl.n 65
9.5 Praktische Lösung linearer Anfangswertprobleme 67
9.6 Übungsaufgaben 71

Kapitel 6

Matrizen und lineare Gleichungssysteme

6.1 Lineare Abbildungen und Matrizen

Die Elemente von $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ bezeichnen wir mit $A, B, C, \ldots$, und den j-ten Einheitsvektor mit $e_j = e_j^{(n)} = \left[\begin{array}{c} 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0 \end{array}\right]^T \in \mathbb{C}^n$. (Die 1 steht an der j-ten Stelle.)

Es seien nun $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ eine lineare Abbildung und

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{bmatrix} := A\left(e_k^{(n)}\right), \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Für ein beliebiges $x = \left[\begin{array}{c} \xi_1, \ldots, \xi_n \end{array}\right]^T \in \mathbb{C}^n$ gilt dann

$$A(x) = A\left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^n \xi_k A\left(e_k^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^n \xi_k \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^n \alpha_{1k}\xi_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^n \alpha_{mk}\xi_k \end{bmatrix}.$$

Damit können wir die lineare Abbildung A mit der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} =: \left[\begin{array}{c} \alpha_{jk} \end{array}\right]_{j=1,k=1}^{m\quad n} \tag{6.1}$$

identifizieren. Die Wirkung der Matrix $A = \left[\begin{array}{c} \alpha_{jk} \end{array}\right]_{j=1,k=1}^{m\quad n}$ auf einen Vektor $x = \left[\begin{array}{c} \xi_k \end{array}\right]_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$

wird dabei beschrieben durch

$$A\,x = \left[\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{array}\right] := \left[\begin{array}{c} \alpha_{11}\xi_1 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \cdots + \alpha_{mn}\xi_n \end{array}\right]. \tag{6.2}$$

Die Matrix (6.1) hat n **Spalten** und m **Zeilen**. Sie heißt deshalb Matrix der Ordnung $m \times n$, wofür wir auch $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ schreiben. Die Zahlen $\alpha_{jk} \in \mathbb{C}$ heißen **Elemente** bzw. **Einträge** der Matrix A. Der Summe zweier linearer Abbildungen $A, B \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ mit $(A+B)(x) := A(x) + B(x)$ entspricht die **Summe der Matrizen** $A = \left[\ \alpha_{jk}\ \right]_{j=1,k=1}^{m\quad n}$ und $B = \left[\ \beta_{jk}\ \right]_{j=1,k=1}^{m\quad n}$

$$A + B := \left[\ \alpha_{jk} + \beta_{jk}\ \right]_{j=1,k=1}^{m\quad n}.$$

Dem Produkt $\alpha\,A$ einer komplexen Zahl α mit einer linearen Abbildung $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ (d.h. $(\alpha\,A)(x) := \alpha\,A(x)$) entspricht die Matrix

$$\alpha\,A := \left[\ \alpha\,\alpha_{jk}\ \right]_{j=1,k=1}^{m\quad n}.$$

Die Operation $(\alpha, A) \mapsto \alpha\,A$ wird auch **s-Multiplikation** von Matrizen genannt. Mit diesen Operationen der Addition und s-Multiplikation ist $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ bzw. $\mathbb{C}^{m\times n}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Ist $n = m$, so heißt die Matrix (6.1) **quadratische Matrix** der Ordnung n und

- **obere Dreiecksmatrix**, falls $\alpha_{jk} = 0$ für $j > k$,
- **untere Dreiecksmatrix**, falls $\alpha_{jk} = 0$ für $j < k$,
- **Diagonalmatrix**, falls $\alpha_{jk} = 0$ für $j \neq k$ (in Zeichen: $A = \operatorname{diag}\left[\ \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{nn}\ \right]$).

Die Einheitsmatrix $I = \operatorname{diag}\left[\ 1, \ldots, 1\ \right]$ entspricht der identischen Abbildung $id_{\mathbb{C}^n}$ in $\mathbb{C}^n$.

6.2 Multiplikation von Matrizen

Für $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ und $B \in L(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^n)$ kann man $A \circ B \in L(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^m)$ betrachten. Der Abbildung $A \circ B$ muß nach unseren Überlegungen in Abschnitt 6.1 eine Matrix $C \in \mathbb{C}^{m\times r}$ entsprechen. Unter Verwendung von (6.2) erhalten wir für einen beliebigen Vektor $x = \left[\ \xi_k\ \right]_{k=1}^{r} \in \mathbb{C}^r$

$$\begin{aligned} C\,x &= \left[\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \beta_{11}\xi_1 + \cdots + \beta_{1r}\xi_r \\ \vdots \\ \beta_{n1}\xi_1 + \cdots + \beta_{nr}\xi_r \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c} \alpha_{11}(\beta_{11}\xi_1 + \cdots + \beta_{1r}\xi_r) + \cdots + \alpha_{1n}(\beta_{n1}\xi_1 + \cdots + \beta_{nr}\xi_r) \\ \vdots \\ \alpha_{m1}(\beta_{11}\xi_1 + \cdots + \beta_{1r}\xi_r) + \cdots + \alpha_{mn}(\beta_{n1}\xi_1 + \cdots + \beta_{nr}\xi_r) \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c} (\alpha_{11}\beta_{11} + \cdots + \alpha_{1n}\beta_{n1})\xi_1 + \cdots + (\alpha_{11}\beta_{1r} + \cdots + \alpha_{1n}\beta_{nr})\xi_r \\ \vdots \\ (\alpha_{m1}\beta_{11} + \cdots + \alpha_{mn}\beta_{n1})\xi_1 + \cdots + (\alpha_{m1}\beta_{1r} + \cdots + \alpha_{mn}\beta_{nr})\xi_r \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Summenzeichens lässt sich das kürzer aufschreiben:

$$C\,x = \left[\ \gamma_{jk}\ \right]_{j=1,k=1}^{m\quad r} \left[\ \xi_r\ \right]_{k=1}^{r} = \left[\sum_{k=1}^{r} \gamma_{jk}\xi_r\right]_{j=1}^{m} = \left[\sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{l=1}^{n}\alpha_{jl}\beta_{lk}\right)\xi_k\right]_{j=1}^{m}$$

Wir erhalten $\gamma_{jk} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl}\beta_{lk}$. Die so definierte Matrix $C = \left[\ \gamma_{jk}\ \right]_{j=1,k=1}^{m\quad r}$ heißt **Produkt der Matrizen** A und B und wird mit $A\,B$ bezeichnet. (Sie entspricht also der Nacheinanderausführung der linearen Abbildungen B und A.)

Beachte: Der Eintrag γ_{jk} in der Matrix $C = A\,B$ ist gleich dem Produkt der einzeiligen Matrix $\left[\ \alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn}\ \right]$ mit der einspaltigen Matrix $\left[\ \beta_{1k}, \ldots, \beta_{nk}\ \right]^T$.

Beispiel 6.1 *Wir berechnen*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 \\ 4\cdot 1 + 3\cdot 0 + 2\cdot(-1) & 4\cdot 1 + 3\cdot 1 + 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}.$$

Beachte: Die in (6.2) beschriebene Wirkung einer Matrix A auf den Vektor x ist gleich dem Produkt der Matrix A mit der einspaltigen Matrix x.

Die Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, die linearen Abbildungen $A \in GL(\mathbb{C}^n)$ entsprechen, heißen **reguläre** bzw. **nicht singuläre** Matrizen. Für eine solche Matrix existiert also eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A^{-1}A = A\,A^{-1} = I := \left[\ \delta_{jk}\ \right]_{j,k=1}^{n}$,

$$\delta_{jk} := \begin{cases} 1 & , \quad j = k \\ 0 & , \quad j \neq k\,. \end{cases}$$

Die Matrix A^{-1} nennt man die zu A **inverse** Matrix. Diese ist eindeutig bestimmt, denn $(GL(\mathbb{C}^n), \circ)$ ist eine Gruppe. Eine Matrix $A \in L(\mathbb{C}^n) \setminus GL(\mathbb{C}^n)$ heißt **singulär**.

Beispiel 6.2 *Es seien* $\varphi \in \mathbb{R}$ *und*

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Wir setzen

$$B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$B\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad B = A^{-1}.$$

6.3 Lineare Funktionale und die adjungierte Matrix

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **lineares Funktional** über $\mathbb{C}^n$. Nach den Überlegungen aus Abschn. 6.1 können wir diesem Funktional eindeutig einen Vektor $y = \left[\begin{array}{c} \eta_1, \ldots, \eta_n \end{array} \right]^T \in \mathbb{C}^n$ zuordnen, so dass für alle $x = \left[\begin{array}{c} \xi_1, \ldots, \xi_n \end{array} \right]^T \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$f(x) = \langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta_k} \,. \tag{6.3}$$

Mit dem Symbol $\langle x, y \rangle$ wird das **Skalarprodukt** der Vektoren x und y aus $\mathbb{C}^n$ bezeichnet. Es hat folgende Eigenschaften:

(S1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbb{C}^n \,,$

(S2) $\langle \lambda\, x, y \rangle = \lambda \, \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n \,, \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \,,$

(S3) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n \,,$

(S4) $\langle x, x \rangle \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \Theta \,.$

Für $A = \left[\begin{array}{c} \alpha_{jk} \end{array} \right]_{j=1,k=1}^{m \quad n} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $x = \left[\begin{array}{c} \xi_k \end{array} \right]_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}^n$ und $y = \left[\begin{array}{c} \eta_k \end{array} \right]_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}^m$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle A\, x, y \rangle &= \sum_{j=1}^{m} (A\, x)_j \overline{\eta_j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \xi_k \overline{\eta_j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jk} \overline{\eta_j} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_{jk}} \eta_j} \\
&= \langle x, B\, y \rangle
\end{aligned}$$

mit der Matrix $B = \left[\begin{array}{c} \beta_{kj} \end{array} \right]_{k=1,j=1}^{n \quad m} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, wobei $\beta_{kj} = \overline{\alpha_{jk}}$. Die Matrix B heißt die zu A **adjungierte Matrix** und wird mit A^* bezeichnet. A^* ist also die Matrix, für die

$$\langle A\, x, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \,, \ \forall y \in \mathbb{C}^m$$

gilt. Nahe verwandt zur adjungierten Matrix ist die **transponierte Matrix**

$$A^T = \left[\begin{array}{c} \alpha_{jk} \end{array} \right]_{k=1,j=1}^{n \quad m} \in \mathbb{C}^{n \times m} \,.$$

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt **selbstadjungiert** (bzw. **hermitesch**), wenn $A^* = A$ gilt. Man nennt sie **symmetrisch**, falls $A^T = A$. Gilt $A^* = A^{-1}$, so heißt die Matrix A **unitär** (im reellen Fall auch **orthogonal**). Die Matrix aus Beispiel 6.2 ist also eine orthogonale Matrix. Die Gültigkeit der folgenden Regeln lässt sich leicht überprüfen:

(a) $(A\,B)^* = B^* A^* \quad \forall\, A \in \mathbb{C}^{m \times n} \,, \ \forall\, B \in \mathbb{C}^{n \times r} \,,$

(b) $(A\,B)^T = B^T A^T \quad \forall\, A \in \mathbb{C}^{m \times n} \,, \ \forall\, B \in \mathbb{C}^{n \times r} \,,$

(c) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} \quad \forall\, A \in GL(\mathbb{C}^n)$,

(d) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \quad \forall\, A \in GL(\mathbb{C}^n)$,

(e) $(A^*)^* = A\,,\ (A^T)^T = A \quad \forall\, A \in \mathbb{C}^{m\times n}$,

(f) $(A+B)^* = A^* + B^*\,,\ (A+B)^T = A^T + B^T \quad \forall\, A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$,

(g) $(\alpha\, A)^* = \overline{\alpha}\, A^*\,,\ (\alpha\, A)^T = \alpha\, A^T \quad \forall\, A \in \mathbb{C}^{m\times n}\,,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$.

Jeder linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ zwischen (endlichdimensionalen) K-Vektorräumen V und W lässt sich eine Matrix zuordnen. Diese hängt jeweils von den gewählten Basen $\{b_1, \ldots, b_n\}$ in V und $\{b'_1, \ldots, b'_m\}$ in W ab: Es seien $f(b_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_{jk} b'_j$, $k = 1, \ldots, n$, und es sei $x = \sum_{k=1}^n \xi_k b_k \in V$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \sum_{k=1}^n \xi_k f(b_k) = \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{j=1}^m \alpha_{jk} b'_j \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \xi_k \right) b'_j = \sum_{j=1}^m \eta_j b'_j\,, \end{aligned}$$

also

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix},$$

wobei $A = \left[\ \alpha_{jk}\ \right]_{j=1,k=1}^{m\quad n} \in K^{m\times n}$.

Der Vektorraum $L(V, K)$ aller linearen Abbildungen $f : V \longrightarrow K$ eines K-Vektorraumes V in den Körper K heißt der zu V **duale Raum** und wird mit V^* bezeichnet. Nach (6.3) können wir $(\mathbb{C}^n)^*$ bzw. $(\mathbb{R}^n)^*$ (allg. $(K^n)^*$) mit $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n$ (allg. K^n) identifizieren.

6.4 Der Begriff der Determinante

Wir definieren für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die **Determinante** $\det A \in \mathbb{C}$ rekursiv:

$n = 1$, d.h. $A = \left[\ \alpha_{11}\ \right]$: $\det A = \alpha_{11}$,

$n > 1$: Mit $A_{jk} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ bezeichnen wir die Matrix, die entsteht, wenn man aus A die j-te Zeile und die k-te Spalte streicht. A_{jk} heißt auch **Minor** der Ordnung $n-1$ der Matrix A. Die Zahl $\Delta_{jk} = (-1)^{j+k} \det(A_{jk})$ nennt man **Adjunkte** zum Element α_{jk}. Wir definieren

$$\det A = \sum_{k=1}^n \alpha_{1k} \Delta_{1k}\,. \tag{6.4}$$

Die Beziehung (6.4) nennt man auch Entwicklung der Determinante von A nach der ersten Zeile. Für $n = 2$ und $n = 3$ ergibt sich

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

bzw.

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}\,.$$

Die Gültigkeit des folgenden Satzes lässt sich für Matrizen bis zur Ordnung 3 leicht überprüfen. Der Beweis kann mit vollständiger Induktion geführt werden.

Satz 6.3 (Entwicklungssatz für Determinanten) *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt für beliebige $j, k \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl}\Delta_{jl} \quad \text{(Entwicklung nach der j – ten Zeile)} \tag{6.5}$$

und

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{lk}\Delta_{lk} \quad \text{(Entwicklung nach der k – ten Spalte)}\,. \tag{6.6}$$

Aus diesem Satz ergibt sich nun sofort eine Reihe von Folgerungen.

Folgerung 6.4 *Für beliebige Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt $\det A^T = \det A$ und $\det A^* = \overline{\det A}$.*

Diese Folgerung besagt insbesondere, dass alle Aussagen, die im weiteren für Zeilen formuliert werden, entsprechend auch für Spalten gültig sind.

Folgerung 6.5 *Ist $\alpha_{j_0k} = \beta_{j_0k} + \gamma_{j_0k}$, $k = 1, \ldots, n$, so gilt*

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{j_01} & \cdots & \beta_{j_0n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{j_01} & \cdots & \gamma_{j_0n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Folgerung 6.6 *Falls ein $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\alpha_{j_0k} = 0 \;\forall\, k = 1, \ldots, n$ existiert, so ist $\det A = 0$.*

Wir vertauschen die ersten beiden Zeilen in der Matrix A und erhalten

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k}(-1)^{2+k} \det A_{1k} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k}\Delta_{1k} = -\det A\,.$$

Das gilt offenbar auch beim Vertauschen zweier beliebiger benachbarter Zeilen. Wir vertauschen jetzt die j-te mit der $(j+i)$-ten Zeile. Nach i Vertauschungen benachbarter Zeilen steht die j-te an der $(j+i)$-ten Stelle und nach weiteren $i-1$ Vertauschungen benachbarter Zeilen die $(j+i)$-te an der j-ten Stelle. Wir haben dabei $2i-1$ Vorzeichenwechsel in der Determinante.

Folgerung 6.7 *Entsteht die Matrix A' aus der Matrix A durch Vertauschen zweier beliebiger Zeilen, so gilt* $\det A' = -\det A$.

Aus dieser Tatsache ergibt sich unmittelbar

Folgerung 6.8 *Besitzt A zwei gleiche Zeilen, so gilt* $\det A = 0$.

Folgerung 6.9 *Ist $\alpha_{j_0k} = \lambda\,\beta_{j_0k}$, $k = 1,\ldots,n$, so gilt*

$$\det A = \lambda \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{j_01} & \cdots & \beta_{j_0n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Folgerung 6.10 *Addiert man irgendein Vielfaches einer Zeile der Matrix A zu einer anderen Zeile, so ändert sich die Determinante nicht. D.h., sind $B = [\beta_{jk}]_{j=1,k=1}^{n\ \ n}$ mit $\beta_{jk} = \alpha_{jk}$ für $j \ne \ell$ und $\beta_{\ell k} = \alpha_{\ell k} + \lambda\,\alpha_{mk}$, $k = 1,\ldots,n$, für ein $m \ne \ell$, so ist* $\det B = \det A$.

Folgerung 6.11 *Ist A eine Dreiecksmatrix, so gilt* $\det A = \alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{nn}$.

Aus den vorangegangenen Folgerungen kann man den sogenannten **Gaußschen Algorithmus** zur Berechnung der Determinante einer Matrix ableiten:

Es sei $\alpha_{j_01} \ne 0$ (falls alle α_{j1}, $j = 1,\ldots,n$, verschwinden, so ist nach Folgerung 6.6 $\det A = 0$). Zur ℓ-ten Zeile $(\ell \ne j_0)$ addieren wir die Zeile

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\alpha_{\ell 1}}{\alpha_{j_01}}\,\alpha_{j_01} & \cdots & -\dfrac{\alpha_{\ell 1}}{\alpha_{j_01}}\,\alpha_{j_0n} \end{bmatrix}.$$

Nach Folgerung 6.10 ändert sich dabei $\det A$ nicht. Wir erhalten

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 0 & \alpha'_{12} & \cdots & \alpha'_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{j_01} & \alpha_{j_02} & \cdots & \alpha_{j_0n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha'_{n2} & \cdots & \alpha'_{nn} \end{bmatrix} = \alpha_{j_01}(-1)^{j_0+1} \det A_{n-1}\,,$$

wobei

$$\alpha'_{\ell k} = \alpha_{\ell k} - \frac{\alpha_{\ell 1}}{\alpha_{j_0 1}}\,\alpha_{j_0 k}\,, \quad k = 1, \ldots, n\,,\ \ell \neq j_0\,, \quad \text{und} \quad A_{n-1} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}\,.$$

Mit der Matrix A_{n-1} verfahren wir analog.

Aus Folgerung 6.8 ergibt sich unter Verwendung von Satz 6.3

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{\ell k}\Delta_{jk} = \delta_{\ell j} \det A\,,$$

wobei

$$\delta_{\ell j} = \begin{cases} 0 & , \quad \ell \neq j, \\ 1 & , \quad \ell = j, \end{cases}$$

das Kroneckersymbol bezeichnet. Aus dieser Beziehung ergibt sich der folgende Satz über die Darstellung der inversen Matrix.

Satz 6.12 *Ist* $\det A \neq 0$ *, so ist die Matrix* A *invertierbar, und es gilt*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Satz 6.13 (Produktsatz für Determinanten) *Sind* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *, so gilt*

$$\det(A\,B) = (\det A)(\det B)\,.$$

Folgerung 6.14 *Eine Matrix* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *ist genau dann invertierbar, wenn* $\det A \neq 0$.

Folgerung 6.15 *Es gilt* $\det A \neq 0$ *genau dann, wenn die Spalten* $a_k := \left[\ \alpha_{jk}\ \right]_{j=1}^{n}$, $k = 1, \ldots, n$ *, linear unabhängig sind.*

6.5 Der Rang einer Matrix

Es sei $A = \left[\ \alpha_{jk}\ \right]_{j=1,k=1}^{m\ ,\ n} \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Eine s-reihige Untermatrix (d.h. eine quadratische Untermatrix der Ordnung s) von A , die aus A durch Streichen von Zeilen und Spalten entsteht, heißt **Minor** von A der Ordnung s . Die maximale Ordnung s eines Minors von A mit nichtverschwindender Determinante, heißt **Rang** der Matrix A (in Zeichen: $s = \operatorname{rang} A$).

Folgerung 6.16 *Aus der Definition des Ranges einer Matrix* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *folgt:*

(a) *Es gilt stets* $\operatorname{rang} A \leq \min\{m, n\}$.

(b) *Ist* $\operatorname{rang} A = s$ *, so hat die Matrix* A *sowohl* s *linear unabhängige Spalten als auch* s *linear unabhängige Zeilen.*

(c) *Falls* $\operatorname{rang} A = s < n$, *so sind beliebige* $s+1$ *Spalten von* A *stets linear abhängig.*

(d) *Falls* $\operatorname{rang} A = s < m$, *so sind beliebige* $s+1$ *Zeilen von* A *stets linear abhängig.*

(e) *Ist* $s_0 \in \{1, \ldots, \min\{m,n\}\}$, *und haben alle Minoren von* A *der Ordnung* s_0 *verschwindende Determinante, so gilt* $\operatorname{rang} A < s_0$.

(f) *Der Rang der Matrix* A *ist gleich der Dimension des Bildraumes* $A(\mathbb{C}^n)$ *der linearen Abbildung* $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$.

6.6 Übungsaufgaben

1. Gesucht ist die Matrixdarstellung der Abbildung $A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1 + \xi_4 \\ \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_1 + \xi_3 \end{bmatrix}$

   bezüglich der kanonischen Basen.

2. Man konstruiere eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die als Matrixdarstellung eine symmetrische Matrix besitzt.

3. Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Man berechne $2B - A$.

   (b) **(HA)** Man löse die Gleichung $A + X = B$.

   (c) Wie gross ist der Rang von A, B und **(HA)** X?

   (d) Man verändere **einen** Eintrag in B so, dass mindestens ein singulärer Minor der Ordnung 2 entsteht. (Kann man durch Änderung eines Elementes den Rang von B verkleinern?)

   (e) **(HA)** Man berechne den Rang von BA^T und AB^T.

4. Bestimmen Sie die Determinante folgender Matrizen:

   (a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. **(HA)** Für welche $\varphi \in [0, 2\pi)$ verschwinden die Determinanten der Matrizen?

   (a) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \varphi & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

6. Man berechne die Determinante folgender Matrizen:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & 2 & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & n \end{bmatrix}$,

(d) **(HA)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, (e) $\left.\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix}\right\} n \text{ Zeilen}$,

(f) $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, **(Z1)** $\left[\ \lambda_j^k\ \right]_{j,k=0}^{n-1}$.

7. Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -8 & -7 & 4 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (c) **(HA)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Eine Matrix, bei der in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Eins und sonst Nullen stehen, heißt **Permutationsmatrix**. Welche Werte kann die Determinante einer Permutationsmatrix annehmen?

9. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h. $A^{-1} = A^T$. Man zeige, dass $|\det A| = 1$.

10. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **schiefsymmetrisch**, d.h. $A^T = -A$. Man zeige, dass $\det A = 0$ gilt, falls n ungerade ist. (Gilt sogar, dass der Rang von A stets gerade ist?)

11. Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Man zeige, dass das Produkt AB der Matrizen A und B genau dann singulär ist, wenn eine der beiden Matrizen A oder B singulär ist.

12. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\omega_n = e^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{n}$. Wir betrachten die Matrix der **diskreten Fouriertransformation**

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\ \omega_n^{jk}\ \right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

(a) **(HA)** Zeigen Sie, dass F_n symmetrisch, sogar unitär ist.

(b) Zeigen Sie, dass $F_n^4 = I_n$ ist.

(c) Erläutern Sie am Beispiel der Fouriermatrix F_4 (oder F_8) das Teile- und Herrsche-Prinzip zur Berechnung von $F_n x$, $x \in \mathbb{C}^n$, welches zur sogenannten **schnellen Fouriertransformation (FFT)** führt.

(Z2) Es sei $A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ eine quadratische Matrix, wobei E, F, G, H selbst Matrizen (E, H - quadratisch) passender Ordnung sind mit $\det E \neq 0$. Zeigen Sie, dass A genau dann regulär ist, wenn die Matrix $A \backslash E := H - GE^{-1}F$ regulär ist, wobei $\det A = \det E \cdot \det A\backslash E$ gilt. ($A\backslash E$ wird **Schurkomplement** von E in A genannt.)

6.7 Lineare Gleichungssysteme

Es seien uns eine Matrix $A = [\alpha_{jk}]_{j=1,k=1}^{m\ \ n}$ und ein Vektor $b = [\beta_j]_{j=1}^m$ gegeben. Wir suchen alle Vektoren $x = [\xi_k]_{k=1}^n$, so dass die m Gleichungen

$$\alpha_{j1}\xi_1 + \alpha_{j2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{jn}\xi_n = \beta_j\,, \quad j = 1, \ldots, m\,,$$

gleichzeitig erfüllt sind. Dieses System von linearen Gleichungen können wir kurz in der Form

$$A\,x = b \tag{6.7}$$

schreiben.

Satz 6.17 (Quadratische Systeme) *Ist $m = n$, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Die Gleichung (6.7) ist für jede rechte Seite $b \in \mathbb{C}^m$ lösbar.

(b) Die Gleichung (6.7) ist für jede rechte Seite $b \in \mathbb{C}^m$ **eindeutig** *lösbar.*

(c) Es gilt $\ker A = \{\Theta\}$, d.h. die **homogene** *Gleichung $A\,x = \Theta$ besitzt nur die triviale Lösung $x = \Theta$.*

(d) Es gilt $\det A \neq 0$.

Beispiel 6.18 *Der Gaußsche Algorithmus lässt sich auch zur Lösung von linearen Gleichungssystemen verwenden. Wir betrachten das Beispiel*

$$\begin{array}{rcrcrcr} \xi_1 & - & \xi_2 & + & 2\,\xi_3 & = & 4 \\ -2\,\xi_1 & + & \xi_2 & & & = & -1 \\ 3\,\xi_1 & + & \xi_2 & - & 2\,\xi_3 & = & 0 \end{array}\,,$$

welches wir kurz in der Form

$$A\,x = b$$

schreiben. Addieren wir die erste Zeile der sogenannten erweiterten Systemmatrix

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

zu ihrer letzten, so erhalten wir

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Hieraus können wir $\det A = -8$ *und die Lösung*

$$\xi_1 = 1\,, \quad \xi_2 = -1 + 2\,\xi_1 = 1\,, \quad \xi_3 = \frac{1}{2}(4 + \xi_2 - \xi_1) = 2$$

ablesen.

Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix, so können wir die inverse Matrix A^{-1} durch Lösen der n Gleichungssysteme

$$A\,x^k = e_k^{(n)} = [\delta_{kj}]_{j=1}^n\,, \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

bestimmen. Es ist nämlich dann $A^{-1} = \begin{bmatrix} x^1 & \cdots & x^n \end{bmatrix}$.

Beispiel 6.19 *Sei*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten schrittweise

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

also

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Satz 6.20 (Cramersche Regel) *Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\det A \neq 0$ ist die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems (6.7) gegeben durch*

$$\xi_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

wobei

$$A_k = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,k-1} & \beta_1 & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,k-1} & \beta_n & \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Wir stellen uns nun das Ziel, die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in ein Produkt $A = L\,R$ aus einer oberen Dreiecksmatrix $R = [\rho_{jk}]_{j=1,k=1}^{n\ \ n}$ und einer unteren Dreiecksmatrix $L = [\lambda_{jk}]_{j=1,k=1}^{n\ \ n}$ mit $\lambda_{jj} = 1$, $j = 1, \ldots, n$, zu zerlegen:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ 0 & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \rho_{nn} \end{bmatrix}$$

Es folgt $\alpha_{1k} = 1 \cdot \rho_{1k}$, $k = 1, \ldots, n$, und $\alpha_{j1} = \lambda_{j1}\rho_{11}$, $j = 2, \ldots, n$, d.h.

$$\rho_{1k} = \alpha_{1k}, \ k = 1, \ldots, n, \quad \lambda_{j1} = \frac{\alpha_{j1}}{\rho_{11}}, \ j = 2, \ldots, n.$$

Damit sind die erste Zeile von R und die erste Spalte von L bestimmt. Weiter muß gelten $\alpha_{2k} = \lambda_{21}\rho_{1k} + 1 \cdot \rho_{2k}$, $k = 2, \ldots, n$, und $\alpha_{j2} = \lambda_{j1}\rho_{12} + \lambda_{j2}\rho_{22}$, $j = 3, \ldots, n$, woraus sich

$$\rho_{2k} = \alpha_{2k} - \lambda_{21}\rho_{1k}, \ k = 2, \ldots, n, \quad \lambda_{j2} = \frac{\alpha_{j2} - \lambda_{j1}\rho_{1k}}{\rho_{22}}, \ j = 3, \ldots, n,$$

ergibt, usw. usf. Für die Ausführbarkeit ist $\rho_{jj} \neq 0$ erforderlich. Das Gleichungssystem (6.7) lässt sich nun in der Form

$$L\,R\,x = b$$

schreiben und ist somit äquivalent zur Lösung der beiden Dreieckssysteme

$$L\,y = b \quad \text{und} \quad R\,x = y,$$

was auch der Durchführung des Gaußschen Algorithmus entspricht.

Wir kommen nun zur allgemeinen Situation, d.h. wir lassen in (6.7) sowohl $\det A = 0$ (falls $n = m$) als auch $n \neq m$ zu. Wir betrachten die erweiterte Systemmatrix

$$B = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1 & \cdots & a^n & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{bmatrix}$$

mit den Spalten $a^k = [\alpha_{jk}]_{j=1}^m$, $k = 1, \ldots, n$, der Matrix A . Ist $x = [\xi_k]_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$ eine Lösung von $A\,x = b$, so gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k a^k = b\,,$$

d.h. $b \in \mathcal{L}[\{a^1, \ldots, a^n\}]$. Da der Rang einer Matrix die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten dieser Matrix angibt, bedeutet dies, dass $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} A$ sein muß. Ist umgekehrt $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} A$, so ist b als Linearkombination der Spalten von A darstellbar. Es gilt also

Satz 6.21 *Das lineare Gleichungssystem (6.7) ist genau dann lösbar, wenn der Rang der erweiterten Systemmatrix B gleich dem Rang der Systemmatrix A ist.*

Folgerung 6.22 *Ist $m \leq n$ und $\operatorname{rang} A = m$ (d.h. maximal), so ist (6.7) lösbar.*

Folgerung 6.23 *Ist $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} A = n$ (und somit $m \geq n$), so ist (6.7) eindeutig lösbar.*

Wir betrachten jetzt den Fall $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} A < n$. Aus dem Theorem 5.22 folgt $\dim \ker A = n - \operatorname{rang} A > 0$ und aus Satz 5.14, dass

$$\Phi : \mathbb{C}^n / \ker A \longrightarrow A(\mathbb{C}^n)\,, \quad [x] = [x]_{\ker A} \mapsto A\,x$$

ein Isomorphismus ist. D.h. die Gleichung

$$\Phi([x]) = b$$

besitzt für $b \in A(\mathbb{C}^n)$ eine eindeutige Lösung $[x^*]$. Da $x \in [x^*]$ äquivalent zu $x - x^* \in \ker A$, d.h. $A\,x = A\,x^*$, ist, muß $[x^*] = x^* + \ker A$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems (6.7) sein.

Folgerung 6.24 *Ist x^s eine spezielle Lösung von (6.7), d.h. gilt $A\,x^s = b$, so erhalten wir alle Lösungen von (6.7), wenn wir zu x^s ein beliebiges Element aus $\ker A$, d.h. eine beliebige Lösung des homogenen Gleichungssystems $Ax = \Theta$, addieren.*

Wie man das mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus praktisch realisieren kann, wollen wir uns an einem Beispiel anschauen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr|ccr} 3\,\xi_1 & + & 2\,\xi_2 & + & \xi_3 & + & 7\,\xi_4 & = & -5 & \cdots & = & -5 \\ \xi_1 & - & \xi_2 & + & 2\,\xi_3 & - & \xi_4 & = & 5 & \cdots & = & 5 \\ 2\,\xi_1 & + & \xi_2 & + & \xi_3 & + & 4\,\xi_4 & = & -6 & \cdots & = & -2 \end{array}$$

Wir erhalten schrittweise

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 3 & 2 & 1 & 7 & -5 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & -6 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & -5 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & -6 & -2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 10 & -20 & -20 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -16 & -12 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Wir erhalten also $\operatorname{rang} A = 2$ und somit $\dim \ker A = 4 - 2 = 2$ (vgl. Theorem 5.22). Im ersten Fall ist $\operatorname{rang} B = 3$ und das System nicht lösbar. Im zweiten Fall ist $\operatorname{rang} B = 2 = \operatorname{rang} A$. Setzen wir in diesem Fall $\xi_4 = s$ und $\xi_3 = t$ (freie Parameter), so folgt $\xi_2 = -4 + t - 2\,s$ und $\xi_1 = 5 + \xi_2 - 2\,\xi_3 + \xi_4 = 1 + t - 2\,s - 2\,t + s = 1 - t - s$. Die Lösungsmenge lässt sich also in der Form

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1-t-s \\ -4+t-2\,s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{C} \right\} \tag{6.8}$$

darstellen. Dabei ist $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ eine spezielle Lösung des Gleichungssystems, und die Vektoren $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ und $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ bilden eine Basis des Kernes der Matrix A. Die Darstellung der Lösungsmenge ist natürlich nicht eindeutig. So könnte man die obige Menge (6.8) z.B. auch in der Form

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (t-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{C} \right\}$$

schreiben.

6.8 Übungsaufgaben

1. Lösen Sie folgende homogene Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker A$ und $\operatorname{im} A$, wenn A die Koeffizientenmatrix der Gleichungssysteme bezeichnet.

   (a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$ (c) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

   (d) $\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 0 \\ 3x + y - z &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}$ (e) $\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 3x - y + 3z &= 0 \\ x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$ (f) **(HA)** $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

(g) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$ (h) **(HA)** $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y - 5z &= 0 \\ x - 3z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$ (i) $\begin{aligned} x - y + z - w &= 0 \\ x + y - u + v &= 0 \\ y + z + v - w &= 0 \end{aligned}$

2. Lösen Sie folgende inhomogene Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus:

   (a) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 8 \\ 15x_1 + 10x_2 &= 40 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

   (c) **(HA)** $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= 0 \\ 5x - y + 3z &= 1 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned}$

   (e) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 + 2x_6 &= 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \end{aligned}$

3. Man bestimme die Lösungen folgender Gleichungssysteme in Abhängigkeit von λ :

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & .\lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) **(HA)** $\begin{bmatrix} 2 & -9 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 6 & 13 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

   (c) **(HA)** $\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ 3x - y + 3z &= \lambda \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} x + y + \lambda z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ \lambda x + y + z &= 1 \end{aligned}$

4. Man löse folgende Gleichungssysteme unter Verwendung der inversen Matrix:

   (a) **(HA)** $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & -2 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_3 \end{array}$

5. Gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{C}^n$ eines komplexen Gleichungssystems $Ax = b$. Wie kann man diese durch Übergang zu einem äquivalenten reellen Gleichungssystem finden?

6. (a) Berechnen Sie die inversen Matrizen A^{-1} **(HA)** und B^{-1} zu

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

   mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens und der Adjunkten.

   (b) Bestimmen Sie die Lösungen x, y der Gleichungssysteme

   $$(\textbf{HA})\ Ax = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}^T \quad \text{und} \quad By = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

unter Verwendung der inversen Matrix und **(HA)** kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit der Cramerschen Regel.

7. Sei $\mathbb{R}_n[x]$ der lineare Raum aller (reellen) Polynome maximal n-ten Grades.
   (a) Gibt es ein Polynom $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, welches an den Stellen $x_i = i \quad (i = 1, 2, 4)$ gerade die gleichen Funktionswerte annimmt wie $f(x) = x^{-1}$? Wenn ja, geben Sie die Koeffizienten dieses Polynoms an!
   (b) Gibt es ein lineares Polynom, das die Bedingungen aus (a) erfüllt?

8. Berechnen Sie die dritte Komponente der Lösung des Gleichungssystems aus Aufgabe 4 (a) bzw. (b) mittels Cramerscher Regel!

9. **(HA)** Gegeben sei die tridiagonale Matrix A_n n-ter Ordnung ($n > 1$), deren Einträge auf der Hauptdiagonale gleich 2 und auf den Nebendiaglonalen gleich -1 sind, d.h.

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie $\det A_5$ und A_5^{-1}.
   (b) Zeigen Sie, dass A_n ($n > 1$) regulär ist und dass

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 1 & 2 & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & & n-1 & n \end{bmatrix} - \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

   gilt.
   (**Z**) Berechnen Sie $\det A_n$.

(Z) Man finde alle Matrizen X, für die gilt

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

(c) $U_n X = X U_n$ mit $U_n = [\delta_{i,j+1}]_{i,j=1}^n$, wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker–Symbol bezeichnet.

Kapitel 7

Eigenwerte linearer Abbildungen

7.1 Eigenwerte und Eigenunterräume

Es seien V ein K-Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Die Zahl $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von f, wenn $\ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) \neq \{\Theta\}$ gilt. In diesem Fall nennt man den linearen Unterraum $E_\lambda := \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ **Eigenunterraum** zum Eigenwert λ.

Folgerung 7.1 *Eine Zahl $\lambda \in K$ ist genau dann Eigenwert von f, wenn ein $x \in V$ mit $x \neq \Theta$ existiert, so dass $f(x) = \lambda\,x$ gilt. Einen solchen Vektor $x \neq \Theta$ nennt man dann* **Eigenvektor** *oder* **Eigenelement** *der linearen Abbildung f zum Eigenwert λ.*

Sind λ und μ zwei verschiedene Eigenwerte von f und $x \in E_\lambda \cap E_\mu$, so folgt $\lambda\,x = f(x) = \mu\,x$, d.h. $(\lambda - \mu)x = \Theta$, also $x = \Theta$. Es seien nun $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f mit den Eigenvektoren $x^1, \ldots, x^k$ und $\{x^1, \ldots, x^{k-1}\}$ linear unabhängig sowie

$$\alpha_1 x^1 + \cdots + \alpha_k x^k = \Theta\,. \tag{7.1}$$

Es folgt

$$\Theta = f(\Theta) = \alpha_1 f(x^1) + \cdots + \alpha_k f(x^k) = \alpha_1\lambda_1 x^1 + \cdots + \alpha_k\lambda_k x^k\,. \tag{7.2}$$

Wir multiplizieren die Gleichung (7.1) mit λ_k, subtrahieren das Resultat von (7.2) und erhalten

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x^1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x^{k-1} = \Theta\,,$$

woraus $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$ und somit auch $\alpha_k = 0$ folgen. Wir fassen zusammen.

Folgerung 7.2 *Es gilt $E_\lambda \cap E_\mu = \{\Theta\}$ für $\lambda \neq \mu$. Jedes System von Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten ist linear unabhängig. Ist* $\dim V = n$, *so besitzt eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.*

7.2 Das Matrizeneigenwertproblem

Für eine Matrix $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ ist $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann Eigenwert, wenn ein $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\}$ mit $(A - \lambda\, I)\, x = \Theta$ existiert. Das ist äquivalent zu $\det(A - \lambda\, I) = 0$ (vgl. Satz 6.17). Die Funktion

$$p_A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \lambda \mapsto p_A(\lambda) := \det(A - \lambda\, I)$$

ist ein Polynom n-ten Grades und wird **charakteristisches Polynom** der Matrix A genannt. Eine komplexe Zahl λ ist also genau dann Eigenwert der Matrix A, wenn sie Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Matrix A ist. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte der Matrix A, so haben wir die Darstellung

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{m_k}\,.$$

Die Zahl m_j heißt **algebraische Vielfachheit** des Eigenwertes λ_j, die Zahl $\dim E_{\lambda_j}$ dagegen **geometrische** oder **numerische Vielfachheit**.

Beispiel 7.3 *Für* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ *erhalten wir*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = (2 - \lambda)(1 - \lambda)\,.$$

Zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ *finden wir z.B. den Eigenvektor* $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, *zum Eigenwert* $\lambda_2 = 1$ *den Eigenvektor* $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Beispiel 7.4 *Die Matrix* $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *hat die Eigenwerte* $\lambda_1 = \mathbf{i}$ *und* $\lambda_2 = -\mathbf{i}$. *Eigenvektoren sind* $x_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ 1 \end{bmatrix}$ *und* $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{bmatrix}$.

Beispiel 7.5 *Für* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *ist* $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2$. *Diese Matrix hat also nur einen Eigenwert* $\lambda = 1$ *mit der algebraischen Vielfachheit* 2. *Wegen*

$$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{C} \right\}$$

ist die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwertes aber nur 1.

Schreiben wir das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ einer Matrix $A = [a_{jk}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in der Form

$$p_A(\lambda) = (-\lambda)^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0\,,$$

so folgt

$$\alpha_0 = p_A(0) = \det A \quad \text{und} \quad \alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \,.$$

Die zweite Aussage kann man induktiv beweisen: Für $n = 1$ ist die Aussage offenbar richtig. Wir nehmen an, dass sie für $n = m$ gilt. Es sei $n = m + 1$. Wir entwickeln $\det(A - \lambda I)$ nach der letzten Zeile und erhalten

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+m+1} a_{m+1,k} \det(A - \lambda I)_{m+1,k} + (a_{m+1,m+1} - \lambda) \det(A - \lambda I)_{m+1,m+1} \\ &= (a_{m+1,m+1} - \lambda) \left[(-\lambda)^m + (-1)^{m-1} \sum_{k=1}^{m} a_{kk} \lambda^{m-1} + \cdots \right] + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+m+1} \cdots \\ &= (-\lambda)^{m+1} + (-1)^m \sum_{k=1}^{m} a_{kk} \lambda^m + (-1)^m a_{m+1,m+1} \lambda^m + \cdots \\ &= (-\lambda)^{m+1} + (-1)^m \sum_{k=1}^{m+1} a_{kk} \lambda^m + \cdots \end{aligned}$$

Die Zahl $\operatorname{tr}(A) := \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ heißt **Spur** der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nennt man zueinander **ähnlich**, wenn eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ existiert, so dass $B = T^{-1} A\, T$ gilt. Man schreibt dafür „$A \sim B$“. Es gilt dann $\det A = \det B$. Wegen $\det(B - \lambda I) = \det(T^{-1}(A - \lambda I)T = \det(A - \lambda I)$ ist sogar $p_B(\lambda) = p_A(\lambda)$.

Folgerung 7.6 *Die Relation „$\sim$“ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}^{n \times n}$. Das charakteristische Polynom und somit die Determinante und die Spur einer Matrix sind invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen.*

Mit der Matrix T kann eine Basistransformation beschrieben werden. $B = T^{-1} A\, T$ entspricht dann der Matrixdarstellung der linearen Abbildung in der neuen Basis (vgl. Abschnitt 7.4). Dabei ist es oft das Ziel, für B einen möglichst einfachen Repräsentanten der entsprechenden Äquivalenzklasse zu finden.

Satz 7.7 *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist genau dann zu einer Diagonalmatrix ähnlich, wenn eine Basis $\{b^1, \ldots, b^n\}$ von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A existiert.*

Satz 7.8 (Cayley-Hamilton) *Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt $p_A(A) = \Theta$.*

7.3 Selbstadjungierte (hermitesche) Matrizen

Sind λ und μ zwei verschiedene Eigenwerte einer hermiteschen Matrix A (d.h. $A^* = A$) mit den Eigenvektoren x und y, so folgt

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle A\, x, x \rangle = \langle x, A\, x \rangle = \overline{\lambda} \langle x, x \rangle \;,$$

also $\lambda = \overline{\lambda}$, und

$$\lambda \langle x, y\rangle = \langle A\,x, y\rangle = \langle x, A\,y\rangle = \mu \langle x, y\rangle \ ,$$

d.h. $\langle x, y\rangle = 0$.

Folgerung 7.9 *Die Eigenwerte hermitescher Matrizen sind reell, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander orthogonal.*

Bemerkung 7.10 *Ein System $\{x^1, \dots, x^m\} \subset \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\}$ paarweise orthogonaler Vektoren ist stets linear unabhängig. Ist $m = n$, so nennt man ein solches System eine* **orthogonale Basis**. *Gilt zusätzlich $\left\langle x^k, x^k\right\rangle = 1$, $k = 1, \dots, n$, so heißt diese Basis* **orthonormal**.

Mittels des **Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens** läßt sich jede Basis $\{b^1, \dots, b^n\}$ des $\mathbb{C}^n$ orthonormalisieren:

1. $\widetilde{b}^1 := \dfrac{1}{\sqrt{\langle b^1, b^1\rangle}}\, b^1$
2. for $k = 2$ to n do
   (a) $\widehat{b}^k := b^k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \left\langle b^k, \widetilde{b}^j\right\rangle \widetilde{b}^j$
   (b) $\widetilde{b}^k := \dfrac{1}{\sqrt{\left\langle \widehat{b}^k, \widehat{b}^k\right\rangle}}\, \widehat{b}^k$
3. $\{\widetilde{b}^1, \dots, \widetilde{b}^n\}$ ist orthonormale Basis.

Es seien nun $A = A^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit der algebraischen Vielfachheit m_1 und der geometrischen Vielfachheit n_1 . Ferner sei $\{b^1, \dots, b^{n_1}\}$ eine orthonormale Basis in E_{λ_1} . Falls $n_1 < n$ ist, vervollständigen wir diese Basis zu einer orthonormalen Basis $\{b^1, \dots, b^{n_1}, b^{n_1+1}, \dots, b^n\}$ in $\mathbb{C}^n$. Für die Matrix $B := [b^1|\cdots|b^n]$ ist dann $B^* = B^{-1}$ und

$$D := B^* A\, B = [d_{jk}]_{j=1,k=1}^{n\ ,\ n} = D^* \ ,$$

wobei

$$d_{jk} = (b^j)^* A\, b^k = \lambda_1 (b^j)^* b^k = \lambda_1 \delta_{jk}$$

gilt, falls $k \le n_1$ oder $j \le n_1$ ist. Die hermitesche Matrix D hat also die Gestalt

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \Theta & \\ & \ddots & & \Theta \\ \Theta & & \lambda_1 & \\ & \Theta & & \widetilde{D} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \widetilde{D} \in \mathbb{C}^{(n-n_1)\times(n-n_1)} \, . \tag{7.3}$$

Damit folgt

$$p_D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} p_{\widetilde{D}}(\lambda) = p_A(\lambda)\,. \tag{7.4}$$

Da die Multiplikation einer Matrix mit einer regulären Matrix den Rang nicht ändert, gilt

$$n_1 = n - \operatorname{rang}(A - \lambda_1 I) = n - \operatorname{rang}(B^*(A - \lambda_1 I)B) = n - \operatorname{rang}(D - \lambda_1 I)\,,$$

woraus sich mit (7.3) die Beziehung

$$\det(\widetilde{D} - \lambda_1 I) = p_{\widetilde{D}}(\lambda_1) \neq 0$$

ergibt. Aus (7.4) folgt nun $n_1 = m_1$.

Folgerung 7.11 *Zu einer hermiteschen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert stets eine orthonormale Basis von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren dieser Matrix.*

7.4 Basistransformationen

Es seien V ein K-Vektorraum der Dimension n und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung sowie $\{b^1, \ldots, b^n\}$ eine Basis in V . Mit $A \in K^{n\times n}$ bezeichnen wir die Matrixdarstellung der linearen Abbildung f bezüglich dieser Basis. Es sei nun $\{\widetilde{b}^1, \ldots, \widetilde{b}^n\}$ eine weitere Basis in V . Wir suchen die Matrixdarstellung A' von f bezüglich dieser neuen Basis. Zuerst beantworten wir aber die Frage, wie sich die Koordinaten eines Elementes

$$x = \xi_1 b^1 + \cdots + \xi_n b^n = \widetilde{\xi}_1 \widetilde{b}^1 + \cdots + \widetilde{\xi}_n \widetilde{b}^n$$

bei diesem Basiswechsel ändern. Wir schreiben

$$\widetilde{b}^k = \tau_{1k} b^1 + \cdots + \tau_{nk} b^n\,, \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

und setzen $T = [\tau_{jk}]_{j=1,k=1}^{n\ ,\ n}$. Es folgt

$$x = \sum_{k=1}^n \widetilde{\xi}_k \left(\sum_{j=1}^n \tau_{jk} b^j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \tau_{jk} \widetilde{\xi}_k \right) b^j$$

und somit

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \widetilde{\xi}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\xi}_n \end{bmatrix} = T\,\widetilde{\xi}\,.$$

T heißt Transformationsmatrix. Für $f(x) = \eta_1 b^1 + \cdots + \eta_n b^n = \widetilde{\eta}_1 \widetilde{b}^1 + \cdots + \widetilde{\eta}_n \widetilde{b}^n$ erhalten wir nun

$$\widetilde{\eta} = \begin{bmatrix} \widetilde{\eta}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\eta}_n \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = T^{-1} A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = T^{-1} A\, T \begin{bmatrix} \widetilde{\xi}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{\xi}_n \end{bmatrix} = T^{-1} A\, T\, \widetilde{\xi}\,,$$

d.h. $A' = T^{-1} A\, T$.

Es sei jetzt $A = A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ in der kanonischen Basis $\{e^1, \ldots, e^n\}$. Nach Folgerung 7.11 existiert eine orthonormale Basis $\{\widetilde{b}^1, \ldots, \widetilde{b}^n\}$ aus Eigenvektoren der Matrix A ,

$$\widetilde{b}^k = \tau_{1k} e^1 + \cdots + \tau_{nk} e^n = \begin{bmatrix} \tau_{1k} \\ \vdots \\ \tau_{nk} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n \,.$$

Für $T = [\tau_{jk}]_{j=1,k=1}^{n\ ,\ n}$ gilt dann $T^{-1} = T^*$, d.h. die Transformationsmatrix T ist eine unitäre Matrix, und $A\,T = T\,\Lambda$ mit der Diagonalmatrix $\Lambda = \operatorname{diag}\left[\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n\ \right]$ aus den Eigenwerten λ_k , $k = 1, \ldots, n$ (mit entspr. Vielfachheit gezählt), der Matrix A . Es folgt $A' = T^* A\, T = T^* T\, \Lambda = \Lambda$, d.h. die lineare Abbildung f hat in der Orthonormalbasis $\{\widetilde{b}^1, \ldots, \widetilde{b}^n\}$ Diagonalgestalt. Eine Transformation T mit $T^{-1} = T^*$ heißt **unitäre Transformation** (im reellen Fall **orthogonale Transformation**). In einer solchen Situation gilt

$$\langle \xi, \eta \rangle = \left\langle T\,\widetilde{\xi}, T\,\widetilde{\eta} \right\rangle = \left\langle \widetilde{\xi}, T^* T\,\widetilde{\eta} \right\rangle = \left\langle \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta} \right\rangle ,$$

d.h. Winkel und Größenverhältnisse bleiben bei einer solchen Transformation erhalten (siehe auch Kapitel 8).

Bemerkung 7.12 (ohne Beweis) *Es existiert genau dann eine unitäre Transformation T mit $T^* A\, T = \operatorname{diag}\left[\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n\ \right]$, wenn A eine* **normale Matrix** *ist, d.h. wenn $A\, A^* = A^* A$ gilt.*

Ist $\{\widetilde{b}^1, \ldots, \widetilde{b}^n\}$ eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren der Matrix A mit den entsprechenden Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so gilt mit $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \widetilde{b}^k = \sum_{k=1}^{n} \left\langle x, \widetilde{b}^k \right\rangle \widetilde{b}^k$ die Beziehung

$$A\, x = \sum_{k=1}^{n} \left\langle x, \widetilde{b}^k \right\rangle A\, \widetilde{b}^k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left\langle x, \widetilde{b}^k \right\rangle \widetilde{b}^k \,.$$

Folgerung 7.13 *In einer Orthonormalbasis $\{\widetilde{b}^1, \ldots, \widetilde{b}^n\}$ von Eigenvektoren der Matrix A gilt*

$$A\, x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left\langle x, \widetilde{b}^k \right\rangle \widetilde{b}^k ,$$

wobei λ_k , $k = 1, \ldots, n$, die entsprechenden Eigenwerte der Matrix A bezeichnen.

Folgerung 7.14 *Für eine hermitesche Matrix A mit den Eigenwerten $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$ gilt*

$$\lambda_1 \le R(x) := \frac{\langle A\, x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \le \lambda_n , \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\} \,.$$

$R(x)$ heißt **Rayleigh-Quotient***.*

Wegen $R(\widetilde{b}^k) = \lambda_k$ ergibt sich noch folgende Aussage.

Folgerung 7.15 *Unter den Voraussetzungen der Folgerung 7.14 gilt*

$$\lambda_1 = \min\{R(x) : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\}\} \quad \text{und} \quad \lambda_n = \max\{R(x) : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\}\}\,.$$

Die Menge der Eigenwerte einer Matrix A nennt man **Spektrum** der Matrix A und bezeichnet sie mit $\sigma(A)$.

Ein geordnetes Paar $(V, \|.\|)$ aus einem K-Vektorraum V und einer Abbildung $\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ nennt man **normierten Raum**, falls folgende Axiome erfüllt sind:

(N1) $\|x\| \ge 0 \;\forall\, x \in V\,,\ \|x\| = 0 \iff x = \Theta\,,$

(N2) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\| \;\forall\, x \in V\,,\ \forall\, \alpha \in K\,,$

(N3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \;\forall\, x, y \in V\,.$

Bemerkung 7.16 *Ist $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum, so ist (V, d) mit $d(x, y) := \|x - y\|$ ein metrischer Raum. Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$, so wird durch $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf V definiert.*

Beispiel 7.17 *Auf $\mathbb{C}^n$ kann man z.B. folgende Normen definieren ($x = [\xi_k]_{k=1}^n$):*

- $\|x\|_2 := \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2}\,,$
- $\|x\|_\infty := \max\{|\xi_k| : k = 1, \ldots, n\}\,,$
- $\|x\|_1 := \displaystyle\sum_{k=1}^n |\xi_k|\,,$
- $p \ge 1 : \|x\|_p := \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\,.$

Sind $(V, \|.\|_V)$ und $(W, \|.\|_W)$ zwei normierte Räume sowie $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung, so nennt man die Zahl

$$\|f\| := \sup\left\{ \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} : x \in V \setminus \{\Theta\} \right\},$$

falls sie endlich ist, **Norm der linearen Abbildung** f.

Wir betrachten eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ als lineare Abbildung $A : (\mathbb{C}^n, \|.\|_2) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, \|.\|_2)$ und berechnen ihre Norm. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|A\|^2 &= \sup\left\{\frac{\|A\,x\|_2^2}{\|x\|_2^2} : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\}\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{\langle A^* A\,x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} : x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\Theta\}\right\} = \max\,\sigma(A^*A)\,.
\end{aligned}$$

Es ist also

$$\|A\| = \sqrt{\max\,\sigma(A^*A)}\,. \tag{7.5}$$

Im Fall $A^* = A$ gilt damit $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

7.5 Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie für folgende (reelle) symmetrische Matrizen A die Eigenwerte, deren Vielfachheit sowie ein dazugehöriges System von Eigenvektoren. Geben Sie eine orthogonale Matrix B an, so dass $B^T AB$ Diagonalgestalt hat.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) **(HA)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ (d) **(HA)** $\operatorname{diag}\left[\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n\ \right]$

   (Z1) $A = J_n := \left[\ \delta_{i,n-j+1}\ \right]_{i,j=1}^n$ (Flip-Matrix) **(Z2)** $A = \left[\ \alpha_{ij}\ \right]_{i,j=1}^n$ mit $\alpha_{ij} = 1\ \forall\, i, j$

2. **(HA)** Man beweise: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn Null kein Eigenwert von A ist.

3. Sei λ Eigenwert einer regulären Matrix A. Zeigen Sie, dass dann $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1} ist.

4. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte einer unitären Matrix auf dem Einheitskreis liegen.

5. **(HA)** Zeigen Sie, dass eine reelle, symmetrische und orthogonale Matrix nur die Eigenwerte $+1$ oder -1 hat. Gilt dies auch ohne die Voraussetzung "symmetrisch"?

6. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ die Eigenwerte einer diagonalisierbaren $n \times n$ Matrix A, und sei $g(\mu)$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass dann $g(\lambda_1), \cdots, g(\lambda_n)$ die Eigenwerte von $g(A)$ sind.

7. Man transformiere (wenn möglich) die folgenden Matrizen auf Diagonalform und gebe die entsprechende Transformationsmatrix (wenn möglich, als unitäre Matrix) an.

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\mathbf{i} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) **(HA)** $A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $A_4 = A_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Man orthonormalisiere das System $\{g^1, g^2, g^3, g^4\}$ mit

   (a) $g^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $g^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $g^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $g^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$,

   (b) **(HA)** $g^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $g^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $g^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $g^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

9. **(HA)** Es seien zwei Basen

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   sowie ein Vektor $x = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 30 \end{bmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Man finde die Koordinaten von x in diesen beiden Basen.

10. **(HA)** Geben Sie alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die die Eigenwerte $-1, 1$ und 0 besitzen.

(Z3) Geben Sie für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ eine Zerlegung $A = QR$ an, wobei Q eine orthogonale Matrix ist und R eine obere Dreiecksmatrix. (Hinweis: Wenden Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Spalten der Matrix A an!)

(Z4) Sei $\phi(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \cdots - a_1 x - a_0$ ein Polynom n-ten Grades. Die $n \times n$ Matrix

$$C_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \\ a_0 & \cdots & & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

heißt **Begleitmatrix** von $\phi(x)$.

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte von C_ϕ.

2. Seien alle Eigenwerte λ_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$, von C_ϕ einfach. Zeigen Sie, dass dann C_ϕ die Diagonalisierung $V^{-1} C_\phi V = \operatorname{diag} \left[\begin{array}{ccc} \lambda_0 & \cdots & \lambda_{n-1} \end{array} \right]$ mit $V = \left[\begin{array}{c} \lambda_j^i \end{array} \right]_{i,j=0}^{n-1}$ gestattet.

3. Überprüfen Sie obige Aussagen für $\phi(x) = x^n - 1$. In diesem Falle ist $F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} V$ die Fouriermatrix der Ordnung n.

(Z5) Zeigen Sie, dass jede Matrix der Gestalt

$$C = \operatorname{circ} \left[\begin{array}{ccc} c_0 & \cdots & c_{n-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \ddots & c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{array} \right]$$

(spezielle Toeplitzmatrix, genannt Zirkulante) mit Hilfe einer unitären Transformation auf Diagonalgestalt gebracht werden kann. Wie sieht diese Transformation und wie sehen die Diagonalelemente aus?

Kapitel 8

Die Hauptachsentransformation von Quadriken

Durch Gleichungen der Form

$$a\,x^2 + b\,y^2 + c\,x\,y + d\,x + e\,y + f = 0 \tag{8.1}$$

werden in einem kartesischen x-y-Koordinatensystem Kegelschnitte wie Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln beschrieben, z.B. durch $3\,x^2 + 5\,y^2 - 4 = 0$ eine Ellipse, durch $2\,x^2 - 3\,y^2 - 4 = 0$ eine Hyperbel und durch $4\,x^2 - y = 0$ eine Parabel. Gleichungen der Gestalt (8.1) heißen **quadratische** Gleichungen. In den Beispielen sind $c = d = e = 0$. Es entsteht die Frage: Wie kann man anhand von (8.1) entscheiden, welcher Kegelschnitt vorliegt?

Eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$h(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \xi_j \xi_k + 2 \sum_{k=1}^{n} \beta_k \xi_k + \gamma \tag{8.2}$$

mit $x = [\xi_1, \ldots, \xi_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $\beta_k, \gamma \in \mathbb{R}$, und der symmetrischen Matrix $A = [\alpha_{jk}]_{j,k=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (deren Einträge nicht sämtlich verschwinden) heißt **Polynom zweiten Grades** in den Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Die Gleichung

$$h(x) = 0$$

ist dann eine **quadratische Gleichung** in n reellen Unbekannten. Die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$$

nennt man **Hyperfläche zweiten Grades** oder **Quadrik**.

Wir verfolgen nun das Ziel, Polynome zweiten Grades in Normalformen zu überführen, denen man die geometrischen Eigenschaften der entsprechenden Quadrik leicht ansieht.

Mit der Bezeichnung $b = [\beta_1, \dots, \beta_n]^T$ läßt sich (8.2) in der Form

$$h(x) = \langle A\,x, x\rangle + 2\,\langle b, x\rangle + \gamma \tag{8.3}$$

schreiben.

Satz 8.1 *Es existiert eine Koordinatentransformation*

$$x = V\,y + p \tag{8.4}$$

mit einer orthogonalen Matrix V *der Ordnung* n, $\det V = 1$ *und* $p = [\pi_1, \dots, \pi_n]^T \in \mathbb{R}^n$, *mit der das Polynom (8.2) (bzw. (8.3)) in eine der Formen*

(a) $h(V\,y + p) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \eta_k^2 + \beta\,, \qquad r = \operatorname{rang} A\,,$

oder

(b) $h(V\,y + p) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \eta_k^2 + 2\beta\,\eta_n\,, \qquad r = \operatorname{rang} A < n\,,\ \beta > 0\,,$

übergeht.

Bemerkung 8.2 *Zu (8.4) vergleiche man den Abschnitt 7.4. Die Determinante einer orthogonalen Matrix kann gleich* $+1$ *oder gleich* -1 *sein. Die Bedingung* $\det V = 1$ *sichert neben Längen- und Winkeltreue auch die Erhaltung des Drehsinns bei der Basistransformation (8.4). Der Vektor* p *in (8.4) bewirkt eine zusätzliche Translation. Eine Transformation der Gestalt (8.4) mit den angegebenen Eigenschaften heißt auch* **Bewegung**.

Die Koordinatentransformation bzw. Bewegung (8.4) beschreibt den Übergang vom kartesischen Koordinatensystem $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ zu einem neuen kartesischen Koordinatensystem $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$. Die η_k-Achsen nennt man **Hauptachsen** der durch $h(x) = 0$ definierten Quadrik und (8.4) entsprechend **Hauptachsentransformation**.

Ist die Koeffizientenmatrix A regulär, so bezeichnet man p als Mittelpunkt der Quadrik, denn in diesem Fall gilt (a) mit $r = n$ und der Übergang von η_k zu $-\eta_k$ ändert nichts.

Beispiel 8.3 *Wir betrachten die Gleichung*

$$7.2\,\xi_1^2 + 4.8\,\xi_1\xi_2 + 5.8\,\xi_2^2 - 52.8\,\xi_1 - 67.6\,\xi_2 + 185.8 = 0\,. \tag{8.5}$$

Hier sind

$$A = \begin{bmatrix} 7.2 & 2.4 \\ 2.4 & 5.8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -26.4 \\ -33.8 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma = 185.8\,.$$

Die Eigenwerte der Matrix A *sind* $\lambda_1 = 4$ *und* $\lambda_2 = 9$. *Zugehörige normierte Eigenvektoren sind*

$$b^1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.8 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b^2 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}.$$

Für

$$B = [b^1|b^2] = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

gilt dann $\det B = 1$. *Wir erhalten*

$$p = -B \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} B^T b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

und

$$\beta = \gamma - \frac{d_1^2}{\lambda_1} - \frac{d_2^2}{\lambda_2} = -36\,.$$

Mit $x = B\,y + p$, *d.h.*

$$\xi_1 = 0.6\,\eta_1 + 0.8\,\eta_2 + 2 \quad \text{und} \quad \xi_2 = -0.8\,\eta_1 + 0.6\,\eta_2 + 5\,,$$

ist (8.5) äquivalent zu

$$4\,\eta_1^2 + 9\,\eta_2^2 - 36 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\eta_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{2}\right)^2 = 1\,.$$

Beispiel 8.4 *Für die quadratische Funktion*

$$h(x) = \xi_1^2 - 4\,\xi_1\xi_2 + 4\,\xi_2^2 + \xi_1 - 2\,\xi_2 - 0.25$$

ist

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad 2\,b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma = -0.25\,.$$

Die Eigenwerte der Matrix A *sind* $\lambda_1 = 5$ *und* $\lambda_2 = 0$. *Entsprechende normierte Eigenvektoren sind*

$$b^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir setzen

$$B = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x = B\,y\,,$$

so dass $\det B = 1$ *und*

$$\begin{aligned} h(x) &= 5\,\eta_1^2 + 2\left\langle B^T b, y\right\rangle + \gamma = 5\,\eta_1^2 + \sqrt{5}\eta_1 - 0.25 \\ &= \left(\sqrt{5}\eta_1 + 0.5\right)^2 - 0.5\,. \end{aligned}$$

Die Gleichung $h(x) = 0$ *ist somit äquivalent zu* $\eta_1 = -\dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$, *beschreibt also zwei parallele Geraden.*

8.1 Kurven zweiten Grades (Kegelschnitte)

Im Fall $n = 2$ nennt man die Quadriken **Kurven zweiten Grades**. Es zeigt sich, daß diese sämtlich beim Schneiden eines (doppelten) Kreiskegels oder eines Zylinders (Kegel mit Spitze im Unendlichen) mit einer Ebene entstehen. Nach Satz 8.1 treten die Normalformen

$$\lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \beta = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_1\eta_1^2 + 2\beta\,\eta_2 = 0$$

auf. In der folgenden Tabelle sind alle möglichen Fälle zusammengefaßt. (Man beachte, daß wegen der Voraussetzung rang $A \geq 1$ mindestens ein Eigenwert von Null verschieden ist.)

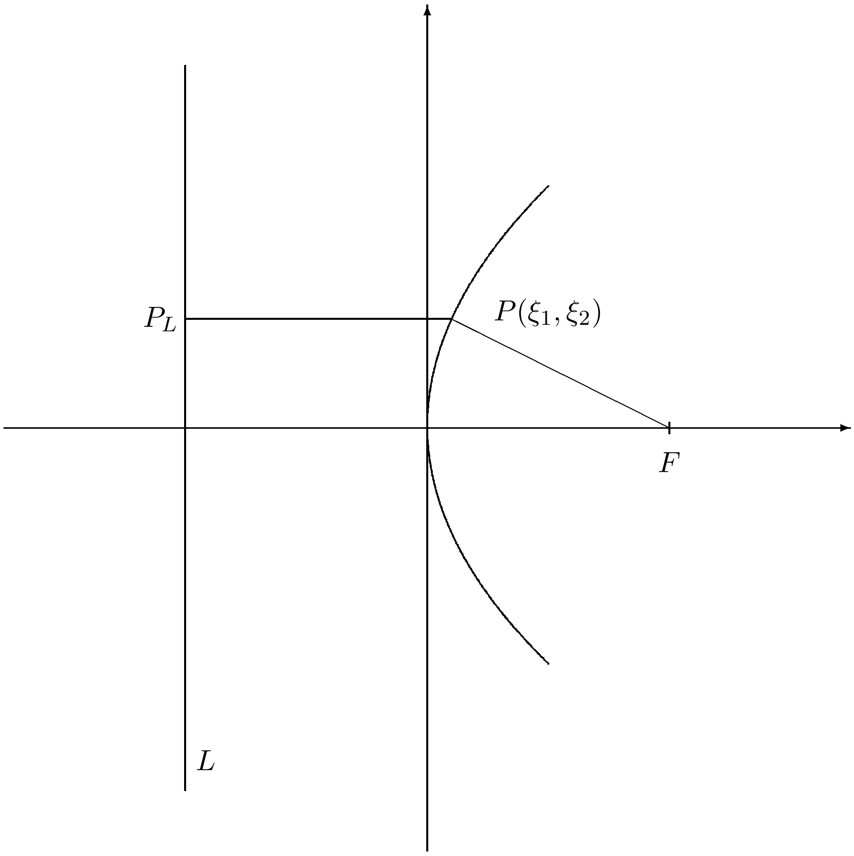
Normalform	Bezeichnung der Quadrik
$\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = 1$	Ellipse mit den Halbachsen a und b
$\frac{\eta_1^2}{a^2} - \frac{\eta_2^2}{b^2} = 1$	Hyperbel mit den Halbachsen a und b
$\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = 0$	ein Punkt
$\frac{\eta_1^2}{a^2} - \frac{\eta_2^2}{b^2} = 0$	zwei sich schneidende Geraden
$\frac{\eta_1^2}{a^2} = 1$	zwei parallele Geraden
$\eta_1^2 = 0$	eine Gerade
$\eta_1^2 + c\,\eta_2 = 0$	Parabel
$\frac{\eta_1^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = -1$	leere Menge
$\frac{\eta_1^2}{a^2} = -1$	leere Menge

Im weiteren gehen wir etwas ausführlicher auf die eigentlichen Kurven zweiten Grades, d.h. Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln, ein.

Die Parabel. Die Scheitelgleichung der Parabel lautet

$$\xi_2^2 = 2\,p\,\xi_1$$

mit dem Halbparameter $p > 0$. Die Leitlinie L ist parallel zur ξ_2-Achse und geht durch den Punkt $(-p/2, 0)$, der Brennpunkt F hat die Koordinaten $(p/2, 0)$.



Für einen Punkt $P(\xi_1, \xi_2)$ der Parabel gilt, dass der Abstand $\dfrac{p}{2} + \xi_1$ von der Leitlinie L gleich dem Abstand

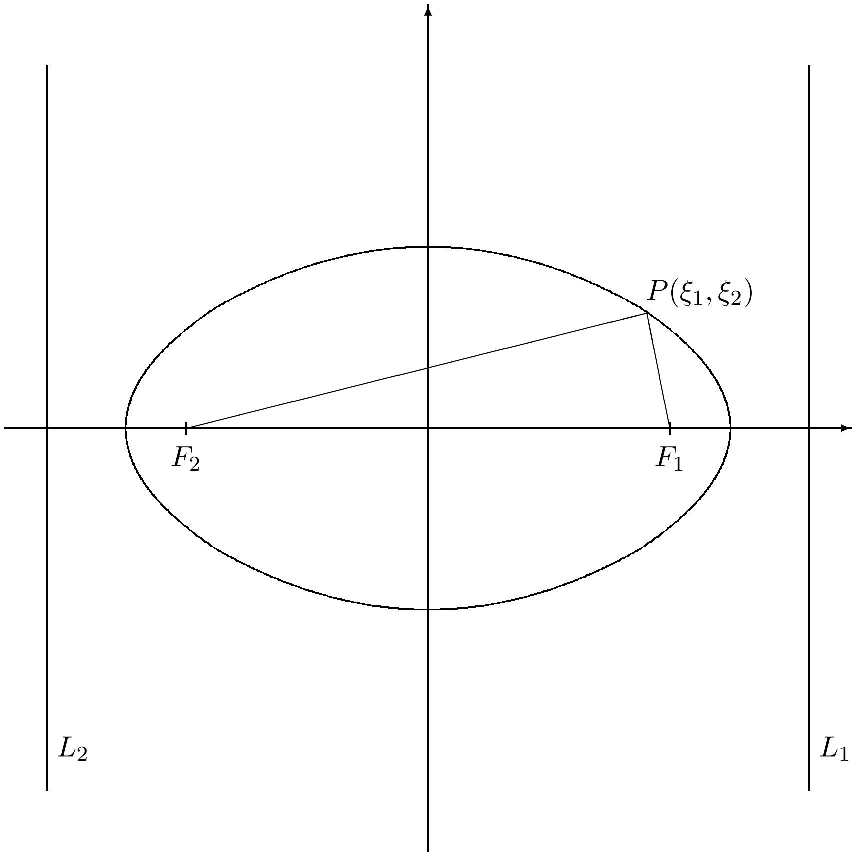
$$\sqrt{\xi_2^2 + \left(\frac{p}{2} - \xi_1\right)^2} = \sqrt{2\,p\,\xi_1 + \left(\frac{p}{2} - \xi_1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} + \xi_1\right)^2} = \frac{p}{2} + \xi_1$$

vom Brennpunkt F ist. D.h., eine Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von der Leitlinie L und dem Brennpunkt F den gleichen Abstand haben.

Es sei P_L der Punkt auf der Leitlinie, für den $P_L P$ parallel zur ξ_1-Achse ist. Dann ist die Mittelsenkrechte von $\overline{P_L F}$ Tangente im Punkt P an die Parabel, da für alle Punkte Q dieser Mittelsenkrechten mit $Q \neq P$ gilt ($Q_L \in L$ und $Q_L Q$ parallel zur ξ_1-Achse):

$$|Q\,Q_L| < |Q\,P_L| = |Q\,F|$$

(beachte, das Dreieck $P\,P_L F$ ist gleichschenklig). Ein solcher Punkt Q kann also nicht zur Parabel gehören. Es folgt: Symmetrieachsenparallele Strahlen werden durch die Parabel zum Brennpunkt hin reflektiert.



Die Ellipse. Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse lautet

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} = 1$$

mit den Längen $a > b > 0$ der großen und kleinen Halbachse. Mit $e := \sqrt{a^2 - b^2}$ bezeichnet man die sogenannte **lineare Exzentrizität** oder **Brennweite** und mit $\varepsilon := e/a$ die sogenannte **numerische Exzentrizität**. Offenbar ist $0 < \varepsilon < 1$. Die Punkte $F_1(e, 0)$ und $F_2(-e, 0)$ heißen Brennpunkte der Ellipse, die Gerade L_1 (ebenso wie L_2) durch den Punkt $(a/\varepsilon, 0)$ (bzw. durch den Punkt $(-a/\varepsilon, 0)$) parallel zur ξ_2-Achse **Leitlinie** der Ellipse. Wir berechnen jetzt das Verhältnis des Abstandes eines Punktes $P(\xi_1, \xi_2)$ der Ellipse vom

Brennpunkt F_1 zum Abstand dieses Punktes von der Leitlinie L_1. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\xi_2^2 + (e-\xi_1)^2}}{\frac{a}{\varepsilon} - \xi_1} &= \frac{\varepsilon\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}\,\xi_1^2 + a^2 - b^2 - 2\,e\,\xi_1 + \xi_1^2}}{a - \varepsilon\,\xi_1} \\
&= \frac{\varepsilon\sqrt{a^2 + \varepsilon^2\xi_1^2 - 2\,a\,\varepsilon\,\xi_1}}{a - \varepsilon\,\xi_1} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Eine Ellipse ist also der geometrische Ort aller Punkte P, für die das Verhältnis des Abstandes $|PF_1|$ vom Brennpunkt F_1 zum Abstand von der Leitlinie L_1 konstant ε ist, wobei $0 < \varepsilon < 1$ gilt.

Für die Summe der beiden Abstände von den Brennpunkten gilt damit

$$|PF_1| + |PF_2| = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - \xi_1 + \xi_1 + \frac{a}{\varepsilon}\right) = 2\,a\,.$$

Somit kann man eine Ellipse auch als den geometrischen Ort aller Punkte beschreiben, deren Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten (den Brennpunkten) konstant $2\,a$ ist.

Es gilt weiter: Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, werden an der Ellipse zum anderen Brennpunkt hin reflektiert.

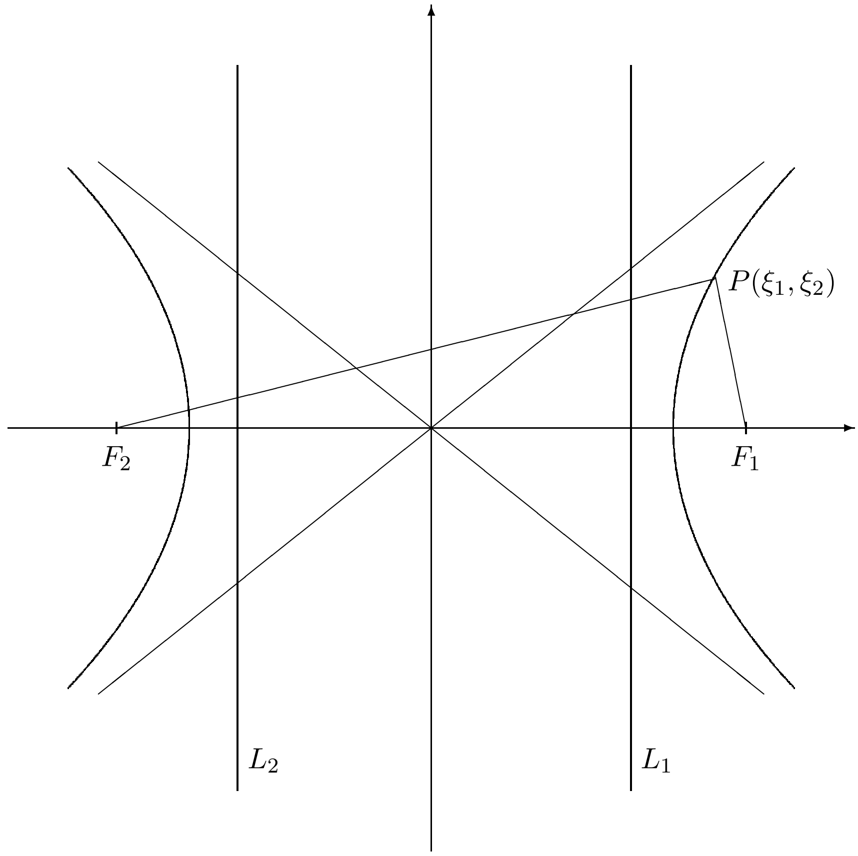
Die Hyperbel. Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel lautet

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} - \frac{\xi_2^2}{b^2} = 1$$

mit $a > b > 0$. Die Leitlinien L_1 und L_2 sind parallel zur ξ_2-Achse und gehen durch die Punkte $(a/\varepsilon, 0)$ bzw. $(-a/\varepsilon, 0)$, wobei

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \quad \text{und} \quad e = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Die Brennpunkte F_j haben die Koordinaten $(e, 0)$ bzw. $(-e, 0)$.



Man erhält auf zum Fall der Ellipse analoge Weise: Eine Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte $P(\xi_1, \xi_2)$, für die das Verhältnis des Abstandes $|PF_j|$ vom Brennpunkt F_j zum Abstand von der zugehörigen Leitlinie L_j $(j = 1, 2)$ einen konstanten Wert $\varepsilon > 1$ hat. Oder: Eine Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte deren (absolute) Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Punkten (den Brennpunkten) konstant $2\,a$ ist.

Aus der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel folgt

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{\xi_1^2}}\,,$$

woraus sich die Gleichungen der beiden Asymptoten der Hyperbel

$$\xi_2 = \pm\frac{b}{a}\,\xi_1$$

ergeben.

8.2 Flächen zweiten Grades

Im Fall $n = 3$ nennt man die Quadriken **Flächen zweiten Grades**. Nach Satz 8.1 sind folgende Normalformen möglich:

$$\lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + \lambda_3 \eta_3^2 + \beta = 0 \tag{8.6}$$

und

$$\lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + 2\beta\, \eta_3 = 0\,. \tag{8.7}$$

Dabei ist wenigstens eine der Zahlen λ_k von Null verschieden.

Wir betrachten an dieser Stelle nochmal den Übergang von der Gleichung

$$\langle A\,x, x\rangle + 2\,\langle b, x\rangle + \gamma = 0 \tag{8.8}$$

zu einer der Normalformen (8.6) oder (8.7) durch die Koordinatentransformation $x = V\,y + p$ mit $V^{-1} = V^T$. Aus (8.8) folgt unter Beachtung von $\langle A\,V\,y, p\rangle = \langle A\,p, V\,y\rangle$

$$\begin{aligned} &\langle A(V\,y + p), V\,y + p\rangle + 2\,\langle b, V\,y + p\rangle + \gamma \\ &= \langle A\,V\,y, V\,y\rangle + \langle A\,V\,y, p\rangle + \langle A\,p, V\,y\rangle + \langle A\,p, p\rangle + 2\,\langle b, V\,y\rangle + 2\,\langle b, p\rangle + \gamma \\ &= \left\langle V^T A\,V\,y, y\right\rangle + 2\left\langle V^T(A\,p + b), y\right\rangle + \langle A\,p, p\rangle + 2\,\langle b, p\rangle + \gamma\,. \end{aligned}$$

Mit $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gilt also

- im Fall (8.6)

  $$V^T A\,V = D\,, \quad A\,p + b = \Theta$$

  und

  $$\langle A\,p, p\rangle + 2\,\langle b, p\rangle + \gamma = \langle b, p\rangle + \gamma = \beta\,,$$

- im Fall (8.7)

  $$V^T A\,V = D, \quad V^T(A\,p + b) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

  und

  $$\langle A\,p, p\rangle + 2\,\langle b, p\rangle + \gamma = 0\,.$$

Aus diesen Beziehungen folgt im Fall (8.6)

$$\begin{bmatrix} V^T & \Theta \\ p^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & p \\ \Theta^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^T & \Theta \\ p^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AV & \Theta \\ b^T V & \langle b, p\rangle + \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} D & \Theta \\ (p^T A + b^T)V & \langle b, p\rangle + \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \Theta \\ \Theta^T & \beta \end{bmatrix}$$

und analog im Fall (8.7)

$$\begin{bmatrix} V^T & \Theta \\ p^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & p \\ \Theta^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & D & & 0 \\ & & & \beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Ordnet man also der Gleichung (8.8) die Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & \gamma \end{bmatrix} \tag{8.9}$$

zu, so kann der Übergang von (8.8) zu (8.6) bzw. (8.7) durch

$$\mathcal{W}^T \mathcal{A} \mathcal{W} = \widetilde{\mathcal{A}}$$

mit

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} V & p \\ \Theta^T & 1 \end{bmatrix}$$

beschrieben werden, wobei $\widetilde{\mathcal{A}}$ die (8.9) entsprechende Matrix zu den Normalformen (8.6) bzw. (8.7) ist. Da $\mathcal{W}$ eine reguläre Matrix ist, sind der Rang von $\mathcal{A}$ und $\widetilde{\mathcal{A}}$ gleich, und der Rang der Matrix $\mathcal{A}$ kann als Hilfsmittel zur Bestimmung des Flächentyps verwendet werden (siehe folgende Tabelle).

Normalform	Flächentyp	rang $\mathcal{A}$	rang A
$\frac{\eta_1^2}{a^2}+\frac{\eta_2^2}{b^2}+\frac{\eta_3^2}{c^2}=1$	Ellipsoid	4	3
$\frac{\eta_1^2}{a^2}+\frac{\eta_2^2}{b^2}-\frac{\eta_3^2}{c^2}=1$	einschaliges Hyperboloid	4	3
$-\frac{\eta_1^2}{a^2}-\frac{\eta_2^2}{b^2}+\frac{\eta_3^2}{c^2}=1$	zweischaliges Hyperboloid	4	3
$\frac{\eta_1^2}{a^2}+\frac{\eta_2^2}{b^2}=\eta_3$	elliptisches Paraboloid	4	2
$\frac{\eta_1^2}{a^2}-\frac{\eta_2^2}{b^2}=\eta_3$	hyperbolisches Paraboloid (Sattel)	4	2
$\frac{\eta_1^2}{a^2}+\frac{\eta_2^2}{b^2}-\frac{\eta_3^2}{c^2}=0$	elliptischer Kegel	3	3
$\frac{\eta_1^2}{a^2}+\frac{\eta_2^2}{b^2}+\frac{\eta_3^2}{c^2}=0$	Punkt	3	3
$\frac{\eta_1^2}{a^2}+\frac{\eta_2^2}{b^2}=1$	elliptischer Zylinder	3	2
$\frac{\eta_1^2}{a^2}-\frac{\eta_2^2}{b^2}=1$	hyperbolischer Zylinder	3	2
$\eta_1^2=2\alpha\,\eta_3\ (\alpha\neq 0)$	parabolischer Zylinder	3	1
$\frac{\eta_1^2}{a^2}-\frac{\eta_2^2}{b^2}=0$	zwei sich schneidende Ebenen	2	2
$\frac{\eta_1^2}{a^2}+\frac{\eta_2^2}{b^2}=0$	eine Gerade	2	2
$\eta_1^2=a^2$	zwei parallele Ebenen	2	1
$\eta_1^2=0$	eine Ebene	1	1
sonst	leere Menge		

Beispiel 8.5 *Wir betrachten die Gleichung*

$$5\,\xi_1^2+8\,\xi_2^2+5\,\xi_3^2+4\,\xi_1\xi_2+8\,\xi_1\xi_3-4\,\xi_2\xi_3-10\,\xi_1-4\,\xi_2-8\,\xi_3+\frac{11}{4}=0\,. \tag{8.10}$$

Wir haben also

$$A=\begin{bmatrix}5&2&4\\2&8&-2\\4&-2&5\end{bmatrix}\quad\text{und}\quad \mathcal{A}=\begin{bmatrix}5&2&4&-5\\2&8&-2&-2\\4&-2&5&-4\\-5&-2&-4&\frac{11}{4}\end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1=0$ und $\lambda_2=\lambda_3=9$, ein dazugehöriges orthonormales System von Eigenvektoren ist gegeben durch

$$b^1=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix},\quad b^2=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\quad\text{und}\quad b^3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Mit der Transformation

$$x = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} z$$

ergibt sich die zu (8.10) äquivalente Gleichung

$$9\,\zeta_2^2 + 9\,\zeta_3^2 + 6\,\zeta_2 - 12\,\zeta_3 + \frac{11}{4} = 9\left(\zeta_2 + \frac{1}{3}\right)^2 + 9\left(\zeta_3 - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0\,,$$

also mit $\eta_2 = \zeta_2 + \frac{1}{3}$ *und* $\eta_3 = \zeta_3 - \frac{2}{3}$

$$\eta_2^2 + \eta_3^2 = \frac{1}{4}\,,$$

d.h. Gleichung (8.10) beschreibt einen Kreiszylinder.

Beispiel 8.6 *Man bestimme den Typ der durch*

$$h(x) := 2\,\xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 + 2\,\xi_1\xi_2 - 6\,\xi_1\xi_3 + 4\,\xi_2\xi_3 - 2\,\xi_1 + 10\,\xi_3 + 5 = 0 \tag{8.11}$$

gegebenen Fläche zweiten Grades.

Lösung: Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ist gleich

$$p_A(\lambda) = -(\lambda^3 - 2\,\lambda^2 - 15\,\lambda + 14) =: -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)\,,$$

woraus

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -14 \quad \text{und} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$$

folgt. Die Matrix A hat also zwei positive und einen negativen Eigenwert. Es sei p die Lösung der Gleichung

$$A\,p + b = \Theta\,, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Wir setzen $x = z + p$. Es folgt

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h(z+p) = \langle A\,z, z\rangle + \langle b, p\rangle + 5 \quad \text{und} \quad \langle b, p\rangle = -5\,.$$

Also ist (8.11) äquivalent zu $\langle A\,z, z\rangle = 0$, *und die Hauptachsentransformation* $z = V\,y$ *liefert*

$$\lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \lambda_3\eta_3^2 = 0\,.$$

Gleichung (8.11) beschreibt also einen elliptischen Kegel.

Klassifizierung der (eigentlichen) Flächen zweiten Grades:

Man geht von einer ausgezeichneten Hauptachse aus. Falls eine solche nicht existiert, ist es gleichgültig, welche man wählt. Die substantivische Bezeichnung der Fläche erfolgt nach den Schnittkurven, die bei einem ebenen Schnitt parallel zu dieser ausgezeichneten Achse entstehen (Ellipsoid, Paraboloid, Hyperboloid). Ein eventuell notwendiges Adjektiv richtet sich nach den ebenen Schnitten senkrecht zur ausgezeichneten Achse (elliptisch, hyperbolisch; parabolisch ist nicht erforderlich). Die Hyperboloide werden nach ein- und zweischaligen unterschieden.

Im weiteren ein paar nähere Betrachtungen zu den eigentlichen Flächen zweiten Grades:

Das **Ellipsoid** hat als Normalform die Gleichung

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} + \frac{\xi_3^2}{c^2} = 1$$

mit den drei Halbachsenlängen a, b und c. Sind wenigstens zwei dieser Längen gleich, so liegt ein Rotationsellipsoid vor. Jeder ebene Schnitt durch das Ellipsoid liefert eine Ellipse. Jede Sehne durch den Nullpunkt wird von diesem halbiert, das Ellipsoid ist eine Mittelpunktsfläche.

Das **einschalige Hyperboloid** hat die Normalgleichung

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} - \frac{\xi_3^2}{c^2} = 1\,. \tag{8.12}$$

Dabei sind a und b die Längen der Halbachsen der Ellipse, die von der ξ_1-ξ_2-Ebene aus dem Hyperboloid herausgeschnitten wird, und b und c sind die Längen der Halbachsen der Hyperbel, die von der ξ_2-ξ_3-Ebene aus dem Hyperboloid geschnitten wird. Im Fall $a = b$ haben wir ein einschaliges Rotationshyperboloid. Jeder ebene Schnitt parallel zur ξ_3-Achse liefert eine Hyperbel, jeder ebene Schnitt senkrecht zur ξ_3-Achse eine Ellipse. Der Nullpunkt ist Mittelpunkt des Hyperboloides. Schreibt man (8.12) in der Form

$$\left(\frac{\xi_1}{a} + \frac{\xi_3}{c}\right)\left(\frac{\xi_1}{a} - \frac{\xi_3}{c}\right) = \left(1 + \frac{\xi_2}{b}\right)\left(1 - \frac{\xi_2}{b}\right)$$

und definiert

$$u := \frac{1 - \dfrac{\xi_2}{b}}{\dfrac{\xi_1}{a} - \dfrac{\xi_3}{c}} \quad \text{sowie} \quad v := \frac{1 + \dfrac{\xi_2}{b}}{\dfrac{\xi_1}{a} + \dfrac{\xi_3}{c}}\,,$$

so kann man (8.12) als zwei Paare von Gleichungen schreiben:

1. $\frac{\xi_1}{a} + \frac{\xi_3}{c} = u\left(1 + \frac{\xi_2}{b}\right)\,, \quad \frac{\xi_1}{a} - \frac{\xi_3}{c} = \frac{1}{u}\left(1 - \frac{\xi_2}{b}\right)\,,$
2. $\frac{\xi_1}{a} + \frac{\xi_3}{c} = v\left(1 - \frac{\xi_2}{b}\right)\,, \quad \frac{\xi_1}{a} - \frac{\xi_3}{c} = \frac{1}{v}\left(1 + \frac{\xi_2}{b}\right)\,,$

Jedes Gleichungspaar beschreibt eine Geradenschar, die Erzeugenden des einschaligen Hyperboloides, das aus diesem Grund auch Regelfläche heißt (hyperbolische Zahnräder). Verschiebt man die Erzeugenden parallel in den Nullpunkt, so entsteht der Asymptotenkegel, dessen Gleichung

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} - \frac{\xi_3^2}{c^2} = 0 \tag{8.13}$$

lautet.

Das **zweischalige Hyperboloid** wird durch die Normalgleichung

$$-\frac{\xi_1^2}{a^2} - \frac{\xi_2}{b^2} + \frac{\xi_3^2}{c^2} = 1$$

beschrieben. Hier sind a und b die Längen der Halbachsen der Ellipsen, die von den Ebenen $\xi_3 = \pm c\sqrt{2}$ aus dem Hyperboloid geschnitten werden. Im Fall $a = b$ liegt ein zweischaliges Rotationshyperboloid vor. Jeder ebene Schnitt parallel zur ξ_3-Achse liefert eine Hyperbel, jeder ebene Schnitt senkrecht zur ξ_3-Achse für $|\xi_3| > c$ eine Ellipse. Diese Fläche ist nicht zusammenhängend. Der Nullpunkt ist Mittelpunkt. Der Kegel mit der Gleichung (8.13) ist auch hier Asymptotenkegel.

Beim **elliptischen Paraboloid** mit der Normalgleichung

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} - \xi_3 = 0$$

ist die ξ_3-Achse ausgezeichnet. Jeder ebene Schnitt parallel zu dieser Achse ist eine Parabel, jeder ebene Schnitt senkrecht zur ξ_3-Achse eine Ellipse. Die Zahlen a und b sind die Längen der Halbachsen der Ellipse, die beim Schnitt mit der Ebene $\xi_3 = 1$ entsteht. Ist $a = b$, so liegt ein Rotationsparaboloid vor. Der Nullpunkt heißt Scheitel des Paraboloides.

Wir betrachten das **hyperbolische Paraboloid** mit der Normalgleichung

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} - \frac{\xi_2^2}{b^2} - \xi_3 = 0\,. \tag{8.14}$$

Auch hier ist die ξ_3-Achse ausgezeichnet, und a und b sind die Halbachsen der Hyperbel, die beim Schnitt mit der Ebene $\xi_3 = 1$ entsteht. Die ξ_1-ξ_2-Ebene schneidet zwei Geraden

$$\frac{\xi_1}{a} + \frac{\xi_2}{b} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\xi_1}{a} - \frac{\xi_2}{b} = 0$$

aus dem Paraboloid, die man Scheitelgeraden nennt. Die Ebenen, die eine Scheitelgerade und die ξ_3-Achse enthalten, heißen Richtebenen. Sie schneiden aus den Ebenen senkrecht zur ξ_3-Achse die Asymptoten der entsprechenden Schnitthyperbeln aus. Der Nullpunkt ist Sattelpunkt und heißt Scheitel des Paraboloides. Ein hyperbolisches Paraboloid entsteht, wenn man eine nach unten geöffnete Parabel längs einer nach oben geöffneten Parabel verschiebt. Deshalb ist das hyperbolische Paraboloid eine sogenannte Schiebefläche.

Wie beim einschaligen Hyperboloid kann man auch hier zwei Scharen von erzeugenden Geraden angeben. Dazu schreibt man (8.14) in der Form

$$\left(\frac{\xi_1}{a}+\frac{\xi_2}{b}\right)\left(\frac{\xi_1}{a}-\frac{\xi_2}{b}\right)=\xi_3$$

und definiert

$$u:=\frac{\xi_3}{\frac{\xi_1}{a}-\frac{\xi_2}{b}} \quad \text{und} \quad v:=\frac{1}{\frac{\xi_1}{a}-\frac{\xi_2}{b}}\,.$$

Jetzt kann man (8.14) als zwei Paare von Gleichungen schreiben:

1. $\frac{\xi_1}{a}+\frac{\xi_2}{b}=u\,, \quad \frac{\xi_1}{a}-\frac{\xi_2}{b}=\frac{z}{u}$
2. $\frac{\xi_1}{a}+\frac{\xi_2}{b}=v\,\xi_3\,, \quad \frac{\xi_1}{a}-\frac{\xi_2}{b}=\frac{1}{v}$

Jedes Paar beschreibt wieder eine Schar von Geraden. Also ist auch das hyperbolische Paraboloid eine Regelfläche.

8.3 Übungsaufgaben

1. Geben Sie die Gleichungen folgender Parabeln an:

   (a) $\xi_2=\xi_1^2$ gedreht um π,

   (b) $\xi_2=\xi_1^2$ gedreht um $\frac{\pi}{4}$ (im mathematisch positiven Sinn),

   (c) **(HA)** $\xi_2=\xi_1^2$ verschoben um -1 in ξ_1-Richtung und um -2 in ξ_2-Richtung.

2. Klassifizieren Sie folgende Kurven 2. Grades mittels Hauptachsentransformation:

   (a) $\xi_1\xi_2-4\xi_1+2\xi_2-4=0\,,$

   (b) $\xi_1^2-4\xi_1\xi_2+4\xi_2^2+\xi_1-2\xi_2=0\,.$

   (HA) Ermitteln Sie gegebenenfalls die Leitlinien und Asymptoten!

3. Klassifizieren Sie folgende Kurven oder Flächen 2. Grades:

   (a) $2\xi_1^2-\xi_2^2+\xi_3^2+2\xi_1\xi_2-6\xi_1\xi_3+4\xi_2\xi_3-2\xi_1+10\xi_3+5=0\,,$

   (b) **(HA)** $\xi_1^2-4\xi_1\xi_2+3\xi_2^2+2\xi_1-8\xi_2-4=0\,,$

(c) $3\xi_1\xi_2 + 4\xi_1 - 2\xi_2 - \frac{8}{3} = 0\,,$

(d) **(HA)** $\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_2^2 + 2\xi_1\xi_3 - 4\xi_2\xi_3 + 4\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0\,.$

4. **(HA)** In einem kartesischen (ξ_1, ξ_2, ξ_3)-Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die beiden Kugeln K_1 und K_2 durch

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 4 = 0\,, \quad \xi_1^2 + (\xi_2 - 4)^2 + \xi_3^2 - 6 = 0$$

gegeben. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

K_1 und K_2

(a) haben einen Schnittkreis,

(b) berühren sich von außen,

(c) berühren sich von innen,

(d) haben keine gemeinsamen Punkte.

(Z) In einem (ξ_1, ξ_2)-Koordinatensysten des $\mathbb{R}^2$ sind die Geraden

$$g_1 : 2\xi_1 + \xi_2 - 1 = 0\,, \quad g_2 : \xi_1 - 3\xi_2 = 0\,, \quad g_3 : \xi_2 + 1 = 0$$

gegeben. Man ermittle die Gleichung der Hyperbel H mit den Asymptoten g_1 und g_2 , die die Gerade g_3 berührt.

Kapitel 9

Die Jordansche Normalform und die matrixwertige Exponentialfunktion

Wir erinnern uns daran, dass in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension n mit einer gegebenen Basis $\{b^1, \ldots, b^n\}$ eine lineare Abbildung $f \in L(V)$ durch ihre Matrixdarstellung $A = [\alpha_{jk}]_{j,k=1}^n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ bezüglich dieser Basis charakterisiert ist. Dabei gilt

$$f(b^k) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} b^j \,, \quad k = 1, \ldots, n \,,$$

und

$$f\left(\sum_{k=1}^n \xi_k b^k\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{jk}\xi_k\right) b^j \,.$$

Das charakteristische Polynom

$$p_f(t) = p_A(t) = \det(A - tI)$$

ist dabei unabhängig von der gewählten Basis und der damit verbundenen Matrixdarstellung A der linearen Abbildung f.

9.1 Die Jordansche Normalform

Es sei λ ein Eigenwert von $f \in L(V)$, wobei $\dim V = n$ gelte. Mit V_λ bezeichnen wir den sog. **verallgemeinerten Eigenunterraum** von f zum Eigenwert λ,

$$V_\lambda = \Big\{x \in V : \exists m \in \{1, 2, \ldots\} \text{ mit } (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^m(x) = \Theta\Big\} .$$

Offenbar gilt $E_\lambda \subset V_\lambda$. Im weiteren schreiben wir für $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ kurz $f - \lambda$. Hier nun einige Eigenschaften eines verallgemeinerten Eigenunterraumes:

(a) V_λ ist ein linearer Unterraum von V, d.h. aus $x, y \in V_\lambda$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ folgt $\alpha\, x + \beta\, y \in V_\lambda$. Sind nämlich $(f-\lambda)^{m_1}(x) = \Theta$ und $(f-\lambda)^{m_2}(y) = \Theta$, so ist mit $m = \max\{m_1, m_2\}$ auch

$$(f-\lambda)^m(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha(f-\lambda)^m(x) + \beta(f-\lambda)^m(y) = \Theta\,.$$

(b) V_λ ist invariant bezüglich der linearen Abbildung f, d.h. es gilt $f(x) \in V_\lambda$ für jedes $x \in V_\lambda$ (also $f(V_\lambda) \subset V_\lambda$). Ist nämlich $(f-\lambda)^m(x) = \Theta$, so folgt

$$(f-\lambda)^m(f(x)) = f(f-\lambda)^m(x) = \Theta\,.$$

(c) Sind $b \in V_\lambda$, $b^i := (f-\lambda)^i(b) \neq \Theta$, $i = 0, \ldots, m-1$, und $b^m := (f-\lambda)^m(b) = \Theta$, so ist das System $\{b^0, \ldots, b^{m-1}\}$ linear unabhängig. Aus

$$\alpha_0 b^0 + \cdots + \alpha_{m-1} b^{m-1} = \Theta$$

folgt nämlich

$$\Theta = (f-\lambda)^{m-1}(\alpha_0 b^0 + \cdots + \alpha_{m-1} b^{m-1}) = \alpha_0 b^{m-1}\,,$$

d.h. $\alpha_0 = 0$. Das liefert

$$\Theta = (f-\lambda)^{m-2}(\alpha_1 b^1 + \cdots + \alpha_{m-1} b^{m-1}) = \alpha_1 b^{m-1}\,,$$

also $\alpha_1 = 0$, usw. usf.

(d) Aus $x \in V_\lambda$ folgt wegen (c) stets $(f-\lambda)^n(x) = \Theta$.

Nun einige weitere allgemeine Überlegungen, die uns auf die Jordansche Normalform der Matrixdarstellung einer linearen Abbildung führen. Und zwar betrachten wir vorerst den Fall, dass f nur einen Eigenwert λ (der algebraischen Vielfachheit n) hat, d.h. es gilt

$$p_f(t) = (\lambda - t)^n = (-1)^n (t-\lambda)^n\,.$$

1° Nach dem Satz von Cayley-Hamilton (Satz 7.8) gilt $(f-\lambda)^n = \Theta$, d.h. $V_\lambda = V$. Es sei m_1, $1 \le m_1 \le n$, die kleinste ganze Zahl mit der Eigenschaft $(f-\lambda)^{m_1} = \Theta$. Dann ist $U := (f-\lambda)^{m_1-1}(V) \neq \{\Theta\}$, und für jedes $x \in U$ existiert ein $y \in V$, so dass $x = (f-\lambda)^{m_1-1}(y)$ und somit $(f-\lambda)(x) = \Theta$ gilt. Es ist also $U \subset E_\lambda = \ker(f-\lambda)$.

2° Es sei

$$\left\{(f-\lambda)^{m_1-1}(d^1), \ldots, (f-\lambda)^{m_1-1}(d^{k_1})\right\}$$

eine Basis in U. Wir definieren

$$d^{j,i} := (f-\lambda)^{m_1-i}(d^j)\,, \quad i = 1, \ldots, m_1\,,\ j = 1, \ldots, k_1\,.$$

Nach (c) ist jedes einzelne System

$$D_j := \left\{d^{j,1}, \ldots, d^{j,m_1}\right\}\,, \quad j = 1, \ldots, k_1\,,$$

linear unabhängig. Dabei gilt

$$\begin{aligned} f(d^{j,i}) &= f(f-\lambda)^{m_1-i}(d^j) \\ &= (f-\lambda)^{m_1-(i-1)}(d^j) + \lambda(f-\lambda)^{m_1-i}(d^j) \\ &= d^{j,i-1} + \lambda\, d^{j,i}\,, \quad i = 1,\ldots,m_1\,, \end{aligned}$$

mit $d^{j,0} := \Theta$. Setzen wir also $U_j := \mathcal{L}[D_j]$, so gilt $f(U_j) \subset U_j$, und $f|_{U_j}$ besitzt in der Basis D_j die Matrixdarstellung

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \Theta \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \Theta & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_1\times m_1}\,.$$

3° Das System $\widetilde{D}_1 := D_1 \cup \cdots \cup D_{k_1}$ ist linear unabhängig, denn aus

$$\sum_{j=1}^{k_1}\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_{j,i} d^{j,i} = 0$$

folgt durch Anwendung von $(f-\lambda)^{m_1-1}$ wegen

$$(f-\lambda)^{m_1-1}(d^{j,i}) = (f-\lambda)^{2m_1-i-1}(d^j) = \Theta\,, \quad i = 1,\ldots,m_1-1\,,$$

die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{k_1} \alpha_{j,m_1}(f-\lambda)^{m_1-1}(d^j) = \Theta\,,$$

also $\alpha_{j,m_1} = 0$, $j = 1,\ldots,k_1$, usw. usf. Somit ist $V_\lambda^1 := \mathcal{L}[\widetilde{D}_1]$ ein $k_1 \cdot m_1$–dimensionaler Unterraum von V mit $f(V_\lambda^1) \subset V_\lambda^1$. Die Matrixdarstellung von $f|_{V_\lambda^1}$ besteht aus k_1 Jordanmatrizen $J_{m_1}(\lambda)$ entlang der Hauptdiagonalen, wobei

$$J_m(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \Theta \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \Theta & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times m}\,.$$

4° Ist $V_\lambda^1 \neq V$, so gibt es eine größte ganze Zahl m_2, $1 \leq m_2 < m_1$, mit der Eigenschaft

$$(f-\lambda)^{m_2-1}(V_\lambda^1) \neq (f-\lambda)^{m_2-1}(V)\,,$$

denn es ist stets $(f-\lambda)^{m_2-1}(V_\lambda^1) \subset (f-\lambda)^{m_2-1}(V)$ und, wegen

$$\begin{aligned}(f-\lambda)^{m_1-1}(V) &= U = \mathcal{L}[\{(f-\lambda)^{m_1-1}(d^1), \ldots, (f-\lambda)^{m_1-1}(d^{k_1})\}] \\ &\subset (f-\lambda)^{m_1-1}(V_\lambda^1),\end{aligned}$$

$(f-\lambda)^{m_1-1}(V_\lambda^1) = (f-\lambda)^{m_1-1}(V)$. Wie in **3°** zeigt man unter Verwendung der Beziehung $(f-\lambda)^{m_2-1}(d^{j,i}) = (f-\lambda)^{m_2-1+m_1-i}(d^j)$, dass das System

$$\{(f-\lambda)^{m_2-1}(d_{j,i}) : 1 \le j \le k_1,\ m_2 \le i \le m_1\}$$

linear unabhängig und somit eine Basis in $(f-\lambda)^{m_2-1}(V_\lambda^1)$ ist. Wir ergänzen diese zu einer Basis in $(f-\lambda)^{m_2-1}(V)$ durch

$$(f-\lambda)^{m_2-1}(\widetilde{d}^{k_1+j}), \quad j = 1, \ldots, k_2\,.$$

Aus $(f-\lambda)^{m_2}(V_\lambda^1) = (f-\lambda)^{m_2}(V)$ folgt

$$(f-\lambda)^{m_2}(\widetilde{d}^{k_1+j}) = \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{i=m_2+1}^{m_1} \beta_{k,i}^{(j)} (f-\lambda)^{m_2}(d^{k,i})\,.$$

Wir setzen

$$d^{k_1+j} := \widetilde{d}^{k_1+j} - \sum_{k=1}^{k_1} \sum_{i=m_2+1}^{m_1} \beta_{k,i}^{(j)} d^{k,i}\,.$$

Dann ist auch $(f-\lambda)^{m_2-1}(d^{k_1+j})$, $j = 1, \ldots, k_2$, eine Ergänzung zu einer Basis im Raum $(f-\lambda)^{m_2-1}(V)$, und es gilt außerdem

$$(f-\lambda)^{m_2}(d^{k_1+j}) = \Theta\,, \quad j = 1, \ldots, k_2\,.$$

Wie in **2°** definieren wir nun

$$d^{k_1+j,i} := (f-\lambda)^{m_2-i}(d^{k_1+j})\,, \quad i = 1, \ldots, m_2\,,$$

und die Mengen

$$D_{k_1+j} := \{d^{k_1+j,1}, \ldots, d^{k_1+j,m_2}\}$$

sowie die linearen Unterräume $U_{k_1+j} := \mathcal{L}[D_{k_1+j}]$. Die lineare Abbildung $f|_{U_{k_1+j}}$ hat bezüglich der Basis D_{k_1+j} die Matrixdarstellung $J_{m_2}(\lambda)$. Wir setzen $V_\lambda^2 := \mathcal{L}[\widetilde{D}_2]$ mit $\widetilde{D}_2 = D_{k_1+1} \cup \cdots \cup D_{k_1+k_2}$.

5° Setzt man diesen Prozeß fort, so erhält man eine Zerlegung des Raumes V in eine direkte Summe $V = V_\lambda^1 \oplus V_\lambda^2 \oplus \cdots \oplus V_\lambda^p$. Dabei entstehen zwei p–Tupel ganzer positiver Zahlen m_i und k_i mit $m_1 > m_2 > \cdots > m_p \ge 1$ und $k_1 m_1 + \cdots + k_p m_p = n$. Die Matrixdarstellung der linearen Abbildung f in der Basis $\widetilde{D}_1 \cup \cdots \cup \widetilde{D}_p$ besteht aus Jordankästchen (mit dem Parameter λ) entlang der Hauptdiagonalen. In den Spezialfällen $m_1 = n$ ($\Rightarrow k_1 = 1$ und $p = 1$) bzw. $k_1 = n$ ($\Rightarrow m_1 = 1$ und $p = 1$) ist diese Matrixdarstellung gleich $J_n(\lambda)$ bzw. λI.

Wir erhalten das folgende Resultat.

Lemma 9.1 *Die lineare Abbildung* $f \in L(V)$ *im* n*-dimensionalen Raum* V *besitze nur einen Eigenwert* λ. *Dann existiert eine Basis* B *in* V, *so dass die Matrixdarstellung von* f *in der Basis* B *aus* r *Jordanmatrizen* $J_{q_j}(\lambda)$, $j = 1, \ldots, r$, *längs der Diagonalen besteht. Dabei gilt* $q_1 + \cdots + q_r = n$, *und wir können* $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_r$ *annehmen.*

Um die vorangegangenen allgemeinen Überlegungen besser verstehen zu können, betrachten wir das folgende einfache Beispiel.

Beispiel 9.2 *Wir untersuchen die lineare Abbildung* $f \in L(\mathbb{C}^3)$, *die in der kanonischen Basis* $\{e^1, e^2, e^3\}$ *durch die Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

gegeben ist. Es gilt

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (A - \lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D.h., es ist $m_1 = 3$. *Ferner gilt*

$$(A - \lambda I)^2(\mathbb{C}^3) = \mathcal{L}[\{e^1\}] = \mathcal{L}[\{(A - \lambda I)^2 e^3\}].$$

Wir haben also

$$d^1 = e^3, \; d^{1,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; d^{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; d^{1,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und

$$A\, d^{1,1} = \lambda\, d^{1,1}, \; A\, d^{1,2} = \lambda\, d^{1,2} + d^{1,1}, \; A\, d^{1,3} = \lambda\, d^{1,3} + d^{1,2}.$$

Die lineare Abbildung f *besitzt also in der Basis* $\{d^{1,1}, d^{1,2}, d^{1,3}\}$ *die Matrixdarstellung* $J_3(\lambda)$.

Satz 9.3 *Es sei* $p_f(t) = (-1)^n (t - \mu_1)^{m_1} (t - \mu_2)^{m_2} \cdots (t - \mu_r)^{m_r}$ *mit paarweise verschiedenen* μ_j, $j = 1, \ldots, r$. *Dann gilt* $V = V_{\mu_1} \oplus V_{\mu_2} \oplus \cdots \oplus V_{\mu_r}$.

Satz 9.4 *Es seien* $f \in L(V)$, $\dim V = n$ *und* $p_f(t) = (-1)^n (t - \mu_1)^{m_1} \cdots (t - \mu_r)^{m_r}$ *mit paarweise verschiedenen* μ_i. *Dann existiert eine Basis in* V, *in der* f *die Matrixdarstellung*

$$\operatorname{diag}[A(\mu_1), \ldots, A(\mu_r)]$$

besitzt, wobei $A(\mu_i)$ *die im Lemma 9.1 beschriebene Matrixdarstellung der linearen Abbildung* $f|_{V_{\mu_i}} \in L(V_{\mu_i})$ *ist.*

9.2 Zur praktischen Durchführung der Transformation auf Jordansche Normalform

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ein Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ heißt **Hauptvektor** k-ter Stufe zum Eigenwert λ von A, wenn $(A - \lambda I)^k x = \Theta$ und $(A - \lambda I)^{k-1} x \neq \Theta$ gilt. Eine endliche Folge von Hauptvektoren $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ der Stufen $1, \ldots, m$ zum Eigenwert λ heißt **Kette** von Hauptvektoren, wenn

$$(A - \lambda I)\, x^{(j)} = x^{(j-1)}\,, \quad j = 1, \ldots, m\,,$$

mit $x^{(0)} = \Theta$ gilt und die Gleichung

$$(A - \lambda I)\, x = x^{(m)}$$

keine Lösung $x \in \mathbb{C}^n$ besitzt.

Es sei nun

$$T^{-1} A\, T = \operatorname{diag}\, [J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_s}(\lambda_s)] =: J\,.$$

Wir schreiben T in der Form

$$T = \left[x_1^{(1)} | \cdots | x_1^{(n_1)} | \cdots | x_s^{(1)} | \cdots | x_s^{(n_s)} \right]$$

und erhalten aus $A\, T = T\, J$

$$\left[A\, x_1^{(1)} | A\, x_1^{(2)} | \cdots | A\, x_1^{(n_1)} | \cdots | \cdots | A\, x_s^{(n_s)} \right]$$

$$= \left[\lambda_1 x_1^{(1)} | \lambda_1 x_1^{(2)} + x_1^{(1)} | \cdots | \lambda_1 x_1^{(n_1)} + x_1^{(n_1-1)} | \cdots | \lambda_s x_s^{(n_s)} + x_s^{(n_s-1)} \right]\,,$$

also

$$(A - \lambda_k I) x_k^{(j)} = x_k^{(j-1)}\,, \quad j = 1, \ldots, n_k\,,\ k = 1, \ldots, s\,,$$

mit $x_k^{(0)} = \Theta$. Es sei $x \in \mathbb{C}^n$ eine Lösung der Gleichung

$$(A - \lambda_k I) x = x_k^{(n_k)}\,. \tag{9.1}$$

Mit $y = T^{-1} x$ folgt

$$T^{-1}(A - \lambda_k I) T\, y = (J - \lambda_k I) y = T^{-1} x_k^{(n_k)} = e^{n_1 + \cdots + n_k}\,.$$

Die $(n_1 + \cdots + n_k)$–te Zeile der Matrix $J - \lambda_k I$ besteht aber nur aus Nullen, so dass die Gleichung (9.1) keine Lösung besitzen kann. Also sind die Ketten $x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n_k)}$, $k = 1, \ldots, s$, nicht verlängerbar. Dies bedeutet, daß die Transformationsmatrix T aus s Ketten von Hauptvektoren der Längen n_k, $k = 1, \ldots, s$, besteht. Somit gelangen wir zu dem folgenden Algorithmus zur Durchführung der Transformation auf Jordansche Normalform.

1. Schritt. Berechnung der Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_r$ der Matrix A mit den entsprechenden algebraischen Vielfachheiten $m_1, \dots, m_r$.

2. Schritt. Bestimmung einer Basis $B_i^{(1)} = \{b_{i,1}^{(1)}, \dots, b_{i,s_{i1}}^{(1)}\}$ im Eigenunterraum

$$E_{\mu_i} = \ker(A - \mu_i I), \quad i = 1, \dots, r,$$

d.h. die $b_{i,j}^{(1)}$, $j = 1, \dots, s_{i1}$, sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert μ_i . Ist $s_{i1} = m_i$, so sind die Berechnungen für den Eigenwert μ_i abgeschlossen.

3. Schritt. Bestimmung einer maximalen Anzahl von Lösungen $b_{i,1}^{(2)}, \dots, b_{i,s_{i2}}^{(2)}$ der Gleichung

$$(A - \mu_i I)b = \sum_{j=1}^{s_{i1}} \tau_j^{(1)} b_{i,j}^{(1)}, \tag{9.2}$$

so dass das System

$$B_i^{(2)} = B_i^{(1)} \cup \{b_{i,1}^{(2)}, \dots, b_{i,s_{i2}}^{(2)}\}$$

linear unabhängig ist. Dabei sind in (9.2) die Skalare $\tau_j^{(1)}$ so zu wählen, daß diese Gleichung lösbar wird. Dieser Prozeß ist so lange fortzusetzen, bis $B_i^{(k_i)}$ aus m_i Elementen besteht. Die $b_{i,j}^{(k_i)}$ sind dann Hauptvektoren höchstmöglicher Stufe zum Eigenwert μ_i . Wir verdeutlichen uns das am Beispiel $k_i = 3$: Es gilt

$$(A - \mu_i I)b_{i,s}^{(3)} = \sum_{j=1}^{s_{i1}} \tau_{js}^{(1)} b_{i,j}^{(1)} + \sum_{j=1}^{s_{i2}} \tau_{js}^{(2)} b_{i,j}^{(2)} \neq \Theta,$$

da im Falle $= \Theta$ der Vektor $b_{i,s}^{(3)}$ Eigenvektor wäre. Es folgt

$$(A - \mu_i I)^2 b_{i,s}^{(3)} = \sum_{j=1}^{s_{i2}} \tau_{js}^{(2)} (A - \mu_i I) b_{i,j}^{(2)} = \sum_{j=1}^{s_{i1}} \widetilde{\tau}_{js}^{(1)} b_{i,j}^{(1)} \neq \Theta,$$

da im Fall $= \Theta$ der Vektor $b_{i,s}^{(3)}$ bereits zu $B_i^{(2)}$ gehören würde. Schließlich erhalten wir

$$(A - \mu_i I)^3 b_{i,s}^{(3)} = \Theta.$$

Dass „3“ die höchste Stufe ist, folgt aus der Tatsache, daß $B_i^{(3)}$ eine Basis in V_{μ_i} ist.

4. Schritt Man bildet die Ketten

$$(A - \mu_i I)^s b_{i,j}^{(k_i)}, \quad s = 0, \dots, k_i - 1, \; j = 1, \dots, s_{ik_i}.$$

Befinden sich unter den Vektoren aus $B_i^{(k_i)}$ noch linear unabhängige zur Vereinigung dieser Ketten, so bilde man zu diesen Vektoren mit höchster Stufe wiederum die entsprechenden Ketten, usw. usf.

Beispiel 9.5 *Wir betrachten die Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -13 & 7 & -4 & 2 \\ 1 & -12 & 5 & -2 & 1 \\ 6 & -19 & 7 & -8 & 8 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A ist gegeben durch

$$\det(A - tI) = -(t-3)(t-2)^4 .$$

D. h. wir haben die zwei Eigenwerte $\mu_1 = 3$ und $\mu_2 = 2$ mit den entsprechenden algebraischen Vielfachheiten $m_1 = 1$ und $m_2 = 4$.

1. *Der Eigenunterraum zum Eigenwert $\mu_1 = 3$ ist eindimensional. Der Vektor*

$$b_{1,1}^{(1)} = [1, 0, 1, 1, -1]^T$$

ist Lösung der Gleichung $(A - 3I)x = \Theta$.

2. *Wir berechnen die Eigenvektoren (d. h. die Hauptvektoren erster Stufe) zum Eigenwert $\mu_2 = 2$. Der Gauß-Algorithmus liefert die LR-Zerlegung $A - 2I = L\,R$ der Matrix $A - 2I$ mit*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 9 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 10 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenvektoren $b_{2,j}^{(1)}$ sind Lösungen der Gleichung $(A - 2I)x = \Theta$, die äquivalent zu $R\,x = \Theta$ ist. Für $x = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5]^T$ können wir $\xi_5 = \sigma$ und $\xi_4 = \tau$ frei wählen. Es folgt $\xi_3 = 3\tau$, $\xi_2 = \tau$ und $\xi_1 = \tau - \sigma$, d. h.

$$x = \begin{bmatrix} \tau - \sigma \\ \tau \\ 3\tau \\ \tau \\ \sigma \end{bmatrix} = \tau \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wir können damit $b_{2,1}^{(1)} = [1, 1, 3, 1, 0]^T$ und $b_{2,2}^{(1)} = [-1, 0, 0, 0, 1]^T$ wählen. Der Eigenunterraum zu $\mu_2 = 2$ hat also die Dimension $s_{21} = 2 < m_2 = 4$. Wir benötigen somit noch zwei Hauptvektoren zum Eigenwert μ_2 höherer als erster Stufe.

3. *Wir berechnen die Hauptvektoren zweiter Stufe zum Eigenwert* μ_2. *Es ist*

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{3} & -9 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die $b_{2,j}^{(2)}$ *sind Lösungen der Gleichung*

$$(A-2I)x = L\,R\,x = \tau_1 b_{2,1}^{(1)} + \tau_2 b_{2,2}^{(1)}, \tag{9.3}$$

die äquivalent zu der Gleichung

$$R\,x = \tau_1 L^{-1} b_{2,1}^{(1)} + \tau_2 L^{-1} b_{2,2}^{(1)} = \tau_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{25}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \tau_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

ist. Dieses System ist genau dann lösbar, wenn $\tau_1 = \tau_2$ *gilt. Wir wählen* $\tau_1 = \tau_2 = 1$ *und haben somit zu lösen*

$$R\,x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Durch Wahl von $\xi_4 = \xi_5 = 0$ *erhalten wir die spezielle Lösung*

$$b_{2,1}^{(2)} = [-2, -4, -9, 0, 0]^T.$$

Die allgemeine Lösung des Systems (9.3) für $\tau_1 = \tau_2 = 1$ *lautet dann*

$$b_2^{(2)} = b_{2,1}^{(2)} + \tau b_{2,1}^{(1)} + \sigma b_{2,2}^{(1)}$$

mit beliebigen Zahlen τ *und* σ. *Wir erhalten*

$$(A-2I)b_2^{(2)} = b_{2,1}^{(1)} + b_{2,2}^{(1)} = [0, 1, 3, 1, 1]^T =: \widetilde{b}_2^{(1)}.$$

4. *Wir berechnen die Hauptvektoren dritter Stufe. Die* $b_{2,j}^{(3)}$ *sind Lösungen der Gleichung*

$$(A-2I)x = L\,R\,x = \tau_1 b_{2,1}^{(2)} + \tau_2 b_{2,1}^{(1)} + \tau_3 b_{2,2}^{(1)}, \tag{9.4}$$

die äquivalent zu

$$Rx = \tau_1 L^{-1} b_{2,1}^{(2)} + \tau_2 L^{-1} b_{2,1}^{(1)} + \tau_3 L^{-1} b_{2,2}^{(1)} = \tau_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{14}{3} \\ \frac{95}{3} \\ -\frac{3}{2} \\ -3 \end{bmatrix} + \tau_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{25}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \tau_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

ist. Dieses System ist genau dann lösbar, wenn

$$-3\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 = 0$$

gilt. Wir wählen $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 4$ *und* $\tau_3 = 1$. *Durch die Wahl* $\xi_4 = \xi_5 = 0$ *ergibt sich die spezielle Lösung*

$$b_{2,1}^{(3)} = [-1, 0, 1, 0, 0]^T \, .$$

Die allgemeine Lösung des Systems (9.4) für $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 4$ *und* $\tau_3 = 1$ *hat dann die Gestalt*

$$b_2^{(3)} = b_{2,1}^{(3)} + \tau \, b_{2,1}^{(1)} + \sigma \, b_{2,2}^{(1)}$$

mit beliebigen Zahlen τ *und* σ. *Wir erhalten*

$$(A - 2I) b_2^{(3)} = b_{2,1}^{(2)} + 4 \, b_{2,1}^{(1)} + b_{2,2}^{(1)} = [1, 0, 3, 4, 1]^T =: \widetilde{b}_2^{(2)} \, .$$

5. *Wir haben*

$$(A - 2I) b_{2,1}^{(3)} = \widetilde{b}_2^{(2)} \, , \quad (A - 2I) \widetilde{b}_2^{(2)} = \widetilde{b}_2^{(1)} \, , \quad (A - 2I) \widetilde{b}_2^{(1)} = \Theta \, .$$

Weil $b_{2,1}^{(1)} \notin span\{\widetilde{b}_2^{(1)}, \widetilde{b}_2^{(2)}, b_{2,1}^{(3)}\}$ *gilt, können wir* $T = [b_{1,1}^{(1)}, b_{2,1}^{(1)}, \widetilde{b}_2^{(1)}, \widetilde{b}_2^{(2)}, b_{2,1}^{(3)}]$ *wählen und erhalten*

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \qquad T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

9.3 Die matrixwertige Exponentialfunktion

Wir betrachten ein einfaches Anfangswertproblem (AWP)

$$x_1'(t) = -2 \, x_1(t) \, , \quad x_2'(t) = 3 \, x_2(t) \, ,$$

$x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2$, für die gesuchte vektorwertige Funktion $x : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} .$$

Dieses System kann auch in der Form

$$x'(t) = A\,x(t)$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

geschrieben werden. Wir erhalten als Lösung dieses AWPs

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1^0 e^{-2\,t} \\ x_2^0 e^{3\,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\,t} & 0 \\ 0 & e^{3\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix},$$

die man (vorerst formal) in der Form

$$x(t) = e^{t\,A} x^0$$

mit der Matrix

$$e^{t\,A} = \begin{bmatrix} e^{-2\,t} & 0 \\ 0 & e^{3\,t} \end{bmatrix}$$

schreiben könnte. Das AWP

$$x_1' = -x_1 - 3\,x_2\,, \quad x_2' = 2\,x_2\,, \tag{9.5}$$

$$x_1(0) = x_1^0\,, \quad x_2(0) = x_2^0\,, \tag{9.6}$$

kann in der Form

$$x' = A\,x\,, \quad x(0) = x^0$$

mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

geschrieben werden. $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ sind die Eigenwerte dieser Matrix und

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entsprechende Eigenvektoren. Für die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gilt dann

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := P^{-1} A\,P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der Koordinatentransformation $x = P\,y$ bzw. $y = P^{-1}x$ schreibt sich das AWP (9.5), (9.6) als

$$x' = P\,y' = A\,P\,y\,, \quad \text{d.h.} \quad y' = P^{-1}A\,P\,y = B\,y\,,$$

und

$$y(0) = P^{-1}x^0 =: y^0\,,$$

also

$$y_1' = -y_1\,, \quad y_2' = 2\,y_2\,, \tag{9.7}$$

$$y_1(0) = x_1^0 + x_2^0 =: y_1^0\,, \quad y_2(0) = x_2^0 =: y_2^0\,. \tag{9.8}$$

Mit obiger Schreibweise erhalten wir als Lösung

$$y(t) = e^{t\,B}y^0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 e^{-t} \\ y_2^0 e^{2\,t} \end{bmatrix},$$

also

$$x(t) = P\,y(t) = P\,e^{t\,B}P^{-1}x^0 = \begin{bmatrix} (x_1^0 + x_2^0)e^{-t} - x_2^0 e^{2\,t} \\ x_2^0 e^{2\,t} \end{bmatrix}$$

als Lösung des ursprünglichen Problems (9.5), (9.6). Schreiben wir die Lösung wieder in der Form $x(t) = e^{t\,A}x^0$, so würde

$$e^{t\,A} = e^{t\,P\,B\,P^{-1}} = P\,e^{t\,B}P^{-1}$$

gelten. Im folgenden wollen wir nun diesen Schreibweisen einen exakten Sinn geben.

Wir betrachten den Banachraum $(\mathbb{C}^n, \|.\|)$ mit $\|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}$. Wir wissen, daß wir eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ als Element des Banachraumes $(L(\mathbb{C}^n), \|.\|)$ mit

$$\|A\| = \sup\{\|A\,x\| : x \in \mathbb{C}^n\,,\ \|x\| = 1\}$$

auffassen können. Wir definieren für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}\,A^2 + \cdots + \frac{1}{m!}\,A^m + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,A^k := \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\,A^k\,.$$

Wegen

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\,A^k - \sum_{k=0}^{m+\ell} \frac{1}{k!}\,A^k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{m+\ell} \frac{1}{k!}\,A^k \right\| \le \sum_{k=m+1}^{m+\ell} \frac{1}{k!}\,\|A\|^k$$

ist die Folge

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k \right\}_{m=0}^{\infty}$$

eine Cauchy-Folge im Banachraum $L(\mathbb{C}^n)$ und somit konvergent. D.h., e^A ist für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ wohldefiniert. Die definierende Reihe ist sogar absolut konvergent. Für eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt dabei

$$e^{T^{-1}A\,T} = T^{-1}e^A T\,, \tag{9.9}$$

denn es ist

$$e^{T^{-1}A\,T} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(T^{-1}A\,T)^k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\, T^{-1}A^k T = T^{-1}e^A T\,.$$

Für vertauschbare Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt das Potenzgesetz

$$e^{A+B} = e^A e^B\,. \tag{9.10}$$

Da das Produkt der Summen zweier absolut konvergenter Reihen gleich der Summe des Cauchy-Produktes dieser Reihen ist, ergibt sich diese Beziehung aus

$$\begin{aligned}
e^A e^B &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\, A^j \frac{1}{(k-j)!}\, B^{k-j} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, (A+B)^k \\
&= e^{A+B}\,.
\end{aligned}$$

Nun noch einige Folgerungen:

1° Für $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $t \in \mathbb{C}$ gilt $e^{t\,A} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})\,.$

2° $A = T^{-1}B\,T \Rightarrow e^{t\,A} = T^{-1}e^{t\,B}T\,,\ t \in \mathbb{C}\,.$

3° $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}\,,\ e^{(s+t)A} = e^{s\,A}e^{t\,A}\,,\ s,t \in \mathbb{C}\,.$

4° Für $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, gilt $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$.

5° Für komplexe Zahlen a und b sowie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ ist $e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6° Aus **4°** und **5°** ergeben sich für die Spezialfälle

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, und $t \in \mathbb{C}$ die Beziehungen

$$e^{t\,A} = \begin{bmatrix} e^{\lambda\,t} & 0 \\ 0 & e^{\mu\,t} \end{bmatrix}, \quad e^{t\,B} = e^{\lambda\,t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$e^{t\,C} = e^{a\,t} \begin{bmatrix} \cos(b\,t) & -\sin(b\,t) \\ \sin(b\,t) & \cos(b\,t) \end{bmatrix}.$$

7° Wir setzen jetzt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $t \in \mathbb{R}$ voraus und berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\, e^{t\,A} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[e^{(t+h)A} - e^{t\,A} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} e^{t\,A} \frac{1}{h} \left[e^{h\,A} - I \right] \\
&= e^{t\,A} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (h\,A)^k \\
&= e^{t\,A} A \left[I + \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} (h\,A)^k \right].
\end{aligned}$$

Wegen

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} (h\,A)^k \right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|h\,A\|^k = e^{|h|\,\|A\|} - 1 \longrightarrow 0 \quad (h \longrightarrow 0)$$

folgt daraus

$$\frac{d}{dt}\, e^{t\,A} = e^{t\,A} A = A\, e^{t\,A}. \tag{9.11}$$

8° Für $x(t) = e^{t\,A} x^0$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, gilt

$$x'(t) = A\, e^{t\,A} x^0 = A\, x(t) \quad \text{und} \quad x(0) = x^0.$$

Wir fassen zusammen und betrachten dazu für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen gegebenen Vektor $x^0 \in \mathbb{R}^n$ sowie die gesuchte Funktion $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ das AWP

$$x' = A\, x, \quad x(0) = x^0. \tag{9.12}$$

Wir definieren die Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\Phi(t, x) = e^{t\,A} x.$$

Es gilt dann

(a) $\Phi(0,x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$,

(b) $\Phi(t,\Phi(s,x)) = e^{tA}e^{sA}x = e^{(t+s)A}x = \Phi(t+s,x)$ für alle $s,t \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Weiterhin haben wir die folgende Aussage bezüglich der Lösung des AWPs (9.12).

(c) Die Funktion $\varphi(t) = \Phi(t,x^0)$ ist Lösung von (9.12), d.h. es gilt $\varphi(0) = x^0$ und $\varphi'(t) = A\,\varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Diese Lösung ist die einzige.

Man nennt im vorliegenden Fall $\mathbb{R}^n$ den **Phasenraum** und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ den **erweiterten Phasenraum** sowie $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ den durch das AWP (9.12) definierten **Fluss** bzw. das durch (9.12) bestimmte **dynamische System**. Die Abbildung $\varphi(t) = \varphi_{x^0}(t) = \Phi(t,x^0)$, $t \in \mathbb{R}$, beschreibt einen Weg (eine Kurve) im $\mathbb{R}^n$, der (die) durch den Punkt x^0 geht, nämlich die Lösungskurve des AWPs (9.12). Das Bild

$$\varphi_{x^0}(\mathbb{R}) = \left\{\Phi(t,x^0) : t \in \mathbb{R}\right\}$$

dieser Abbildung (die Kurve) selbst bezeichnet man als **Orbit** (Bahnkurve, Trajektorie, Flußlinie). Unter dem **Phasenportrait** des AWPs (9.12) versteht man die Menge aller Orbits $\{\varphi_x(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Wir betrachten nochmals die Systeme (vgl. (9.5), (9.6) und (9.7), (9.8))

$$x' = A\,x\,, \quad x(0) = x^0\,, \tag{9.13}$$

und

$$y' = B\,y\,, \quad y(0) = y^0\,, \tag{9.14}$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1}A\,P\,,\; P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und fragen, wie man sich die Phasenportraits dieser Systeme vorstellen kann. Wir bezeichnen den Fluß zum System (9.14) mit

$$\Psi(t,y) = e^{tB}y = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Für $y^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ 0 \end{bmatrix}$ erhalten wir die Lösung

$$\psi_{y^0}(t) = \Psi(t,y^0) = \begin{bmatrix} y_1^0 e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix},$$

d.h. den Orbit

$$\psi_{y^0}(\mathbb{R}) = \begin{cases} \{[y_1,0]^T : y_1 > 0\}\,, & \text{falls } y_1^0 > 0\,, \\ \Theta\,, & \text{falls } y_1^0 = 0\,, \\ \{[y_1,0]^T : y_1 < 0\}\,, & \text{falls } y_1^0 < 0\,. \end{cases}$$

Für $y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2^0 \end{bmatrix}$ erhalten wir entsprechend

$$\psi_{y^0}(t) = \Psi(t, y^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2^0 e^{2\,t} \end{bmatrix},$$

$$\psi_{y^0}(\mathbb{R}) = \begin{cases} \{[0, y_2]^T : y_2 > 0\}\,, & \text{falls} \;\; y_2^0 > 0\,, \\ \Theta\,, & \text{falls} \;\; y_2^0 = 0\,, \\ \{[0, y_2]^T : y_2 < 0\}\,, & \text{falls} \;\; y_2^0 < 0\,. \end{cases}$$

Ist $y^0 = \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix}$ mit $y_1^0 \neq 0$ und $y_2^0 \neq 0$, so gilt mit

$$\psi_{y^0}(t) = \psi(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^0 e^{-t} \\ y_2^0 e^{2\,t} \end{bmatrix}$$

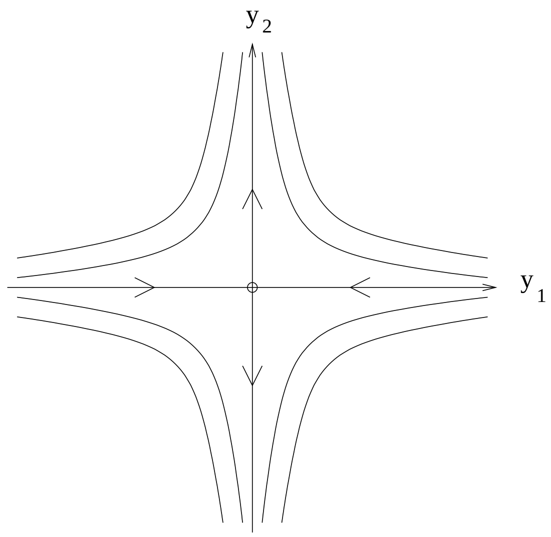
die Beziehung $\psi_2(t) = y_2^0 (y_1^0)^2 [\psi_1(t)]^{-2}$, d.h. der entsprechende Orbit ist gleich

$$\{[y_1, c\,y_1^{-2}]^T : y_1 > 0\}\,, \quad \text{falls} \quad y_1^0 > 0\,,$$

und

$$\{[y_1, c\,y_1^{-2}]^T : y_1 < 0\}\,, \quad \text{falls} \quad y_1^0 < 0\,,$$

mit $c = y_2^0 (y_1^0)^2$.

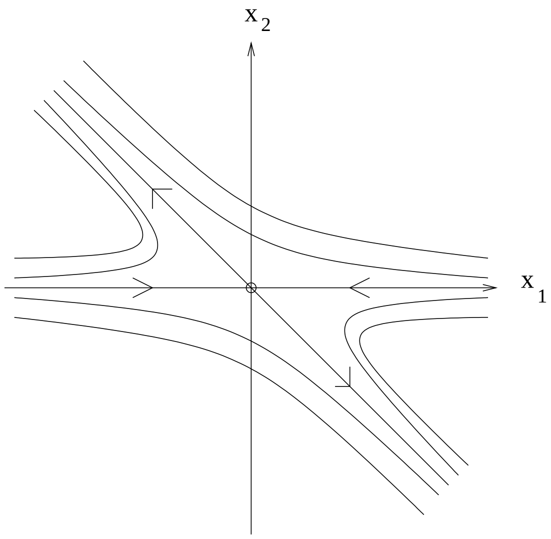


Phasenportrait zum System (9.14)

Wie sieht nun das Phasenportrait zum System (9.13) aus? Wir bezeichnen den Fluß zu diesem System mit $\Phi(t,x) = e^{t\,A}x$. Aus $A = P\,B\,P^{-1}$ folgt

$$\Phi(t,x) = P\,e^{t\,B}P^{-1}x = P\,\Psi(t, P^{-1}x)\,.$$

D.h., ist $\psi_{y^0}(t)$ Lösung von (9.14), so ist $\varphi_{P\,y^0}(t) = P\,\psi_{y^0}(t)$ Lösung von (9.13) mit $x^0 = P\,y^0$ und umgekehrt. Die Transformation $x = P\,y$ bildet also Bahnkurven von (9.14) auf Bahnkurven von (9.13) ab. Wir haben somit das Phasenportrait von (9.14) nur der Transformation P zu unterwerfen, um das Phasenportrait von (9.13) zu erhalten. Wegen $P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ und $P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ ergibt sich folgendes Bild.



Phasenportrait zum System (9.13)

9.4 Zweidimensionale lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

Der Koordinatenursprung ist stets Gleichgewichtspunkt (stationärer Punkt) des linearen Systems

$$x' = A\,x\,.$$

Wir wollen uns jetzt einen Überblick über mögliche Phasenportraits in der Umgebung dieses Punktes im Fall $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ verschaffen.

1° $A = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}$, d.h. $\Phi(t,x) = \begin{bmatrix}e^{\lambda\,t}x_1\\ e^{\mu\,t}x_2\end{bmatrix}$.

(a) $\lambda < 0 < \mu$ (entspricht System (9.14) im Abschnitt 9.3), Θ ist ein **Sattelpunkt**.

(b) $\lambda \le \mu < 0$. Es folgt $\lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Im Fall $\lambda = \mu$ gilt für die Lösung $\varphi(t) = \varphi_x(t)$ stets $\varphi_1(t) = \mathrm{const} \cdot \varphi_2(t)$, d.h. die Orbits sind Strahlen. Im Fall $\lambda < \mu$ gilt z.B. für $x_1 > 0$

$$\varphi_2(t) = x_2 e^{\mu t} = x_2 \left[e^{\lambda t}\right]^{\frac{\mu}{\lambda}} = x_2 x_1^{-\frac{\mu}{\lambda}} \left[\varphi_1(t)\right]^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

und somit

$$\varphi(\mathbb{R}) = \{[x_1, c\, x_1^{\frac{\mu}{\lambda}}]^T : x_1 > 0\}$$

mit der Konstanten $c = x_2 x_1^{-\frac{\mu}{\lambda}}$. Der Koordinatenursprung Θ ist ein **stabiler Knoten**.

(c) $0 < \lambda \le \mu$. In diesem Fall ist Θ ein **instabiler Knoten**.

2° $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, d.h. $\Phi(t,x) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t}(x_1 + t\, x_2) \\ e^{\lambda t} x_2 \end{bmatrix}$.

(a) $\lambda < 0$: Θ ist **stabiler Knoten**.

(b) $\lambda > 0$: Θ ist **instabiler Knoten**.

(c) $\lambda = 0$, also $\Phi(t,x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Alle zur x_1-Achse parallelen (aber von dieser Achse verschiedenen) Geraden sind Orbits, und alle Punkte der x_1-Achse sind stationär.

3° $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, d.h. $\Phi(t,x) = e^{a t} \begin{bmatrix} \cos(b\, t) & -\sin(b\, t) \\ \sin(b\, t) & \cos(b\, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

(a) $a = 0$: Die Lösungen sind von der Gestalt $\varphi(t) = \begin{bmatrix} x_1 \cos(b\, t) - x_2 \sin(b\, t) \\ x_1 \sin(b\, t) + x_2 \cos(b\, t) \end{bmatrix}$, und es gilt $[\varphi_1(t)]^2 + [\varphi_2(t)]2 = x_1^2 + x_2^2$. Die Orbits sind also Kreise, Θ ist ein **Zentrum**.

(b) $a < 0$: Θ ist ein **stabiler Focus**.

(c) $a > 0$: Θ ist ein **instabiler Focus**.

Bemerkung. Ist $\det(A) = 0$ (siehe z.B. **2°**(c)), so ist Θ kein isolierter Gleichgewichtspunkt.

Zusammenfassung. Es seien $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\delta = \det(A)$ und $\tau = \mathrm{trace}(A) = a_{11} + a_{22}$ die Spur der Matrix A. Dann ist das charakteristische Polynom von A gegeben durch

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \tau\,\lambda + \delta\,.$$

Somit sind $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\,\delta}\right)$ die Eigenwerte der Matrix A, und es gilt:

(1) Ist $\delta < 0$ (d.h. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$), so ist Θ ein **Sattelpunkt**.

(2) Ist $0 < \delta \le \frac{\tau^2}{4}$ (d.h., $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ haben gleiches Vorzeichen), so ist Θ ein **Knoten**, und zwar ein stabiler für $\tau < 0$, ein instabiler für $\tau > 0$.

(3) Ist $0 < \frac{\tau^2}{4} < \delta$ (d.h. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, $\operatorname{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$), dann ist Θ ein **stabiler Focus**, falls $\tau < 0$, und ein **instabiler Focus**, falls $\tau > 0$.

(4) Sind $\delta > 0$ und $\tau = 0$ (d.h. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0$), so ist Θ ein **Zentrum**.

Ist $\delta = 0$, so heißt Θ **entarteter Gleichgewichtspunkt**. In diesem Fall ist Θ auch kein isolierter Gleichgewichtspunkt.

Beispiel 9.6 *$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $p_A(\lambda) = -(\lambda^2+4)$, d.h. $\lambda_{1,2} = \pm 2\,\mathbf{i}$. Eigenvektoren sind $b_{1,2} = \begin{bmatrix} 2 \\ \mp\mathbf{i} \end{bmatrix}$. Wir setzen $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und erhalten $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sowie*

$$P^{-1}A\,P = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es folgt

$$e^{t\,A} = P \begin{bmatrix} \cos(2\,t) & -\sin(2\,t) \\ \sin(2\,t) & \cos(2\,t) \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(2\,t) & -2\sin(2\,t) \\ \frac{1}{2}\sin(2\,t) & \cos(2\,t) \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des AWPs $x' = A\,x$, $x(0) = x^0$, ist also gegeben durch

$$\varphi_1(t) = x_1^0 \cos(2\,t) - 2x_2^0 \sin(2\,t)\,,\ \ \varphi_2(t) = \frac{1}{2}\,x_1^0 \sin(2\,t) + x_2^0 \cos(2\,t)\,.$$

Dabei gilt

$$[\varphi_1(t)]^2 + 4[\varphi_2(t)]^2 = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 = \text{const}\,,$$

d.h. die Lösungskurven sind Ellipsen und der stationäre Punkt Θ ist ein Zentrum.

9.5 Die praktische Lösung homogener linearer Anfangswertprobleme mit konstanten Koeffizienten

Das folgende Theorem ist eine Modifikation des Satzes 9.4 für den Fall, daß die Matrix nur reelle Einträge besitzt.

Theorem 9.7 *Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und $\lambda_j = \alpha_j + \mathbf{i}\,\beta_j$, $\overline{\lambda_j}$, $j = k+1, \ldots, k+m$, mit $k + 2\,m = n$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und $\beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann existiert eine Basis $\{u^1, \ldots, u^k, v^{k+1}, u^{k+1}, \ldots, v^{k+m}, u^{k+m}\}$ in $\mathbb{R}^n$, so dass die u^j, $j = 1, \ldots, k$, und die $w^{k+j} = u^{k+j} + \mathbf{i}\,v^{k+j}$, $j = 1, \ldots, m$, verallgemeinerte Eigenvektoren von A sind und für die (reguläre) Matrix $P = [u^1|\cdots|u^k|v^{k+1}|u^{k+1}|\cdots|v^{k+m}|u^{k+m}]$ die Beziehung*

$$P^{-1}A\,P = \begin{bmatrix} B_1 & & \Theta \\ & \ddots & \\ \Theta & & B_r \end{bmatrix}$$

gilt. Dabei sind die Jordan-Blöcke B_j von der Gestalt

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \Theta \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \Theta & & & \lambda \end{bmatrix}$$

im Fall eines reellen Eigenwertes λ oder

$$\begin{bmatrix} D & I_2 & & \Theta \\ & D & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ \Theta & & & D \end{bmatrix}$$

mit $D = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *im Fall eines komplexen Eigenwertes $\alpha + \mathbf{i}\,\beta$.*

Folgerung 9.8 *Mit den Bezeichnungen aus Theorem 9.7 läßt sich die Lösung $\varphi(t)$ des AWPs*

$$x' = A\,x\,, \quad x(0) = x^0\,, \tag{9.15}$$

in der Form

$$\varphi(t) = P \operatorname{diag}\left[e^{t\,B_j}\right]_{j=1}^{r} P^{-1} x^0$$

schreiben. Dabei gilt für

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \Theta \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \Theta & & & \lambda \end{bmatrix} = \lambda\,I + N \in \mathbb{R}^{p\times p}$$

die Beziehung

$$e^{t\,B} = e^{\lambda\,t}\left[I + \frac{1}{1!}\,t\,N + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}\,t^{p-1}N^{p-1}\right] = e^{\lambda\,t}\begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \frac{t}{1!} \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

da $N^p = \Theta$. Für den anderen Fall

$$B = \begin{bmatrix} D & I_2 & & \Theta \\ & D & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ \Theta & & & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & & \Theta \\ & D & \\ & & \ddots & \\ & \Theta & & D \end{bmatrix} + N \in \mathbb{R}^{2p\times 2p}$$

gilt

$$e^{t\,B} = e^{\alpha\,t}\mathrm{diag}\left[\left[\begin{array}{cc} \cos(\beta\,t) & -\sin(\beta\,t) \\ \sin(\beta\,t) & \cos(\beta\,t) \end{array}\right]\right]_{j=1}^{p} \left[I + \frac{1}{1!}\,t\,N + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}\,t^{p-1}N^{p-1}\right].$$

Jede Komponente $\varphi_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, der Lösung $\varphi(t)$ des AWPs (9.15) ist also eine Linearkombination von Funktionen der Gestalt

$$t^i e^{\alpha\,t}\cos(\beta\,t) \quad \text{und} \quad t^i e^{\alpha\,t}\sin(\beta\,t)\,,$$

wobei $\alpha + \mathbf{i}\,\beta$ die Menge der Eigenwerte der Matrix A mit $\beta \geq 0$ durchläuft.

Folgerung 9.9 *Wir betrachten wieder das AWP (9.15) mit dem Phasenfluß $\Phi(t,x)$. Für jedes $x^0 \in \mathbb{R}^n$ gilt genau dann*

$$\lim_{t\to\infty}\varphi_{x^0}(t) = \lim_{t\to\infty}\Phi(t,x^0) = \Theta\,,$$

wenn die Realteile aller Eigenwerte der Matrix A negativ sind.

Beispiel 9.10 *Die Matrix $A = \left[\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$ hat nur einen Eigenwert $\lambda = 2$. Wir wählen als Basis in $\mathbb{R}^3$*

$$\left\{\left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right], \left[\begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]\right\}$$

und erhalten mit

$$P = \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad P^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

die Jordansche Normalform

$$J = P^{-1}A\,P = \left[\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

der Matrix A. Für die Lösung des entsprechenden AWPs (9.15) ergibt sich

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= e^{t\,A}x^0 = P\,e^{t\,J}P^{-1}x^0 \\ &= \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} e^{2\,t} & t\,e^{2\,t} & 0 \\ 0 & e^{2\,t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\,t} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} -x_3^0 \\ x_2^0 \\ x_1^0 + x_3^0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} (x_2^0 t + x_1^0)e^{2\,t} \\ x_2^0 e^{2\,t} \\ (x_3^0 - x_2^0 t)e^{2\,t} \end{array}\right].\end{aligned}$$

Um die Lösung des AWPs (9.15) zu finden, ist es aber nicht unbedingt erforderlich, die Jordansche Normalform der Matrix A zu erzeugen, d.h. eine solche Basis aus Hauptvektoren zu finden, so dass $P^{-1}A\,P$ die Jordansche Normalform von A ist. Dazu der folgende Satz.

Satz 9.11 *Es seien $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ und $\lambda_j=\alpha_j+\mathbf{i}\,\beta_j\,,\ \overline{\lambda_j}\,,\ j=1,\ldots,m\,,$ mit $\alpha_j\in\mathbb{R}\,,\ \beta_j\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ die Eigenwerte der Matrix $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Sind $u^j\,,\ j=1,\ldots,k\,,$ und $u^{k+j}+\mathbf{i}\,v^{k+j}\,,\ j=1,\ldots,m\,,$ Hauptvektoren von A sowie $\{u^1,\ldots,u^k,v^{k+1},u^{k+1},\ldots,v^{k+m},u^{k+m}\}$ eine Basis in $\mathbb{R}^n$, $P=[u^1|\cdots|u^k|v^{k+1}|u^{k+1}|\cdots|v^{k+m}|u^{k+m}]$, so gilt*

$$A=S+N\,,$$

wobei

$$P^{-1}S\,P=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & \Theta & & \\ & & \lambda_k & & & & \\ & & & D_1 & & & \\ & \Theta & & & \ddots & & \\ & & & & & D_m\end{bmatrix}$$

mit $D_j=\begin{bmatrix}\alpha_j & -\beta_j\\ \beta_j & \alpha_j\end{bmatrix}$. Die Matrix $N=A-S$ ist nilpotent von der Ordnung $r\le n$, d.h., es gilt $N^r=\Theta$, und sie ist vertauschbar mit S. Somit ist die Lösung des AWPs (9.15) gegeben durch

$$\varphi(t)=e^{t\,A}x^0=P\,e^{t\,P^{-1}S\,P}P^{-1}\left[I+\frac{t}{1!}\,N+\cdots+\frac{t^r}{(r-1)!}\,N^{r-1}\right]x^0\,.$$

Folgerung 9.12 *Ist $\lambda\in\mathbb{R}$ n-facher Eigenwert von A, so können wir $u^j=e_j\,,\ j=1,\ldots,n\,,$ wählen und erhalten $A=\lambda\,I+N$ mit einer nilpotenten Matrix N.*

Beispiel 9.13 *Wir betrachten die Matrix A aus Beispiel 9.10. Es ist*

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}=\mathrm{diag}\,[2,2,2]+N$$

mit $N^2=\Theta$, und wir erhalten

$$\varphi(t)=e^{2\,t}(I+t\,N)x^0=e^{2\,t}\begin{bmatrix}1&t&0\\0&1&0\\0&-t&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^0\\x_2^0\\x_3^0\end{bmatrix}=e^{2\,t}\begin{bmatrix}x_1^0+t\,x_2^0\\x_2^0\\x_3^0-t\,x_2^0\end{bmatrix}.$$

Beispiel 9.14 *Die Matrix* $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *hat die zweifachen Eigenwerte* $\lambda = \mathbf{i}$ *und* $\overline{\lambda} = -\mathbf{i}$. *Als einen Eigenvektor* w^1 *und einen Hauptvektor* w^2 *findet man z.B.*

$$w^1 = u^1 + \mathbf{i}\, v^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad w^2 = u^2 + \mathbf{i}\, v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Wir setzen also $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *und erhalten*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad S = P \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$N = A - S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad N^2 = \Theta .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= P \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} P^{-1}(I + t\,N)x^0 \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ -t\,\sin t & \sin t - t\,\cos t & \cos t & -\sin t \\ \sin t + t\,\cos t & -t\,\sin t & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

9.6 Übungsaufgaben

1. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, wobei die algebraische Vielfachheit von λ_1 gleich 3, die von λ_2 gleich 2 sein soll. Wie sieht die Jordansche Normalform von A aus, wenn

   (a) die geometrische Vielfachheit von λ_1 gleich 1 ist,

(b) die geometrische Vielfachheit von λ_2 gleich 2 ist?

2. Geben Sie für folgende Matrizen die Jordansche Normalform sowie die entsprechende Transformationsmatrix an:

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, (b) $A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, (c) $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

(d) A_4, definiert in Aufgabe 7(e), Abschnitt 7.5.

(Z1) Begleitmatrix C_Φ zum Polynom $\Phi(x) = (x+1)^2(x-2)^2$ (Aufg. (Z4), Abschnitt 7.5).

3. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform folgender Matrizen:

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (b) **(HA)** $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

(c) **(HA)** $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (d) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

(e) **(HA)** $A_3 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 8 & -2 & 15 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$.

(Z2) Geben Sie die entsprechende Jordanbasis an.

4. **(HA)** Es seien $\mathcal{P}_3$ der lineare Raum aller reellen Polynome höchstens dritten Grades und

$$\mathcal{A} : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3\,, \quad p(t) \mapsto p(t) + p'(t)\,.$$

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung A von $\mathcal{A}$ in der Basis $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2, t^3\}$ an und untersuchen Sie, ob es eine orthogonale Basis in $\mathcal{P}_3$ gibt, so dass die Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$ in dieser Basis Diagonalgestalt hat.

(b) Welche Gestalt hat die Matrixdarstellung B von $\mathcal{A}$ in der Basis

$$\mathcal{B}_2 = \{1, t-1, t^2+1, t^3\}\,?$$

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B.

(d) Geben Sie das Spektrum des Operators $\mathcal{A}$ an.

(e) Sei $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ der Koordinatenvektor von $p(t)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$. Berechnen Sie den Koordinatenvektor von $p(t)$ bzgl. $\mathcal{B}_2$. Berechnen Sie die Koordinatenvektoren von $p(t) + p'(t)$ in beiden Basen. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse.

Index

ähnliche Matrizen, 25

adjungierte Matrix, 8
algebraische Vielfachheit, 24

Bahnkurve, 63

charakteristisches Polynom, 24

dualer Raum, 9
dynamisches System, 63

Eigenelement, 23
Eigenunterraum, 23
Eigenvektor, 23
Eigenwert, 23
erweiterter Phasenraum, 63

Flächen zweiten Grades, 41
Fluss, 63

geometrische Vielfachheit, 24

Hauptachsen einer Quadrik, 34
Hauptachsentransformation, 34
Hauptvektor, 54
Hyperfläche zweiten Grades, 33

Kegelschnitte, 36
Kette von Hauptvektoren, 54
Kurven zweiten Grades, 36

lineares Funktional, 8

Minor, 12

normale Matrix, 28
numerische Vielfachheit, 24

Orbit, 63
orthogonale Basis, 26
orthogonale Transformation, 28
orthonormale Basis, 26

Phasenraum, 63
Polynom zweiten Grades, 33

quadratische Gleichung, 33
Quadrik, 33

Rang, 12
Rayleigh-Quotient, 28

Skalarprodukt, 8
Spektrum einer Matrix, 29
Spur einer matrix, 25

Trajektorie, 63

unitäre Transformation, 28

verallgemeinerter Eigenunterraum, 49