Skript zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

für Physiker

WS 2007/08

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einführung

Algebra heißt eigentlich **Gleichungslehre**. Aus dem Titel unserer Vorlesung können wir also schließen, dass wir uns mit Gleichungen beschäftigen werden, die die Eigenschaft besitzen, **linear** zu sein. Was dieses kleine Wörtchen **linear** bedeutet, sollte im Verlauf der Vorlesung deutlich werden. Der zweite Teil der Überschrift weist darauf hin, dass wir gewisse Anwendungen der Theorie der linearen Gleichungen bei geometrischen Betrachtungen aufzeigen wollen.

Um zu Beginn eine Vorstellung von der Art der uns hier beschäftigenden Fragen zu vermitteln, betrachten wir folgende einfache Fragestellung:

> In der (x, y)-Ebene seien uns zwei Geraden durch die Gleichungen
>
> $$a\,x + b\,y = c$$
>
> und
>
> $$d\,x + e\,y = f$$
>
> mit festen reellen Zahlen a, b, c, d, e, f mit $|a| + |b| > 0$ und $|d| + |e| > 0$ gegeben. Wir wollen zwei Fragen beantworten:
>
> 1. Schneiden sich diese Geraden?
> 2. Wenn ja, in welchem (oder welchen) Punkt(en)?

Die erste Frage ist die Frage nach der Lösbarkeit des obigen Systems von zwei Gleichungen, d.h. die Frage nach der **Existenz** eines Paares (x, y) reeller Zahlen, die obige Gleichungen gleichzeitig erfüllen. Mit der zweiten Frage suchen wir nach Lösungsmethoden für das Gleichungssystem und nach Möglichkeiten der Beschreibung der Lösungsmenge.

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit e und die zweite mit b und subtrahieren danach die zweite von der ersten:

$$(a\,e - b\,d)x = c\,e - b\,f\,.$$

Analog erhalten wir

$$(a\,e - b\,d)y = a\,f - c\,d\,.$$

Ist $D := a\,e - b\,d \neq 0$, so ergibt sich leicht die Lösung

$$(x, y) = \left(\frac{c\,e - b\,f}{D}, \frac{a\,f - c\,d}{D}\right)\,,$$

welche nach unseren Überlegungen dann auch die einzige ist. Was aber ist los, wenn $D = 0$ ist? Dann gibt es nur Lösungen, wenn auch

$$a\,f - c\,d = c\,e - b\,f = 0$$

gilt. Es sei z.B. $b \neq 0$. Dann kann die erste Gerade in der Form

$$y = -\frac{a}{b}\,x + \frac{c}{b}$$

geschrieben werden. Es sei nun (x, y) ein beliebiger Punkt dieser Geraden. Dann folgt

$$d\,x + e\,y = d\,x - \frac{a\,e}{b}\,x + \frac{c\,e}{b} = \frac{b\,d - a\,e}{b}\,x + f = f\,,$$

d.h. der Punkt (x, y) liegt auch auf der zweiten Geraden. Das Gleichungssystem hat also unendlich viele Lösungen; die Geraden fallen zusammen. Ist aber im Fall $D = 0$ eine der Zahlen $a\,f - c\,d$ oder $c\,e - b\,f$ ungleich Null, so existiert keine Lösung; die Geraden sind parallel und fallen nicht zusammen.

Wir sehen: Es gibt entweder **genau eine**, **keine** oder **unendlich viele** Lösungen. Wir werden sehen, dass diese Aussage auch in bedeutend komplizierteren Situationen (d.h. viele Gleichungen mit vielen Unbekannten) gültig bleibt. Unter anderem wird es uns gelingen, die **Struktur der Menge der Lösungen** (insbesondere im Fall unendlich vieler) zu beschreiben.

Um solche komplizierteren Systeme von Gleichungen aufschreiben zu können, müssen wir natürlich auf andere Bezeichnungsmöglichkeiten zurückgreifen, als wir das bei dem obigen einfachen Beispiel getan haben. Dieses Gleichungssystem können wir nämlich auch so schreiben:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\,,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2\,.$$

Wir hatten nun gesehen, dass die Zahl $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ wesentlichen Einfluss auf die Lösungsstruktur hat. Diese Zahl nennt man **Determinante** der **Matrix**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Wir sehen, dass sich im Fall $D \neq 0$ die eindeutige Lösung in der Form

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}\right)$$

mit den Determinanten D_1 und D_2 der Matrizen

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$$

schreiben läßt (**Cramersche Regel**).

Es ist nun klar, wie wir ein (lineares) Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten schreiben können:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\,, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\,, \\
&\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\,.
\end{aligned}$$

Eine kürzere Schreibweise mit Hilfe des Summenzeichens wäre:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k = b_j\,, \quad j = 1, \ldots, m\,. \tag{0.1}$$

Wir werden uns also mit Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

und Vektoren (das sind spezielle Matrizen) der Gestalt

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

und deren Eigenschaften auseinandersetzen müssen, um die Lösungseigenschaften des Systems (0.1) beschreiben zu können.

Kapitel 1

Einige Grundbegriffe aus der Mengenlehre

1.1 Mengen

Unter einer **Menge** verstehen wir eine **Zusammenfassung wohldefinierter Objekte**. Diese Objekte können z.B. Zahlen, n-Tupel von Zahlen oder Funktionen sein. Natürlich können wir auch Dinge des alltäglichen Lebens zu Mengen zusammenfassen. Das Adjektiv **wohldefiniert** soll ausdrücklich darauf hinweisen, dass die zu betrachtenden Objekte durch Eigenschaften charakterisiert sind, die eine eindeutige Entscheidung dahingehend ermöglichen, ob ein vorliegendes Objekt zur Menge gehört oder nicht.

Mengen werden wir in der Regel mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \ldots$, Schattenbuchstaben $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \ldots$ oder kaligrafischen Buchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ bezeichnen, die Elemente der Menge (also die Objekte) dagegen mit kleinen Buchstaben, $a \in A$. Wir vereinbaren die Bezeichnungen

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ für die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$,

$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ für die Menge der ganzen Zahlen,

$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}$ für die Menge der rationalen Zahlen,

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ für die Menge der reellen Zahlen,

$\mathbb{C}$ für die Menge der komplexen Zahlen.

Die Beschreibung einer Menge kann durch die Aufzählung ihrer Elemente erfolgen, wie z.B. bei der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Oft werden jedoch (auch, weil eine Aufzählung nicht möglich ist) Mengen dadurch beschrieben, dass man Elemente eines gewissen **Grundbereiches** durch Eigenschaften auszeichnet, z.B.

$M = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} =: [a, b)$ - halboffenes Intervall.

Hier ist $\mathbb{R}$ der Grundbereich, und die Eigenschaften der Menge M werden mit Hilfe der Ungleichheitsrelation im Bereich der reellen Zahlen beschrieben. Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die **leere Menge**, die kein Element enthält.

Für beliebige Mengen A und B erklären wir nun die **Mengenrelationen**

- $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

  Ausführlich: Wir sagen, dass A **Teilmenge von** B ist, genau dann, wenn aus der Tatsache, dass x **Element von** A ist, stets folgt, dass x auch **Element von** B ist.

- $A = B \Leftrightarrow (A \subset B$ und $B \subset A)$

und die **Mengenoperationen**

- **Vereinigung** $A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$

- **Durchschnitt** $A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$

- **Differenz** $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$

- **Kreuzprodukt** $A \times B := \{(x, y) : x \in A \text{ und } y \in B\}$ (geordnete Paare)

- $n \in \mathbb{N}$, $n > 1 : A^n := A \times (A^{n-1})$, $A^1 := A$

Man schreibt z.B. für $A^3 = \big\{(a,(b,c)) : a \in A,\ (b,c) \in A^2\big\}$ auch $\{(a,b,c) : a,b,c \in A\}$ (Menge gordneter Tripel) und allgemein $A^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in A,\ j = 1, \dots, n\}$ (Menge geordneter n-Tupel).

Ist $A \subset G$, so nennt man $A^c := G \setminus A$ das **Komplement** (die **Komplementärmenge**) von A bezüglich der Grundmenge G.

Zwei Mengen A und B mit der Eigenschaft $A \cap B = \emptyset$ nennt man **durchschnittsfremd** bzw. **disjunkt**.

Beispiel 1.1 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ...

Beispiel 1.2 *Die Normalparabel, d.h. der Graph der Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, *ist gegeben durch* $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. *(Lies: Menge der geordneten Paare* (x, x^2), *wobei* x *die Menge der reellen Zahlen durchläuft.)*

Beispiel 1.3 *Mit* (m), $m \in \mathbb{N}$, *bezeichnen wir die Menge aller durch* m *teilbaren ganzen Zahlen. So ist also* (2) *die Menge aller geraden und* $\mathbb{Z} \setminus (2)$ *die Menge aller ungeraden Zahlen. Ferner gilt* $(1) = \mathbb{Z}$, $(2) \cap (3) = (6)$ *und* $(10) \subset (5)$. *Dagegen ist* $(2) \cup (3)$ *die Menge der Zahlen, die durch* 2 *oder durch* 3 *teilbar sind, und* $((2) \cup (3)) \setminus (6)$ *die Menge der Zahlen, die entweder durch* 2 *oder durch* 3 *teilbar sind.*

Beachte: Für jede Menge A gilt $A \subset A$ und $\emptyset \subset A$.

Es sei M eine beliebige Menge. Mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von M, die sogenannte **Potenzmenge** von M. Es gilt also stets $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ und $M \in \mathcal{P}(M)$.

Beispiel 1.4 $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\Big\}$

Oft werden wir im weiteren die **Quantoren** "$\exists$" ("es existiert mindestens ein") und "$\forall$" ("für alle" bzw. "für jede(s,n)") bzw. "$\exists!$" ("es existiert genau ein") verwenden.

1.2 Abbildungen

Es seien A und B zwei Mengen. Unter einer **Abbildung** oder **Funktion** $f : A \longrightarrow B$, $a \mapsto f(a)$ von A nach B verstehen wir eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mittels der Vorschrift $b = f(a)$ zuordnet. Dabei heißt b **Bild** von a unter der Abbildung f , a heißt **Urbild** von b bezüglich der Abbildung f .

Ist $M \subset A$, so heißt

$$f(M) := \{b \in B : \exists a \in M \text{ mit } f(a) = b\} = \{f(a) : a \in M\}$$

das **Bild der Menge** M unter der Abbildung f . Für $N \subset B$ nennen wir

$$f^{-1}(N) := \{a \in A : f(a) \in N\}$$

das **vollständige Urbild der Menge** N bezüglich der Abbildung f .

Beachte: Es ist möglich, dass $f^{-1}(N) = \emptyset$ gilt, obwohl N nicht leer ist.

Beispiel 1.5 *Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ kann man stets als (reelle) Zahlenfolge interpretieren, indem man dafür $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit der Bezeichnung $x_n := f(n)$ schreibt. Dabei ist $f(\mathbb{N}) = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$.*

Beispiel 1.6 *$id_A : A \longrightarrow A$, $a \mapsto a$, d.h. $id_A(a) = a$ für alle $a \in A$, ist die identische Abbildung in A .*

Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ heißt

- **surjektiv**, wenn $f(A) = B$ gilt,
- **injektiv**, wenn aus $a_1, a_2 \in A$ und $f(a_1) = f(a_2)$ stets $a_1 = a_2$ folgt,
- **bijektiv**, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Sind uns mehrere Abbildungen $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ und $h : C \longrightarrow D$ gegeben, so können wir diese miteinander verknüpfen. Z.B. ist $g \circ f : A \longrightarrow C$ definiert durch $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ $\forall a \in A$. Für diese Verknüpfung gilt das Assoziativgesetz: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Satz 1.7 *Für eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ existiert genau dann eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ mit den Eigenschaften $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$, wenn f bijektiv ist.*

Ist die Voraussetzung von Satz 1.7 erfüllt, so nennt man $g : B \longrightarrow A$ die **Umkehr-** oder **inverse Abbildung** bzw. **Funktion** zu $f : A \longrightarrow B$ und bezeichnet sie mit f^{-1} . Es gilt also $f^{-1}(f(a)) = a$ $\forall a \in A$ und $f(f^{-1}(b)) = b$ $\forall b \in B$.

Satz 1.8 *Sind die Abbildungen $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ beide surjektiv (injektiv, bijektiv), so gilt dies auch für $g \circ f : A \longrightarrow C$.*

(Vgl. Übungsaufgabe 13, Abschnitt 1.4.)

Beispiel 1.9 *Die Menge aller bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ der ersten n natürlichen Zahlen auf sich selbst, auch* **Permutationen** *der Ordnung n genannt, bezeichnen wir mit S_n . Wir verwenden dabei folgende Schreibweise: Ein $\sigma \in S_4$ schreiben wir in der Form*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

was ausführlich geschrieben

$$\sigma(1) = 3\,, \quad \sigma(2) = 1\,, \quad \sigma(3) = 2 \quad \text{und} \quad \sigma(4) = 4$$

bedeutet. Es gilt nun

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

was zeigt, dass die Verknüpfung "$\circ$" i.a. nicht kommutativ ist, auch wenn der Bildbereich B mit dem Urbildbereich A zusammenfällt.

1.3 Äquivalenzrelationen

Unter einer **Relation** R in einer Menge M verstehen wir eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Wir sagen, dass ein Element $x \in M$ in Relation R zu $y \in M$ steht, in Zeichen $x\,R\,y$, genau dann, wenn $(x, y) \in R$ gilt. Wir nennen eine Relation $R \subset M \times M$ **Äquivalenzrelation**, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

(r) R ist **reflexiv**, d.h. $(x, x) \in R \;\forall x \in M$,

(s) R ist **symmetrisch**, d.h. aus $(x, y) \in R$ folgt $(y, x) \in R$,

(t) R ist **transitiv**, d.h. aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ folgt $(x, z) \in R$.

Beispiel 1.10 $M = \mathbb{R}$, $R = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ (*Diagonale von* $\mathbb{R}^2$) - *Gleichheitsrelation*

Beispiel 1.11 $M = \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x - y \in (m)\}$, *d.h. x steht in Relation zu y genau dann, wenn x und y bei Division durch m denselben Rest lassen.*

Beispiel 1.12 $M = \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow_{\text{def}} y_2 - y_1 = 2(x_2 - x_1)$, *d.h. die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der Ebene $\mathbb{R}^2$ stehen genau dann zueinander in der so definierten Relation, wenn sie auf einer Geraden mit dem Anstieg 2 liegen.*

Es sei $R \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation. Für $x \in M$ definieren wir die zugehörige **Äquivalenzklasse** $[x]_R$ (oder auch nur mit $[x]$ bezeichnet) wie folgt: $[x] := \{y \in M : (x, y) \in R\}$. Das Element $x \in M$ heißt Repräsentant der Äquivalenzklasse $[x]$. Es gilt nun:

(A1) $[x] = [y] \Leftrightarrow (x, y) \in R$.

(A2) $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$.

(A3) Aus (A1) und (A2) folgt: Jedes $x \in M$ liegt in genau einer Äquivalenzklasse. Man sagt: Eine Äquivalenzrelation auf M erzeugt eine **Zerlegung** von M in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen, nämlich die Äquivalenzklassen. Eine solche Zerlegung wird auch **Partition** von M genannt.

Es gilt auch die Umkehrung:

(A4) Jede Partition P von M, d.h.

$$P \subset \mathcal{P}(M)\,,\ \emptyset \notin P\,,\ \bigcup_{A \in P} A = M \text{ und } A \cap B = \emptyset \text{ für } A, B \in P\,,\ A \neq B\,,$$

erzeugt eine Äquivalenzrelation auf M, und zwar durch die Definition

$$x \sim y \ \Leftrightarrow_{\text{def}} \exists A \in P : x \in A \text{ und } y \in A\,.$$

(Vgl. Übungsaufgabe 20, Abschnitt 1.4.)

Im Beispiel 1.10 bestehen die Äquivalenzklassen aus genau einem Element. Die Äquivalenzklassen im Beispiel 1.11 sind die **Restklassen modulo** (m), $[0]_m$, $[1]_m$, $\ldots$, $[m-1]_m$, und im Beispiel 1.12 sind es die Geraden mit dem Anstieg 2.

1.4 Übungsaufgaben

1. Geben Sie folgende Mengen mit Hilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

$$M_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}\,,\ M_2 = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}\ (\mathbf{HA}),$$

$$M_3 = \{2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}\ (\mathbf{HA}),$$

$$M_4 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots\right\}, M_5 = \{-1, 1\}\,,\ M_6 = [-1, 1],$$

$$M_7 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}\,,\ M_8 = \{-4, -2, 2, 4\}\ (\mathbf{HA})\,.$$

2. Geben Sie folgende Mengen (wenn möglich) durch Aufzählung ihrer Elemente an:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g,\ g \in \mathbb{Z}\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : x = 3g,\ g \in \mathbb{Z}\}\ ,$$

$$M_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g,\ g \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{Z} : x = 3g,\ g \in \mathbb{Z}\}\ ,$$

$$M_3 = \left\{x \in \mathbb{R} : (x+1)^3 = x^3 + 1\right\}\ ,\ M_4 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \cos x\}\ (\mathbf{HA})\,,$$

$$M_5 = \{x \in \mathbb{R} : e^x = 0\}\ ,\ M_6 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = -\cos x\}\ (\mathbf{HA})\,,$$

$$M_7 = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2\right\}\ (\mathbf{HA})\,,$$

$$M_8 = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} = x - 1\right\}\ ,\ M_9 = \left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3\right\}\ .$$

3. Welche Beziehungen (Inklusionen) bestehen zwischen (Grundmenge sei stets die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen)

   (a) der Lösungsmenge der Gleichung $\sin\frac{x}{3} \cdot \sin\frac{x}{5} = 0$, der Lösungsmenge der Gleichung $\sin\frac{x}{3} = 0$ und der Lösungsmenge der Gleichung $\sin\frac{x}{5} = 0$,

   (b) **(HA)** der Lösungsmenge der Gleichung $2\sin^2 x = 1$ und der Lösungsmenge der Gleichung $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$?

4. Bilden Sie für die Mengen $I = \{a\}$ und $M = \{\ell, m, n\}$ die Mengen $I \times M$, $M \times I$ und M^2.

5. Es seien A, B, C beliebige Mengen. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Gleichungen:

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

(b) **(HA)** $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$,

(c) **(HA)** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,

(d) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, wobei $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die sog. symmetrische Differenz zweier Mengen A und B bezeichnet,

(e) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

6. Für $t > 0$ sei $M_t = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq t\}$. Bestimmen Sie

(a) $\bigcup\limits_{0<t\leq 1} M_t$, (b) $\bigcap\limits_{0<t\leq 1} M_t$, (c) $\bigcap\limits_{1\leq t\leq 2} M_t$,

(d) **(HA)** $\bigcup\limits_{0<t<1} M_t$, (e) **(HA)** $\bigcap\limits_{0<t<1} M_t$.

7. Es seien I eine beliebige Indexmenge und $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ein Mengensystem mit $M_\alpha \subset E$ für beliebiges $\alpha \in I$. Zeigen Sie

(a) $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha^c = \left(\bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha\right)^c$,

(b) **(HA)** $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha^c = \left(\bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha\right)^c$,

wobei $M_\alpha^c := E \setminus M_\alpha$ die sog. Komplementärmenge von M_α bzgl. der Menge E bezeichnet.

8. Man gebe die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ und die Menge $N := M^2$ **(HA)** für $M = \{1, 3, 5\}$ an.

9. Das Symbol $\#M$ bezeichne die Anzahl der Elemente einer Menge M. Man beweise, daß für jede Menge M mit $\#M < \infty$ die Beziehung $\#\mathcal{P}(M) = 2^{\#M}$ gilt.

10. Geben Sie alle Funktionen $f : I \longrightarrow M$ an für

(a) $I = \{a_1, a_2\}$, $M = \{1, 2\}$,

(b) $I = \{1\}$, $M = \{\ell, m, n\}$,

(c) $I = \{a, b\}$, $M = \{3\}$.

11. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : A \longrightarrow B$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

(a) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$,

(b) **(HA)** $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $f(x) = e^x$,

(c) $A = \mathbb{R}_+$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$,

(d) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$,

(e) **(HA)** $A = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$,

(f) **(HA)** $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$,

(g) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$, $f(n) = \dfrac{1}{n}$,

(h) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 4|$.

12. Es sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Man zeige:

(a) Aus $A \subset B \subset X$ folgt $f(A) \subset f(B)$.

(b) Für beliebge $A, B \subset X$ gilt $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(c) **(HA)** Es gilt $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{P}(X)$.

(d) **(HA)** Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

(e) Für beliebige $A, B \subset Y$ gilt $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

13. Es seien $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ zwei Abbildungen und

$$h = g \circ f : X \longrightarrow Z\,, \quad x \mapsto g(f(x))$$

ihre Komposition. Zeigen Sie, dass h surjektiv (injektiv, bijektiv) ist, wenn f und g surjektiv (injektiv, bijektiv) sind. (Ist h auch unter schwächeren Vorausetzungen an f und g bijektiv?)

14. Für welche reellen Zahlen a, b, c, d ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad (x, y) \mapsto (ax + b, cy + d)$$

surjektiv, injektiv, bijektiv?

15. Sei S_n die Menge aller Permutationen der Ordnung n. Man bestimme $\#S_n$.

16. Es seien

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $\sigma_1 \circ \sigma_2$ **(HA)**, $\sigma_1 \circ \sigma_1$ **(HA)**, $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ und σ_3^{-1}.

17. In der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ seien folgende Relationen R_1 bis R_6 erklärt:

$$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}\,, \quad R_2 = \{(4,4)\} \cup R_1\,, \quad R_3 = R_2 \cup \{(1,3)\}\ \textbf{(HA)}\,,$$

$$R_4 = R_3 \cup \{(3,1)\}\,, \quad R_5 = R_4 \cup \{(1,2), (2,1), (3,2), (2,3)\}\ \textbf{(HA)}\,,$$

$$R_6 = R_2 \cup \{(2,3), (3,2), (1,2), (2,1)\}\,.$$

(a) Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen?

(b) Man ergänze die Relationen, die keine Äquivalenzrelationen sind, durch Hinzufügen möglichst weniger weiterer Elemente aus $M \times M$ zu einer Äquivalenzrelation.

(c) Man bestimme jeweils alle Äquivalenzklassen.

18. Welche der folgenden Relationen auf der Menge X sind reflexiv, symmetrisch, transitiv?

(a) $X = \mathbb{N}\,,\ m\, R_a\, n \Leftrightarrow_{\text{def}} m + n$ ist gerade,

(b) **(HA)** $X = \mathbb{N}\,,\ m\, R_b\, n \Leftrightarrow_{\text{def}} m + n$ ist ungerade,

(c) $X = \mathbb{N}\,,\ m\, R_c\, n \Leftrightarrow_{\text{def}} |m - n| \leq 2$,

(d) $X = \mathbb{N}\,,\ m\, R_d\, n \Leftrightarrow_{\text{def}} \dfrac{m}{n}$ ist ganzzahlige Potenz von 2,

(e) $X = \mathbb{N}\,,\ m\, R_e\, n \Leftrightarrow_{\text{def}} m|n$,

(f) $X = \mathbb{R}\,,\ x\, R_f\, y \Leftrightarrow_{\text{def}} e^x = e^y$,

(g) **(HA)** $X = \mathbb{R}\,,\ x\, R_g\, y \Leftrightarrow_{\text{def}} x^2 = y^2$,

(h) $X = \mathbb{Z}$, $a\, R_h\, b \Leftrightarrow_{\text{def}} 4|(a-b)$,

(i) **(HA)** $X = \mathbb{N}$, $m\, R_i\, n \Leftrightarrow_{\text{def}} mn$ ist ungerade,

(j) $X = \mathbb{R}$, $x\, R_j\, y \Leftrightarrow_{\text{def}} x \leq y$.

19. Zeigen Sie, dass die Relation $(a_1, b_1)R(a_2, b_2) \Leftrightarrow_{\text{def}} a_1 b_2 = a_2 b_1$ auf $\mathbb{N}^2$ eine Äquivalenzrelation ist und dabei jede Äquivalenzklasse mit einer positiven rationalen Zahl identifiziert werden kann.

20. Es sei $P \subset \mathcal{P}(M)$ ein System paarweise disjunkter, nichtleerer Teilmengen von M mit

$$\bigcup_{A \in P} A = M\,,$$

d.h. P ist eine Partition von M. Die Relation $R \subset M \times M$ sei definiert durch

$$(x, y) \in R \;\Leftrightarrow_{\text{def}}\; \exists A \in P : x \in A \text{ und } y \in A\,.$$

Man zeige, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

Kapitel 2

Die Bereiche der reellen und komplexen Zahlen

2.1 Strukturelle Eigenschaften der Menge der reellen Zahlen

Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind zwei binäre Verknüpfungen erklärt, die Addition $+ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto a+b$ (d.h. einem geordneten Paar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ reeller Zahlen wird die Summe $a+b \in \mathbb{R}$ zugeordnet) und die Multiplikation $\cdot : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto ab$ (d.h. einem geordneten Paar $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ reeller Zahlen wird das Produkt $a \cdot b = ab \in \mathbb{R}$ zugeordnet). Diese binären Verknüpfungen haben folgende Eigenschaften (bzw. genügen folgenden Axiomen):

($\mathrm{A_K}$) $a+b=b+a \ \forall a,b \in \mathbb{R}$ - Kommutativgesetz der Addition

($\mathrm{A_A}$) $a+(b+c)=(a+b)+c \ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ - Assoziativgesetz der Addition

($\mathrm{A_N}$) $0+a=a+0=a \ \forall a \in \mathbb{R}$ - Existenz eines Nullelementes

($\mathrm{A_E}$) $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} : a+x=0$ - Existenz des entgegengesetzten Elementes, Bez.: $x=-a$

($\mathrm{M_K}$) $ab=ba \ \forall a,b \in \mathbb{R}$ - Kommutativgesetz der Multiplikation

($\mathrm{M_A}$) $a(bc)=(ab)c \ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ - Assoziativgesetz der Multiplikation

($\mathrm{M_E}$) $1a=a1=a \ \forall a \in \mathbb{R}$ - Existenz eines Einselementes

($\mathrm{M_I}$) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists x \in \mathbb{R} : ax=1$ - Existenz des inversen Elementes, Bez. $x=\dfrac{1}{a}=a^{-1}$

(D) $a(b+c)=ab+ac \ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ - Distributivgesetz

Wir bemerken, dass man eine Menge mit diesen strukturellen Eigenschaften einen **Körper** nennt und dass das Nullelement sowie das Einselement eindeutig bestimmt sind. Gleiches gilt für das entgegengesetzte und das inverse Element. Ferner gilt $0a=0$, $(-1)a=-a$, $-[-(a)]=a$, $(-a)b=-(ab)=a(-b)$ und $(-a)(-b)=ab$ für alle $a,b \in \mathbb{R}$ sowie $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Man kann durch

$$a-b := a+(-b) \quad \text{und} \quad \frac{a}{b}=a\,\frac{1}{b} \quad (b \neq 0)$$

die Subtraktion und Division erklären. Aus $ab=0$ folgt stets, dass wenigstens eine der beiden Zahlen a oder b gleich 0 ist.

2.2 Definition und Eigenschaften der komplexen Zahlen

Definition 2.1 *Unter der Menge* $\mathbb{C}$ *der* **komplexen Zahlen** *verstehen wir die Menge* $\mathbb{C} = \{z = (x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ *geordneter Paare reeller Zahlen versehen mit den Operationen der* **Addition** *und* **Multiplikation**: *Für* $z_j = (x_j, y_j) \in \mathbb{C}$, $j = 1,2$, *definieren wir*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{und} \quad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)\,.$$

Die Definition von Addition und Multiplikation im Bereich der komplexen Zahlen ist damit auf die Addition und Multiplikation im Bereich der reellen Zahlen zurückgeführt. Die Gesetze ($\mathrm{A}_\times$) der Addition und ($\mathrm{M}_\times$) der Multiplikation sowie das Distributivgesetz (D) bleiben gültig. Dabei sind $0 := (0,0)$ das Nullelement und $1 := (1,0)$ das Einselement. Ferner gilt für $z = (x,y)$, dass $-z = (-x,-y)$ und, falls $(x,y) \neq (0,0)$,

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right) =: \frac{1}{z}\,.$$

Man definiert wieder $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2)$ und $\dfrac{z_1}{z_2} := z_1 z_2^{-1}$, falls $z_2 \neq 0$.

- Es gilt für jede komplexe Zahl $z = (x,y)$

  $$z = (x,y) = (x,0) + (0,1)(y,0)\,.$$

  Offenbar können wir die reelle Zahl x mit der komplexen Zahl $(x,0)$ identifizieren, da die Menge $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ bezüglich Addition und Multiplikation abgeschlossen ist. Wir erhalten also $\mathbf{i} = (0,1)$ und schreiben einfach x für $(x,0)$, so dass

  $$z = (x,y) = x + \mathbf{i}\,y$$

  (algebraische Darstellung einer komplexen Zahl).

Definition 2.2 *Für* $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ *nennt man* $x =: \operatorname{Re} z$ *den* **Realteil** *und* $y =: \operatorname{Im} z$ *den* **Imaginärteil** *der komplexen Zahl* z. *Die reelle Zahl*

$$\sqrt{x^2+y^2} =: |z|$$

heißt **Betrag** *der komplexen Zahl* $z = (x,y)$. *Die komplexe Zahl* $\mathbf{i} := (0,1)$ *nennt man* **imaginäre Einheit**. *Die Zahl*

$$\overline{z} := (x,-y) = x - \mathbf{i}\,y$$

heißt die zu $z = (x,y)$ **konjugiert komplexe Zahl**.

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$, $|z|^2 = z\overline{z}$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

- Es gilt $\mathbf{i}^2 = (-\mathbf{i})^2 = -1$, d.h. $\mathbf{i}$ und $-\mathbf{i}$ sind Lösungen der Gleichung $z^2 = -1$.

- Die ganzzahlige Potenz z^m, $m \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$, definieren wir wie bei den reellen Zahlen.

- Da sich die Addition komplexer Zahlen als Vektoraddition interpretieren lässt, gilt die **Dreiecksungleichung**

  $$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Es folgt $|z_1| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$, d.h.

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \quad \text{und analog} \quad |z_2| - |z_1| \le |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|\,,$$

so dass

$$\Big| |z_1| - |z_2| \Big| \le |z_1 - z_2| \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

- Wir definieren für $\varphi \in \mathbb{R}$

$$e^{\mathbf{i}\,\varphi} := \cos\varphi + \mathbf{i}\,\sin\varphi\,.$$

Dann gilt (nach einem bekannten Additionstheorem für die trigonometrischen Funktionen) für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{i}\,\varphi} e^{\mathbf{i}\,\psi} &= \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi + \mathbf{i}\,(\cos\varphi\,\sin\psi + \sin\varphi\,\cos\psi) \\ &= \cos(\varphi+\psi) + \mathbf{i}\,\sin(\varphi+\psi) \\ &= e^{\mathbf{i}\,(\varphi+\psi)}\,. \qquad \text{(Potenzgesetz)} \end{aligned}$$

Es folgt für $z = x + \mathbf{i}\,y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathbf{i}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = r\,e^{\mathbf{i}\,\varphi}$$

(trigonometrische Darstellung einer komplexen Zahl), wobei sich die Grössen $r = |z|$ als Länge des Vektors, der vom Koordinatenursprung der **komplexen Zahlenebene** (auch **Gaußsche Zahlenebene** genannt) zum Punkt $z = (x, y)$ zeigt, und $\varphi = \arg z$ als Winkel, den dieser Vektor mit der positiven reellen Achse (der x-Achse) bildet, interpretieren lassen. **Beachte**: Da $e^{\mathbf{i}\,\varphi} = e^{\mathbf{i}\,(\varphi+2k\pi)}$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ gilt, ist das sog. **Argument** $\arg z$ der komplexen Zahl z nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt. Die komplexe Zahl 0 hat **kein** Argument.

- Sei $z_j = r_j e^{\mathbf{i}\,\varphi_j}$, $j = 1, 2$. Dann folgt $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\mathbf{i}\,(\varphi_1+\varphi_2)}$ und somit für $n \in \mathbb{N}$

$$\left(e^{\mathbf{i}\,\varphi}\right)^n = e^{\mathbf{i}\,n\varphi}$$

bzw.

$$(\cos\varphi + \mathbf{i}\,\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + \mathbf{i}\,\sin(n\varphi)\,. \qquad \text{(Formel von Moivre)}$$

Aus $\left(e^{\mathbf{i}\,\varphi}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{i}\,\varphi}$ folgt, dass diese Formel für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

- Es sei $z = r\,e^{\mathbf{i}\,\varphi}$. Wir suchen alle Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$w^n = z\,,$$

wobei $n \ge 2$ eine gegebene natürliche Zahl sei. Mit dem Ansatz $w = \rho\,e^{\mathbf{i}\,\psi}$ erhalten wir aus der Formel von Moivre

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Es folgt

$$\rho = r^{1/n} \quad \text{und} \quad \psi = \psi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\,,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

(Für andere $k \in \mathbb{Z}$ ergeben sich Argumente, die sich von einem der bereits berechneten um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden!) Wir erhalten also n verschiedene Lösungen

$$w_k = \rho\, e^{\mathbf{i}\,\psi_k}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Die Lösungen $e_k^{(n)} := e^{\mathbf{i}\,\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, der Gleichung $z^n = 1$ nennt man **n-te Einheitswurzeln**. Sie sind gleichabständig auf dem Einheitskreis $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ verteilt, weshalb die Gleichung $z^n = 1$ auch **Kreisteilungsgleichung** heißt. Für $n = 3$ erhalten wir z.B.

$$e_0^{(3)} = 1\,,\ e_1^{(3)} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\,\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\mathbf{i}\,\sqrt{3}}{2}\,,\ e_2^{(3)} = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathbf{i}\,\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\mathbf{i}\,\sqrt{3}}{2}\,.$$

Beispiel 2.3 *Ein Beispiel für die Anwendung der Formel von Moivre:*

$$\begin{aligned}
\cos 3\varphi + \mathbf{i}\,\sin 3\varphi &= (\cos\varphi + \mathbf{i}\,\sin\varphi)^3 \\
&= \cos^3\varphi + 3\,\mathbf{i}\,\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - \mathbf{i}\,\sin^3\varphi \\
&= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + \mathbf{i}\,(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)
\end{aligned}$$

Durch den Vergleich der Real- und Imaginärteile erhält man die Formeln

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$$

und

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\,.$$

2.3 Die Verwendung komplexer Zahlen für Berechnungen im Wechselstromkreis

Wechselstrom: $j(t) = \widehat{J}\cos(\omega t + \varphi)$,

$\omega = 2\pi f$ - Kreisfrequnz, φ - Phasenverschiebung, $\widehat{J}$ - Amplitude (Spitzenwert) des Stroms

Der Messwert J des Amperemeters gibt den Wert des Gleichstromes an, der während einer Periode $T = 1/f$ an einem Ohmschen Widerstand die gleiche Arbeit leistet wie $j(t)$. Ist R der Ohmsche Widerstand, so gilt also

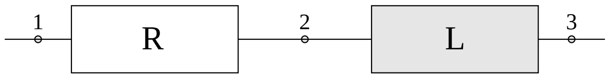
$$\text{Gleichstromarbeit} = UJT = RJ^2T$$

und

$$\text{Wechselstromarbeit} = \int_0^T R[j(t)]^2\,dt = R\widehat{J}^2\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{1}{2}R\widehat{J}^2T\,.$$

Somit ist der effektive Strom gleich $J = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\widehat{J}$.

- Wir betrachten die Reihenschaltung eines Ohmschen Widerstandes R und einer Spule mit der Induktivität L:



Nach dem Ohmschen Gesetz und nach dem Induktionsgesetz gilt für die einzelnen Spannungsabfälle

$$u_{12}(t) = Rj(t)\,, \quad u_{23}(t) = Lj'(t)\,.$$

Es folgt

$$u_{12}(t) = R\widehat{J}\cos(\omega t + \varphi)\,, \quad u_{23}(t) = -L\omega\widehat{J}\sin(\omega t + \varphi) = L\omega\widehat{J}\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

(An der (idealen) Spule läuft die Spannung dem Strom voraus!) Wir erhalten für den gesamten Spannungsabfall

$$u_{13}(t) = \widehat{J}[R\cos(\omega t + \varphi) - L\omega\sin(\omega t + \varphi)]\,.$$

Es sei $\varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel mit $\tan\varphi_0 = \frac{L\omega}{R}$. Dann ergibt sich

$$u_{13}(t) = \frac{R\widehat{J}}{\cos\varphi_0}[\cos\varphi_0\cos(\omega t + \varphi) - \sin\varphi_0\sin(\omega t + \varphi)] = \frac{R\widehat{J}}{\cos\varphi_0}\cos(\omega t + \varphi + \varphi_0)\,.$$

Wir erhalten also für den gesamten Spannungsabfall den **Effektivwert**

$$U_{13} = \frac{RJ}{\cos\varphi_0} = J\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$

und somit den sog. **Scheinwiderstand** der Reihenschaltung

$$Z_{13} = \frac{U_{13}}{J} = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}\,.$$

Diese Überlegungen lassen sich bedeutend abkürzen, wenn man den **komplexen Strom**

$$\mathbf{j}(t) = \widehat{J}e^{\mathbf{i}\,(\omega t + \varphi)} = \widehat{J}e^{i\varphi}e^{\mathbf{i}\,\omega t}$$

mit der **komplexen Amplitude** $\widehat{J}e^{\mathbf{i}\,\varphi}$ einführt. Beachte: $j(t) = \operatorname{Re}\mathbf{j}(t)$! Für die **komplexen Spannungen** erhalten wir (formale Differentiation!)

$$\mathbf{u}_{12}(t) = R\mathbf{j}(t)\,, \quad \mathbf{u}_{23}(t) = L\,\mathbf{i}\,\omega\mathbf{j}(t)$$

und somit die **komplexen Widerstände**

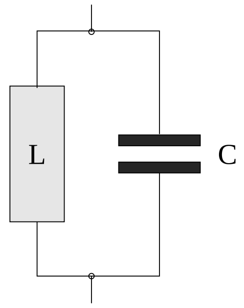
$$\mathbf{r}_{12} = R\,, \quad \mathbf{r}_{23} = \mathbf{i}\,\omega L \quad \text{(induktiver Blindwiderstand).}$$

Es folgt $\mathbf{r}_{13} = R + \mathbf{i}\,\omega L$ (Reihenschaltung!) und somit für den Scheinwiderstand der Gesamtschaltung

$$Z_{13} = |\mathbf{r}_{13}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\,.$$

Regel: Man rechnet mit den komplexen Widerständen wie im Gleichstromkreis. Der gesamte Scheinwiderstand der Schaltung ergibt sich dann als Betrag des gesamten komplexen Widerstandes.

- Wir betrachten einen Schwingkreis (Parallelschaltung) aus der Induktivität L und der Kapazität C:



Faradaysches Gesetz: $\mathbf{j}_C(t) = C\mathbf{u}_C'(t)$ bzw. $\mathbf{u}_C(t) = \dfrac{1}{\mathbf{i}\,\omega C}\,\mathbf{j}_C(t)$

Komplexe Widerstände: $\mathbf{r}_C = \dfrac{1}{\mathbf{i}\,\omega C} = -\mathbf{i}\,\dfrac{1}{\omega C}$ (kapazitiver Blindwiderstand), $\mathbf{r}_L = \mathbf{i}\,L\omega$

Komplexer Gesamtwiderstand (Parallelschaltung!):

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_C\mathbf{r}_L}{\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_L} = \frac{\dfrac{L}{C}}{\mathbf{i}\,\omega L - \dfrac{\mathbf{i}}{\omega C}} = \frac{1}{\mathbf{i}\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)}$$

Scheinwiderstand des Schwingkreises:

$$Z = \frac{1}{\left|\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right|} \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad \omega \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

2.4 Polynome und der Fundamentalsatz der Algebra

Definition 2.4 *Es seien $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, beliebige komplexe Zahlen und $a_n \neq 0$. Den Ausdruck*

$$p(z) := a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

nennen wir **Polynom n-ten Grades** *in der Veränderlichen $z \in \mathbb{C}$. Durch $p(z)$ wird eine Abbildung $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ beschrieben, die jedem $z \in \mathbb{C}$ den Wert $p(z) \in \mathbb{C}$ zuordnet. Eine Zahl $z^* \in \mathbb{C}$, für die $p(z^*) = 0$ gilt, heißt* **Nullstelle** *des Polynoms $p(z)$.*

Für die Menge der Polynome mit komplexen Koeffizienten verwendet man auch die Bezeichnung $\mathbb{C}[z]$. (Entsprechend $\mathbb{R}[z]$, ... Es gilt $\mathbb{R}[z] \subset \mathbb{C}[z]$.) Den Grad des Polynoms bezeichnet man mit $\deg p(z)$.

Fundamentalsatz der Algebra. Jedes Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ mit $\deg p(z) \geq 1$ besitzt wenigstens eine Nullstelle.

Satz 2.5 *Jedes Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ mit $\deg p(z) = n \in \mathbb{N}$ gestattet eine Zerlegung*

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) \tag{2.1}$$

in **Linearfaktoren**. *Diese Zerlegung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.*

Beispiel 2.6 *Es ist für $n \in \mathbb{N}$*

$$z^n - 1 = \left(z - e_0^{(n)}\right)\left(z - e_1^{(n)}\right)\cdots\left(z - e_{n-1}^{(n)}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(z - e_k^{(n)}\right),$$

wobei $e_k^{(n)}$ die n verschiedenen n-ten Einheitwurzeln bezeichnen (vgl. Abschnitt 2.2, Punkt 8).

Ist $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ und $p(z^*) = 0$, so folgt $p(\overline{z}^*) = 0$, d.h. ein Polynom mit reellen Koeffizienten kann nur reelle Nullstellen und Paare konjugiert komplexer Nullstellen besitzen.

Satz 2.7 *Für jedes Polynom $p(z) \in \mathbb{R}[z]$ existiert eine (bis auf die Reihenfolge) eindeutige Zerlegung in Linear- und quadratische Faktoren der Gestalt*

$$p(z) = a_n(z - x_1)\cdots(z - x_m)\left(z^2 + 2\alpha_1 z + \beta_1\right)\cdots\left(z^2 + 2\alpha_{\frac{n-m}{2}} z + \beta_{\frac{n-m}{2}}\right),$$

wobei $x_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, m$, und $\alpha_k^2 - \beta_k < 0$, $k = 1, \ldots, \frac{n-m}{2}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, gilt. ($m = 0$ *und* $m = n$ *sind möglich!*)

Beispiel 2.8 $z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$

Das Hornerschema

Wir zeigen, wie man effektiv sowohl den Funktionswert $p(z_0)$ als auch den Wert der ersten Ableitung $p'(z_0)$ eines Polynoms

$$p(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

an einer Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ berechnen kann. Zur Berechnung von $p(z_0)$ geht man wie folgt vor. Es ist

$$p(z) - p(z_0) = (z - z_0)p_1(z) =: (z - z_0)(b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0)$$

mit

$$a_m = b_{m-1},\ a_{m-1} = b_{m-2} - b_{m-1}z_0, \ldots, a_1 = b_0 - b_1 z_0,\ a_0 = p(z_0) - b_0 z_0$$

bzw.

$$b_{m-1} = a_m,\ b_{m-2} = a_{m-1} + b_{m-1}z_0, \ldots, b_0 = a_1 + b_1 z_0,\ p(z_0) = a_0 + b_0 z_0.$$

Wir erhalten das (kleine) **Hornerschema**

1. $b_{m-1} := a_m$,
2. for $k := m - 1$ to 0 step -1 do $b_{k-1} := a_k + b_k * z_0$,
3. $p(z_0) := b_{-1}$,

welches tabellarisch auch in der Form

$$\begin{array}{cccccc}
a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & + & + & & + & + \\
 & z_0 b_{m-1} & z_0 b_{m-2} & \cdots & z_0 b_1 & z_0 b_0 \\
= & = & = & & = & = \\
b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \cdots & b_0 & p(z_0)
\end{array}$$

geschrieben werden kann. Aus der Beziehung $p(z) - p(z_0) = (z - z_0)p_1(z)$ folgt nun $p'(z) = p_1(z) + (z - z_0)p_1'(z)$, d.h.

$$p'(z_0) = p_1(z_0).$$

Zur Berechnung von $p'(z_0)$ hat man also nur das Hornerschema auf das Polynom $p_1(z)$ anzuwenden.

2.5 Übungsaufgaben

1. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

   (a) $(2+3\mathbf{i})(3-2\mathbf{i})$, (b) $(1+\mathbf{i})^3$, (c) $(1+2\mathbf{i})^6$, (d) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$, (e) **(HA)** $\dfrac{2\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$,

   (f) **(HA)** $\dfrac{4-3\mathbf{i}}{4+3\mathbf{i}}$ (g) $\dfrac{a+b\mathbf{i}}{a-b\mathbf{i}}$ $(a,b\in\mathbb{R},\ (a,b)\neq(0,0))$, (h) $\dfrac{(1+\mathbf{i})^{10}}{(1-\mathbf{i})^8}$,

   (i) **(HA)** $\dfrac{1}{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}$, (j) **(HA)** $\dfrac{(1-\mathbf{i})^5-1}{(1+\mathbf{i})^5+1}$, (k) $(a+b\mathbf{i})^n$ $(n\in\mathbb{N})$.

2. Man stelle folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

   (a) **(HA)** $\cos\varphi-\mathbf{i}\sin\varphi$ $(\varphi\in\mathbb{R})$, (b) -1, (c) $2-2\mathbf{i}$, (d) **(HA)** $-a^2\mathbf{i}$ $(a\in\mathbb{R})$,

   (e) $\sin\alpha+\mathbf{i}(1-\cos\alpha)$ $(\alpha\in[0,2\pi))$, (f) $1+\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$, (g) **(HA)** $-\dfrac{1}{2}+\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Sei $z=x+\mathbf{i}\,y$ bzw. $z=r(\cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi)$ eine beliebige komplexe Zahl $(z\neq 0)$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument folgender komplexer Zahlen:

   (a) $\overline{z}$, (b) $\dfrac{1}{\overline{z}}$, (c) **(HA)** $\dfrac{1}{z}$, (d) z^2, (e) **(HA)** $\mathbf{i}\,z$, (f) $z\overline{z}$, (g) $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}\right|$.

4. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen mit der Eigenschaft

   (a) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=c$, (b) $\left|\dfrac{1}{z}\right|\leq 3$, (c) $2<|z|<4$, (d) $0\leq\arg z<\frac{\pi}{4}$,

   (e) $|z-z_0|=|z-z_1|$, (f) **(HA)** $0\leq\ \operatorname{Im} z\leq 2\pi$ und $|\operatorname{Re} z|<1$,

   (Z1) $|z+3|+|z-3|\leq 10$, **(Z2)** $|z|<1+\operatorname{Re} z$.

5. **(HA)** Sei $z=\dfrac{1}{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}$. Für welche natürlichen Zahlen n ist z^n reell?

6. Man berechne mit Hilfe der Formel von Moivre

   (a) $(1+\mathbf{i})^{10}$, (b) $(1-\mathbf{i}\sqrt{3})^6$, (c) **(HA)** $(-1+\mathbf{i})^5$, (d) **(HA)** $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^3$.

7. Man zeige, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ und für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ mit $\alpha, n\alpha\notin\left\{\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$ die Beziehung

$$\left(\frac{1+\mathbf{i}\tan\alpha}{1-\mathbf{i}\tan\alpha}\right)^n=\frac{1+\mathbf{i}\tan n\alpha}{1-\mathbf{i}\tan n\alpha}$$

   gilt.

8. Man bestimme alle Lösungen folgender Gleichungen:

   (a) $z^3=-1$, (b) **(HA)** $z^5=1$, (c) **(HA)** $z^3-\mathbf{i}=0$, (d) $z^4+1=0$,

   (e) $z^3+2=2\mathbf{i}$, (f) $z^4=-8+8\sqrt{3}\,\mathbf{i}$, (g) $z^2=-3-4\mathbf{i}$,

   (h) **(HA)** $z^6=64$, (i) $z^4-2\mathbf{i}\,z^2+2\mathbf{i}=1$, (j) **(HA)** $z^2+4\mathbf{i}\,z=5$,

   (Z1) $z^2+4\mathbf{i}\,z+5=0$, **(Z2)** $\mathbf{i}\,z^2-2z-\mathbf{i}+1=0$, **(Z3)** $|z|-z=1+2\mathbf{i}$,

9. Zeigen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ die Beziehung

$$2(|z|^2 + |w|^2) = |z - w|^2 + |z + w|^2$$

gilt.

10. Zerlegen Sie folgende Polynome sowohl in komplexe Linearfaktoren als auch in reelle Linear- und (wenn nötig) quadratische Faktoren:

(a) $z^2 + 3 + 4\mathbf{i}$, (b) $z^3 + 1$, (c) $z^4 - 16$.

11. Man berechne die Summe aller n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$.

12. **(HA)** Man stelle $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ ($n \in \mathbb{N}$) durch Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ dar.

Hinweis: Man wende den binomischen Satz und die Formel von Moivre auf $(\cos\varphi + \mathbf{i}\,\sin\varphi)^n$ an.

Kapitel 3

Der dreidimensionale Euklidische Raum

3.1 Vektoren und Skalare

Jede Größe im Raum unserer Anschauung, zu deren Charakterisierung außer einem zahlenmäßigen Betrag auch eine Richtung und ein Richtungssinn erforderlich sind, nennen wir **Vektor**. Geometrisch können wir uns darunter eine Strecke mit einem Pfeil vorstellen (Bezeichnungen: $\overrightarrow{x}$ oder $\overrightarrow{AB}$). Beispiele für vektorielle Größen sind Geschwindigkeit, Kraft, Beschleunigung, elektrische und magnetische Feldstärke. Dagegen sind Länge, Zeit, Temperatur, Arbeit und Energie Beispiele für rein skalare Größen.

Durch Vorgabe eines kartesischen Koordinatensystems mit den Einheitsvektoren $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ und $\overrightarrow{k}$ können wir die Menge der Vektoren mit dem dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ identifizieren:

$$\overrightarrow{x} = x_1 \overrightarrow{i} + x_2 \overrightarrow{j} + x_3 \overrightarrow{k} \leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Den Vektoren $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ und $\overrightarrow{k}$ entsprechen die Elemente $e_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $e_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ und $e_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ des $\mathbb{R}^3$, die wir auch Vektoren nennen. Somit ist $\overrightarrow{x}$ der Vektor, der vom Koordinatenursprung zum Punkt x zeigt. Mit $|\overrightarrow{x}|$ bezeichnen wir die Länge (bzw. den Betrag) des Vektors $\overrightarrow{x}$. Es gilt

$$|\overrightarrow{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

3.2 Operationen mit Vektoren

1. **Multiplikation** mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

   $\lambda \overrightarrow{x}$ ist der Vektor der Länge $|\lambda| \cdot |\overrightarrow{x}|$, der Richtung von $\overrightarrow{x}$ und

   (a) dem Richtungssinn von $\overrightarrow{x}$, wenn $\lambda > 0$,

   (b) dem entgegengesetzten Richtungssinn zu $\overrightarrow{x}$, wenn $\lambda < 0$,

   (c) keinem Richtungssinn, wenn $\lambda = 0$.

Es gilt

$$\lambda \overrightarrow{x} = \overrightarrow{\lambda x} \quad \text{mit} \quad \lambda x := \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix}.$$

2. **Addition** zweier Vektoren:

   $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ ist der Vektor der Diagonalen (ausgehend vom Koordinatenursprung) des Parallelogramms, welches von $\overrightarrow{x}$ und $\overrightarrow{y}$ aufgespannt wird. Es gilt

$$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x+y} \quad \text{mit} \quad x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}.$$

   Die Addition von Vektoren ist kommutativ und assoziativ. Ferner gilt die Dreiecksungleichung

$$|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}| \le |\overrightarrow{x}| + |\overrightarrow{y}|.$$

   Erst jetzt ist die Schreibweise auf der linken Seite von (3.1) richtig erklärt.

3. **Subtraktion** zweier Vektoren:

$$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} := \overrightarrow{x} + ((-1)\overrightarrow{y})$$

4. **Skalarprodukt** zweier Vektoren (auch inneres Produkt genannt):

$$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) := \langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

   Es gilt

   (S1) $\langle x, x \rangle \ge 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^3$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = [0\ 0\ 0]^T =: 0$,

   (S2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \; \forall x, y \in \mathbb{R}^3$,

   (S3) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \; \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$ und $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   Aus dem Kosinussatz der Trigonometrie folgt für $x \ne 0$ und $y \ne 0$

$$|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|^2 = |\overrightarrow{x}|^2 + |\overrightarrow{y}|^2 - 2|\overrightarrow{x}| \cdot |\overrightarrow{y}| \cos\varphi,$$

   wobei φ den Winkel zwischen $\overrightarrow{x}$ und $\overrightarrow{y}$ bezeichnet. Hieraus ergibt sich

$$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = |\overrightarrow{x}| \cdot |\overrightarrow{y}| \cos\varphi = |\overrightarrow{x}| \cdot |\overrightarrow{y}| \cos\angle(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}),$$

   woraus auch die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$$|(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})| \le |\overrightarrow{x}| \cdot |\overrightarrow{y}|$$

   folgt.

Beispiel 3.1 *Einen Vektor $\overrightarrow{e}$ der Länge 1 nennt man eine* **Richtung** *und die Skalarprodukte $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{i}) =: \cos\alpha$, $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{j}) =: \cos\beta$ und $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{k}) =: \cos\gamma$ die* **Richtungskosinus** *von $\overrightarrow{e}$. Offenbar gilt*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = |\overrightarrow{e}|^2 = 1.$$

Die Winkel α, β und γ sind die Winkel, die der Vektor $\overrightarrow{e}$ mit den Koordinatenrichtungen bildet. Für jeden Vektor $\overrightarrow{b} \ne \overrightarrow{0}$ ist $\overrightarrow{e} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{b}|}\overrightarrow{b}$ eine Richtung, deren Richtungskosinus man auch die Richtungskosinus von $\overrightarrow{b}$ nennt.

Beispiel 3.2 *Die* **Projektion** $\overrightarrow{a}_e$ *eines Vektors* $\overrightarrow{a}$ *auf eine Richtung* $\overrightarrow{e}$ *ist gleich*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e})\overrightarrow{e},$$

denn es gilt

$$|\overrightarrow{a}_e| = |\overrightarrow{a}| \cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e}).$$

Beispiel 3.3 *Welche Arbeit W verrichtet die Kraft* $\overrightarrow{a}$ *bei der Bewegung eines Massenpunktes entlang des Vektors* $\overrightarrow{b}$ *?*
Antwort: $W = |\overrightarrow{a}_b| \cdot |\overrightarrow{b}| = \left| \left(\overrightarrow{a}, \frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} \right) \frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} \right| \cdot |\overrightarrow{b}| = |(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})|.$

5. Das **Vektorprodukt** (auch äußeres Produkt genannt):
   Das Vektorprodukt $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{x}$ und $\overrightarrow{y}$ ist definiert durch die drei Bedingungen

   (a) $|\overrightarrow{p}| = |\overrightarrow{x}| \cdot |\overrightarrow{y}| \cdot |\sin\angle(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})|$,
   (b) $\overrightarrow{p}$ ist orthogonal zu $\overrightarrow{x}$ und $\overrightarrow{y}$,
   (c) $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ und $\overrightarrow{p}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

   Somit ist $|\overrightarrow{p}|$ gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, welches von $\overrightarrow{x}$ und $\overrightarrow{y}$ aufgespannt wird. Es gelten folgende Regeln für das Rechnen mit dem Vektorprodukt:

   (V1) $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \quad \forall \overrightarrow{x}$
   (V2) $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = -(\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{x})$
   (V3) $\lambda(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}) = (\lambda \overrightarrow{x}) \times \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} \times (\lambda \overrightarrow{y})$
   (V4) $\overrightarrow{x} \times (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{z}$

   Wegen $\overrightarrow{x} = x_1 \overrightarrow{i} + x_2 \overrightarrow{j} + x_3 \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{y} = y_1 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j} + y_3 \overrightarrow{k}$ und $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$ folgt aus den obigen Regeln

$$\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\overrightarrow{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\overrightarrow{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\overrightarrow{k}.$$

6. Das **Spatprodukt** (auch gemischtes Produkt genannt) dreier Vektoren $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ und $\overrightarrow{z}$ ist gleich der reellen Zahl

$$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) := (\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}).$$

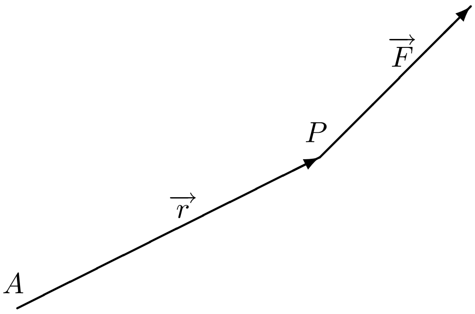
   Es gilt also

$$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) = \underbrace{|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}|}_{\text{Grundfläche}} \cdot \underbrace{|\overrightarrow{z}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}_{\text{gerichtete Höhe}},$$

   so dass das Spatprodukt gleich dem gerichteten Volumen des durch die drei Vektoren aufgespannten Spates (Parallelepipeds) ist. Es gelten folgende Regeln:

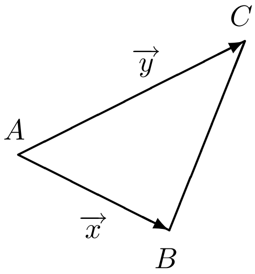
   (P1) $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{z}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$
   (P2) $(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) = -(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$
   (P3) $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{w})$
   (P4) $\lambda(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) = (\lambda\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x}, \lambda\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \lambda\overrightarrow{z})$

Beispiel 3.4 *Das Moment der Kraft $\overrightarrow{F}$ im Punkt P bezüglich des Punktes A ist definiert als das Drehmoment der Kraft $\overrightarrow{F}$ bezüglich einer Achse durch den Punkt A, die rechtwinklig zu $\overrightarrow{F}$ und $\overrightarrow{r} := \overrightarrow{AP}$ ist, und ist somit gleich $\overrightarrow{M} := \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$ (siehe Abb.). Ist die Achse nicht rechtwinklig zu $\overrightarrow{F}$ und $\overrightarrow{r}$, so ist das entprechende Drehmoment gleich der Projektion von $\overrightarrow{M}$ auf die Richtung der Achse.*



Beispiel 3.5 *Der Flächeninhalt eines Dreiecks ΔABC ist gleich*

$$F = \frac{1}{2} |\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}| \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{AB} \text{ und } \overrightarrow{y} = \overrightarrow{AC}.$$



Beispiel 3.6 *Das Volumen eines Tetraeders $ABCD$ ist gleich*

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})| \quad \text{mit} \quad \overrightarrow{a} = \overrightarrow{DA}, \ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{DB} \text{ und } \overrightarrow{c} = \overrightarrow{DC}.$$

3.3 Geraden und Ebenen im Raum

- Die **Parametergleichung einer Geraden** $g \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$g : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{s}. \tag{3.2}$$

Dabei sind $\overrightarrow{r_0}$ und $\overrightarrow{s} \neq \overrightarrow{\Theta}$ fest vorgegeben und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Schreibweise (3.2) ist wie folgt zu verstehen: Die Gerade g ist die Menge der Punkte, auf die der Ortsvektor $\overrightarrow{r}$ zeigt, wenn λ die Menge der reellen Zahlen durchläuft, d.h.

$$g = \left\{ \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{01} \\ r_{02} \\ r_{03} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

ist eine Gerade.

- Das **Lot auf die Gerade** g (gegeben durch (3.2)) von einem Punkt $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \notin g$ kann wie folgt bestimmt werden: Wir suchen den Fußpunkt $p_* \in g$ des Lotes. Dieser kann nach (3.2) in der Form

  $$\overrightarrow{p_*} = \overrightarrow{r_0} + \lambda_* \overrightarrow{s}$$

  geschrieben werden. Die Zahl $\lambda_* \in \mathbb{R}$ erhält man aus der Bedingung

  $$0 = (\overrightarrow{p_*} - \overrightarrow{p}, \overrightarrow{s}) = (\overrightarrow{r_0} + \lambda_* \overrightarrow{s} - \overrightarrow{p}, \overrightarrow{s}),$$

  also ist

  $$\lambda_* = \frac{(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{s})}{|\overrightarrow{s}|^2}.$$

  Sind λ_* und somit $\overrightarrow{p_*}$ berechnet, so ist $|\overrightarrow{p_*} - \overrightarrow{p}|$ der Abstand des Punktes p von der Geraden g.

- Zwei nicht parallele und sich nicht schneidende Geraden heißen zueinander **windschief**. Den **Abstand zweier windschiefer Geraden**

  $$g_1 : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \lambda \overrightarrow{s_1}$$

  und

  $$g_2 : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} + \mu \overrightarrow{s_2}$$

  berechnet man wie folgt: Zuerst bemerken wir, dass diese beiden Geraden genau dann nicht parallel sind, wenn

  $$\overrightarrow{s_3} := \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2} \neq \overrightarrow{0}$$

  gilt. Die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen g_1 und g_2 muss senkrecht auf beiden Geraden stehen, d.h. wir haben reelle Zahlen λ, μ und ν so zu bestimmen, dass die Beziehung

  $$\overrightarrow{r_1} + \lambda \overrightarrow{s_1} - \overrightarrow{r_2} - \mu \overrightarrow{s_2} = \nu \overrightarrow{s_3} \tag{3.3}$$

  erfüllt ist. Die Gleichung (3.3) lässt sich als System dreier (linearer) Gleichungen schreiben:

  $$\begin{aligned} s_{11}\lambda - s_{21}\mu - s_{31}\nu &= r_{21} - r_{11} \\ s_{12}\lambda - s_{22}\mu - s_{32}\nu &= r_{22} - r_{12} \\ s_{13}\lambda - s_{23}\mu - s_{33}\nu &= r_{23} - r_{13} \end{aligned}$$

  Der Abstand der beiden Geraden ist dann gleich $|\nu| \cdot |\overrightarrow{s_3}|$.

- Es seien $\overrightarrow{r_0}$, $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ drei gegebene Vektoren. Durch die **Parametergleichung**

  $$E : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

  wird die **Ebene** beschrieben, die im Punkt r_0 von den Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ (die natürlich nicht die gleiche Richtung haben dürfen) aufgespannt wird.

- Die **Hessesche Normalform** einer Ebene hat die Gestalt

$$E : (\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n}) = \rho, \quad \text{d.h.} \quad E = \left\{ r \in \mathbb{R}^3 : \langle r, n \rangle = \rho \right\}, \tag{3.5}$$

wobei $\overrightarrow{n}$ eine gegebene Richtung (Stellungsvektor) und $\rho \geq 0$ eine gegebene reelle Zahl sind. Wegen $(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}) = 1$ ist (3.5) äquivalent zu

$$E : (\overrightarrow{r} - \rho\, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}) = 0,$$

woraus sich ergibt, dass ρ gleich dem Abstand der Ebene E vom Koordinatenursprung ist. Ist eine Ebene E in der Form (3.4) gegeben, so erhält man die entsprechende Hessesche Normalform (3.5) auf folgende Weise: Man setzt

$$\overrightarrow{c} := \frac{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|}, \quad \rho = |(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{r_0})|$$

und

$$\overrightarrow{n} = \begin{cases} \overrightarrow{c} & , \quad \text{falls } (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{r_0}) \geq 0, \\ -\overrightarrow{c} & , \quad \text{falls } (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{r_0}) < 0. \end{cases}$$

Ist umgekehrt die Hessesche Normalform (3.5) gegeben, so erhält man eine entsprechende Parametergleichung (3.4), indem man drei Punkte r_0, r_1 und r_2 auf E wählt (die also (3.5) genügen), die nicht auf einer Geraden liegen, und $\overrightarrow{a} := \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}$ sowie $\overrightarrow{b} := \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_0}$ setzt.

Mit $r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ und $n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$ läßt sich (3.5) in der Form

$$n_x x + n_y y + n_z z = \rho$$

schreiben. Für drei beliebig gegebene reelle Zahlen a_x, a_y und a_z, die nicht alle gleich Null sind, beschreibt die Gleichung

$$a_x x + a_y y + a_z z = \rho \quad \text{mit} \quad \rho \geq 0$$

eine Ebene. Die Hessesche Normalform dazu ergibt sich als

$$\frac{a_x}{a}\, x + \frac{a_y}{a}\, y + \frac{a_z}{a}\, z = \frac{\rho}{a}$$

mit $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

- Das **Lot** von einem Punkt $p \notin E$ auf die durch (3.4) gegebene Ebene E kann wie folgt bestimmt werden: Wir suchen den Fußpunkt $p_* \in E$ des Lotes, $\overrightarrow{p_*} = \overrightarrow{r_0} + \lambda_* \overrightarrow{a} + \mu_* \overrightarrow{b}$. Das Lot $\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_*}$ ist parallel zu $\overrightarrow{c} := \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, d.h. es gibt ein $\nu_* \in \mathbb{R}$ mit

$$\overrightarrow{p} - \overrightarrow{r_0} - \lambda_* \overrightarrow{a} - \mu_* \overrightarrow{b} = \nu_* \overrightarrow{c}.$$

Diese Beziehung läßt sich wiederum als (lineares) Gleichungssystem zur Bestimmung von λ_*, μ_* und ν_* schreiben. Der Abstand von p zur Ebene E ist dann gleich $d = |\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_*}|$.

Ist die Ebene E durch (3.5) gegeben, so gilt

$$d = |(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{n}) - \rho|,$$

weil durch

$$E_1 : (\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n}) = (\overrightarrow{p}, \overrightarrow{n})$$

die zu E parallele Ebene durch den Punkt p beschrieben wird.

- Die Parametergleichung (3.2) der **Schnittgeraden** g zweier Ebenen

$$E_1 : (\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n_1}) = \rho_1 \quad \text{und} \quad E_2 : (\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n_2}) = \rho_2$$

ergibt sich aus $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ und einem Punkt r_0 auf g, den man als eine Lösung des (linearen) Gleichungssystems

$$(\overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{n_j}) = \rho_j\,, \quad j = 1, 2\,,$$

erhält.

3.4 Übungsaufgaben

1. Es seien

   (a) **(HA)** $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}^T$, $b = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \end{bmatrix}^T$,

   (b) $a = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$, $b = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$.

   Man berechne $|\overrightarrow{a}|$, $|\overrightarrow{b}|$, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, den Flächeninhalt des Parallelogrammes, welches von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ aufgespannt wird, sowie eine Richtung $\overrightarrow{c}$, die senkrecht zu $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist.

2. Seien $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ Richtungen, die einen Winkel von 30^o einschließen. Man berechne das Skalarprodukt $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.

3. **(HA)** Seien $|\overrightarrow{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{b}| = 4$ und $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ schließen einen Winkel von $\frac{3\pi}{4}$ ein. Man berechne das Skalarprodukt $(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$.

4. **(HA)** Gegeben seien $a = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $b = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$, $d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ und $e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$. Man berechne die Projektionen $\overrightarrow{a}_b$, $\overrightarrow{c}_a$ und $\overrightarrow{c}_d$ sowie $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{e} \times \overrightarrow{d}$.

5. Existieren Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$, die gleichzeitig die Eigenschaften $|\overrightarrow{a}| = 7$, $|\overrightarrow{b}| = 4$ und $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = 30$ besitzen?

6. (a) Man bestimme alle Vektoren, die auf $\overrightarrow{a}$ mit $a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ senkrecht stehen.

   (b) Man bestimme alle Vektoren, die auf $\overrightarrow{a}$ mit $a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ und $\overrightarrow{b}$ mit $b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ senkrecht stehen.

7. Gibt es einen Vektor, der mit den Vektoren $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ je einen Winkel von 45^o einschließt?

8. Man beweise: Ist $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \perp (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$, so gilt $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$.

9. **(HA)** Liegen die Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ mit $a = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}^T$, $b = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}^T$ und $c = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}^T$ in einer gemeinsamen Ebene?

10. Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide habe die Eckpunkte $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ und $C(0,0,6)$. Der Punkt $D(2,3,8)$ sei die Spitze der Pyramide. Man berechne
    (a) den Inhalt der Grundfläche,
    (b) die Höhe der Pyramide,
    (c) den Fußpunkt des Lotes von D auf die Grundfläche und
    (d) das Volumen der Pyramide.

11. Beweisen Sie den Satz des Thales!

12. **(HA)** Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden!

    (Z) Zeigen Sie, dass sich die drei Höhen in einem Dreieck in einem Punkt schneiden.

13. Die Ebene E enthalte die Punkte $A(1,4,0)$, $B(-1,2,3)$ und $C(1,0,0)$. Man berechne
    (a) eine Parametergleichung von E,
    (b) eine parameterfreie Gleichung von E,
    (c) die Gleichung von E in Hessescher Normalform,
    (d) den Abstand des Punktes $P(2,-1,-3)$ von E,
    (e) den Fußpunkt des Lotes von P auf E und
    (f) den Schnittpunkt von E mit der Geraden

$$g = \left\{ \begin{bmatrix} -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

14. **(HA)** Welchen Abstand hat der Punkt $P(16,-9,7)$ von der Ebene durch die Punkte $A(1,4,2)$, $B(0,-2,1)$ und $C(2,1,-1)$? In welchen Punkten schneidet diese Ebene die Koordinatenachsen?

15. Gegeben seien zwei Ebenen E_1 und E_2 : E_1 liegt parallel zur Ebene $x + 2y + 2 = 0$ und enthält den Punkt $P(2,5,-6)$. E_2 enthält die Punkte $Q(1,0,1)$, $R(-1,-2,1)$ und $S(4,1,2)$. Man bestimme
    (a) die Ebenengleichungen von E_1 und E_2,
    (b) die Schnittgerade von E_1 und E_2.

16. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Ebenen

$$E_1 : 2x + y + z - 4 = 0 \quad \text{und} \quad E_2 : x + 2y - z + 3 = 0.$$

17. **(HA)** Man bestimme die Gleichungen der Ebenen, die parallel zur Ebene $2x+2y+z-8=0$ liegen und von ihr den Abstand 4 haben.

18. Berechnen Sie den Abstand der Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad g_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

19. **(HA)** Bestimmen Sie den Abstand der Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 12 & -7 & 3 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} 9 & -8 & 1 \end{bmatrix}^T : t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$g_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T : t \in \mathbb{R} \right\}$$

sowie die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes.

Kapitel 4

Gruppen, Ringe, Körper

4.1 Gruppen, Faktorgruppen

Unter einer **Gruppe** G, genauer $(G,\cdot)$, verstehen wir eine nichtleere Menge G, in der eine binäre Verknüpfung, d.h. eine Abbildung "$\cdot$": $G\times G \longrightarrow G$, $(a,b)\mapsto a\,b$, erklärt ist, die folgende Axiome erfüllt:

(G1) Es gilt das **Assoziativgesetz**, d.h. $(a\,b)c = a(b\,c)$ $\forall a,b,c \in G$.

(G2) Es existiert ein **neutrales Element** $e\in G$, d.h. es gilt $ae = ea = a$ $\forall a \in G$.

(G3) Für jedes $a\in G$ existiert ein **linksinverses Element** $a^{-1}\in G$, d.h. es gilt $a^{-1}a = e$.

Gilt in G das Kommutativgesetz, so heißt G **kommutative** oder **abelsche** Gruppe (Niels Henrik Abel, 1802-1829).

Ist die Verknüpfung mit "$\cdot$" bezeichnet, so nennt man das neutrale Element e auch **Einselement**. Bezeichnet man die Verknüpfung dagegen mit "$+$", so ist es üblich, das neutrale Element mit 0 zu bezeichnen und **Nullelement** zu nennen sowie $-a$ anstelle von a^{-1} zu schreiben.

Beispiel 4.1 *Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen mit der üblichen Addition ist eine abelsche Gruppe.*

Beispiel 4.2 $\mathbb{R}_+ := \{x\in\mathbb{R} : x>0\}$ *mit der üblichen Multiplikation ist eine abelsche Gruppe.*

Beispiel 4.3 *Die Menge E_n der n-ten Einheitswurzeln $\{e_k^{(n)} : k = 0,\ldots,n-1\}$, d.h. die n verschiedenen komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$, $n\in\mathbb{N}$, ist mit der Multiplikation (im Bereich der komplexen Zahlen) eine abelsche Gruppe.*

Eine Reihe von unmittelbaren Folgerungen aus den Axiomen (G1) - (G3) sind im folgenden Satz zusammengefaßt.

Satz 4.4 *Es sei G eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe.*

1. *Dann gibt es in G genau ein neutrales Element e.*

2. *Das linksinverse Element ist eindeutig bestimmt und zugleich rechtsinverses, d.h. es gilt $a^{-1}a = a\,a^{-1} = e$ und somit auch $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ für alle $a\in G$.*

3. *Für gegebene $a,b\in G$ besitzt die Gleichung*

$$a\,x = b \tag{4.1}$$

die eindeutige Lösung $x = a^{-1}b$ *und die Gleichung*

$$y\,a = b \tag{4.2}$$

die eindeutige Lösung $y = b\,a^{-1}$.

Man sieht leicht, dass stets $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ gilt. Wie gewöhnlich erklären wir die ganzzahlige Potenz bzw. das ganzzahlige Vielfache eines Elementes a einer multiplikativ bzw. additiv geschriebenen Gruppe G :

$$a^0 = e\,, \quad a^n = a^{n-1}a\,, \quad a^{-n} = (a^{-1})^n \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

$$0\,a = 0\,, \quad n\,a = (n-1)a + a\,, \quad (-n)a = n(-a)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Eine nichtleere Teilmenge G' einer Gruppe G heißt **Untergruppe** von G, wenn G' mit der in G erklärten Verknüpfung selbst eine Gruppe ist. Im folgenden Satz ist das sogenannte Untergruppenkriterium formuliert.

Satz 4.5 *Eine nichtleere Teilmenge* $G' \subset G$ *einer Gruppe* G *ist genau dann Untergruppe von* G, *wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(U1) Aus $a, b \in G'$ *folgt stets* $a\,b^{-1} \in G'$.

(U2) Aus $a, b \in G'$ *folgt stets* $a\,b \in G'$ *und* $b^{-1} \in G'$.

Im Beispiel 4.1 ist (m) für jedes $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. Die positiven rationalen Zahlen bilden im Beispiel 4.2 eine Untergruppe von $(\mathbb{R}_+, \cdot)$. Die Menge $\{e_0^{(6)}, e_2^{(6)}, e_4^{(6)}\}$ bildet eine Untergruppe der Gruppe $(E_6, \cdot)$ (siehe Beispiel 4.3).

Beispiel 4.6 *Die Menge* S_M *aller bijektiven Abbildungen einer nichtleeren Menge* M *auf sich selbst (vgl.* $S_n = S_{\{1,\ldots,n\}}$ *im Beispiel 1.9) bildet mit der binären Verknüpfung "*$\circ$*":* $G \times G \longrightarrow G$, $(f, g) \mapsto f \circ g$ *eine Gruppe. Dabei ist die identische Abbildung* id_M *das neutrale Element und die Umkehrabbildung* f^{-1} *(siehe Satz 1.7) ist das zu* $f \in S_M$ *inverse Element. Es sei nun* $x \in M$ *beliebig, aber fest gewählt. Die Teilmenge* S_M^x *der Abbildungen* $f \in S_M$ *mit der Eigenschaft* $f(x) = x$ *(man sagt,* x *ist Fixpunkt von* f*) ist eine Untergruppe von* $(S_M, \circ)$. *Zum Beweis verwenden wir Satz 4.5. Es seien* $f, g \in S_M^x$. *Dann folgt* $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = x$, *d.h.* $f \circ g \in S_M^x$. *Aus* $f(x) = x$ *folgt weiter* $x = (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x)$, *also* $f^{-1} \in S_M^x$.

Es seien G und F Gruppen. Eine Abbildung $f : G \longrightarrow F$, $a \mapsto f(a)$ heißt **Morphismus** (genauer: Gruppenmorphismus), wenn $f(a\,b) = f(a)f(b)$ für alle $a, b \in G$ gilt. Ein bijektiver Morphismus $f : G \longrightarrow F$ heißt **Isomorphismus**. Man sagt dann, G und F sind zueinander **isomorph**. Einen Isomorphismus $f : G \longrightarrow G$ nennt man **Automorphismus**.

Beispiel 4.7 *Für* $m \in \mathbb{N}$ *ist die Abbildung* $f_m : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto m\,x$ *ein Morphismus in* $(\mathbb{Z}, +)$, *denn für alle* $x, y \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$f_m(x + y) = m(x + y) = m\,x + m\,y = f_m(x) + f_m(y)\,.$$

Beispiel 4.8 *Es seien* $G = (\mathbb{R}, +)$ *und* $F = (\mathbb{R}_+, \cdot)$. *Dann ist* $f : G \longrightarrow F$, $x \mapsto e^x$ *ein Isomorphismus, weil diese Abbildung bekanntlich bijektiv ist und das Potenzgesetz* $e^{x+y} = e^x e^y$ *gilt.*

Sind $f : G \longrightarrow F$ ein Gruppenmorphismus und e das Einselement in G, so folgt $f(e) = f(e\,e) = f(e)f(e)$, also $e' = (f(e))^{-1}f(e) = f(e)$, wobei e' das Einselement in F ist. Die Menge

$$\ker f := \{x \in G : f(x) = e'\}$$

heißt **Kern** des Morphismus f .

Satz 4.9 *Ist* $f : G \longrightarrow F$ *ein Gruppenmorphismus, so sind* $\ker f$ *und* $f(G)$ *Untergruppen von* G *bzw.* F.

Es gilt

$$f(y)^{-1} = f(y^{-1}) \quad \forall y \in G\,.$$

Für eine Untergruppe $G' \subset G$ definieren wir die **Rechtskongruenz modulo** G' durch

$$\forall x, y \in G : \quad x \overset{G'}{\sim} y \iff xy^{-1} \in G'\,.$$

Beispiel 4.10 $G = (\mathbb{Z}, +)$, $G' = (m)$, $x \overset{G'}{\sim} x \iff x + (-y) = x - y \in (m)$. *Wir erhalten also Beispiel 1.11 aus Abschnitt 1.3.*

Satz 4.11 *Die Rechtskongruenz modulo* G' *ist eine Äquivalenzrelation in* G, *und es gilt* $[x]_\sim = G'x := \{y\,x : y \in G'\} =: [x]_{G'}$.

Eine Untergruppe G' einer Gruppe G heißt **Normalteiler**, wenn die Bedingung

$$g\,G'g^{-1} := \{g\,x\,g^{-1} : x \in G'\} \subset G' \quad \forall g \in G$$

erfüllt ist.

Beispiel 4.12 (m) *ist Normalteiler von* $(\mathbb{Z}, +)$, *da* $(\mathbb{Z}, +)$ *abelsch ist.*

Satz 4.13 *Es sei* G' *Normalteiler von* G. *Wir definieren*

$$[x]_{G'}[y]_{G'} := [x\,y]_{G'}\,.$$

Dann ist die Menge $G/G' := \{[x]_{G'} : x \in G\}$ *der Äquivalenzklassen modulo* G' *mit der eben definierten Verknüpfung eine Gruppe, die sog.* **Faktorgruppe** *modulo* G'.

Beispiel 4.14 $\mathbb{Z}/(m)$ *ist mit der Verknüpfung* $[x]_m + [y]_m = [x+y]_m$ *eine Gruppe, die (additive) Gruppe der Restklassen modulo* m.

Satz 4.15 (Homomorphiesatz für Gruppen) *Es sei* $f : G \longrightarrow F$ *ein Gruppenmorphismus. Dann ist* $\ker f$ *ein Normalteiler von* G, *und die Abbildung*

$$\Phi : G/\ker f \longrightarrow f(G)\,, \quad [x]_{\ker f} \mapsto f(x)\,,$$

ist ein Isomorphismus.

Beispiel 4.16 $f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (E_m, \cdot)$, $x \mapsto e_r^{(m)}$, *falls* $r = r(x)$ $(0 \le r < m)$ *der Rest von* x *bei Division durch* m *ist. Dann sind* $\ker f = (m)$ *ein Normalteiler und* $\Phi : \mathbb{Z}/(m) \longrightarrow E_m$, $[x]_m \mapsto e_{r(x)}^{(m)}$, *ein Isomorphismus.*

Zur **Wiederholung** einiger Begriffe betrachten wir die additive Gruppe $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$ der ganzen Zahlen und die Gruppe $S_{[0,1]} = (S_{[0,1]}, \circ)$ der bijektiven Abbildungen des Intervals $[0,1]$ auf sich selbst (vgl. Beispiel 4.6). $\mathbb{Z}$ ist eine abelsche, d.h. kommutative Gruppe, $S_{[0,1]}$ dagegen nicht. Das neutrale Element in $\mathbb{Z}$ ist die Null, in $S_{[0,1]}$ ist es die identische Abbildung $id_{[0,1]}$. Die Rolle des inversen Elementes spielt in $\mathbb{Z}$ die entgegengesetzte Zahl und in $S_{[0,1]}$ die Umkehrabbildung. Eine Untergruppe G' in $\mathbb{Z}$ ist z.B. die Menge (5) der durch 5 teilbaren Zahlen und in $S_{[0,1]}$ die Menge $S_{[0,1]}^{\frac{1}{2}}$ der bijektiven Abbildungen $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ mit $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Betrachten wir nun die entsprechende Rechtskongruenz modulo G'. Es gilt

$$m \overset{(5)}{\sim} n \iff m - n \quad \text{ist durch 5 teilbar}$$

und

$$f \overset{S_{[0,1]}^{\frac{1}{2}}}{\sim} g \iff f(\tfrac{1}{2}) = g(\tfrac{1}{2}) .$$

Die dazugehörigen Äquivalenzklassen in $\mathbb{Z}$ sind die Restklassen modulo (5) :

$[0]_5\,,\ [1]_5\,,\ [2]_5\,,\ [3]_5\,,\ [4]_5\,.$

In $S_{[0,1]}$ gibt es bzgl. der Rechtskongruenz modulo $S_{[0,1]}^{\frac{1}{2}}$ so viele Äquivalenzklassen wie reelle Zahlen im Intervall $[0,1]$, nämlich

$$[x]_{\frac{1}{2}} := \left\{ f \in S_{[0,1]} : f(\frac{1}{2}) = x \right\} , \quad x \in [0,1] .$$

Die Untergruppe (5) ist Normalteiler in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/(5)$ ist die additive Gruppe der Restklassen modulo (5), wobei

$[r]_5 + [s]_5 = [r+s]_5$

gilt. $S_{[0,1]}^{\frac{1}{2}}$ ist **kein** Normalteiler in $S_{[0,1]}$. Für $f(x) = 1 - x$, d.h. $f \in S_{[0,1]}^{\frac{1}{2}}$, und $g(x) = \sqrt{x}$ ist z.B. $(g \circ f \circ g^{-1})(\frac{1}{2}) = g(f(g^{-1}(\frac{1}{2}))) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{1}{2}$, also $g\,f\,g^{-1} \notin S_{[0,1]}^{\frac{1}{2}}$.

4.2 Ringe und Körper

Eine Menge R mit mindestens zwei Elementen heißt **Ring**, wenn auf R zwei binäre Verknüpfungen "+": $R \times R \longrightarrow R$, $(x,y) \mapsto x + y$, und "·": $R \times R \longrightarrow R$, $(x,y) \mapsto x\,y$, erklärt sind, die folgenden Axiomen genügen:

(R1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe (mit dem Nullelement 0).

(G1) Die Multiplikation ist assoziativ.

(G2) Bzgl. der Multiplikation existiert ein Einslelement $e = 1$.

(R2) Es gelten die Distributivgesetze

$$x(y+z) = x\,y + x\,z \quad \text{und} \quad (x+y)z = x\,z + y\,z \quad \forall x, y, z \in R .$$

Ist die Multiplikation kommutativ, so sprechen wir von einem **kommutativen Ring**. Ist $(R^*, \cdot)$ mit $R^* := R \setminus \{0\}$ eine kommutative Gruppe, so heißt R **Körper**.

Beispiel 4.17 *Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ist ein kommutativer Ring, aber kein Körper. Beispiele für Körper sind die Mengen der rationalen, der reellen und der komplexen Zahlen mit den üblichen Operationen. Die Menge der Polynome $\mathbb{C}[z]$ ist mit der üblichen Addition und Multiplikation von Funktionen ein kommutativer Ring, aber kein Körper.*

Aus den Axiomen ergeben sich folgende Rechenregeln in einem Ring R :

1. Aus $0\,x + x^2 = (0 + x)x = x\,x = x^2$ folgt $0\,x = 0$ und analog $x\,0 = 0$ für alle $x \in R$.
2. Hieraus ergibt sich $0 = (y + (-y))x = y\,x + (-y)\,x$, also $-(y\,x) = (-y)x$ und analog $-(y\,x) = y(-x)$ für alle $x, y \in R$.
3. Ist R ein Körper, so folgt aus $x\,y = 0$ stets $x = 0$ oder $y = 0$, da $x \in R^*$ und $y \in R^*$ stets $x\,y \in R^*$ zur Folge hat.

4. Es seien R ein Körper, $x \in R$ und $x^2 = 1$. Dann folgt $0 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, also $x = -1$ oder $x = 1$.

Beispiel 4.18 *$\mathbb{Z}/(m)$ ist mit $[x]_m + [y]_m := [x+y]_m$ und $[x]_m[y]_m := [x\,y]_m$ ein kommutativer Ring, der Restklassenring modulo m. $(\mathbb{Z}/(m), +)$ ist nämlich eine abelsche Gruppe und die Multiplikation ist korrekt erklärt:*

Aus $[x']_m = [x]_m$ und $[y']_m = [y]_m$ folgt $x = x' + a\,m$ und $y = y' + b\,m$ mit gewissen ganzen Zahlen a und b. Dann ist aber $x\,y = x'y' + m(a\,y' + b\,x' + a\,b\,m)$, also $[x'y']_m = [x\,y]_m$.

(A) Jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ läßt sich in der Form (m) schreiben, wobei $m \in \mathbb{N}$.

(B) Sind $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd, d.h. $ggT(p,q) = 1$, so existieren ganze Zahlen x und y mit $p\,x + q\,y = 1$.

(C) Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(m)$ $(m \in \mathbb{N},\ m \geq 2)$ ist genau dann ein Körper, wenn m eine Primzahl ist.

4.3 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie mit Hilfe einer Gruppentafel, dass die vierten Einheitswurzeln bzgl. der gewöhnlichen Multiplikation komplexer Zahlen eine kommutative Gruppe $(E_4, \cdot)$ bilden. Dabei versteht man unter einer Gruppentafel ein quadratisches Schema, aus dem die Verknüpfungen von je zwei Elementen der Gruppe erkennbar sind, also z.B.

	a_1	a_2	$\cdots$
a_1	a_1a_1	a_1a_2	$\cdots$
a_2	a_2a_1	a_2a_2	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

2. Geben Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen an, die aus 2, 3 bzw. 4 Elementen bestehen.

3. Stellen Sie die Verknüpfungstafeln für $(\mathbb{Z}/(4), +)$ und $(\mathbb{Z}/(4), \cdot)$ auf, und erläutern Sie anhand dieser Tafeln, weshalb der Restklassenring $(\mathbb{Z}/(4), +, \cdot)$ kein Körper ist.

4. (a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel für die Permutationsgruppe $(S_3, \circ)$ aller Permutationen aus drei Elementen auf.
   (b) **(HA)** Ist diese Gruppe kommutativ?
   (c) **(HA)** Geben Sie alle kommutativen Untergruppen der $(S_3, \circ)$ an.

5. Es seien $(A, \circ_1)$ und $(B, \circ_2)$ Gruppen. Zeigen Sie, dass
   (a) $G = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$ mit der Verknüpfung $(a,b) \circ (\widetilde{a}, \widetilde{b}) := (a \circ_1 \widetilde{a}, b \circ_2 \widetilde{b})$ eine Gruppe ist,
   (b) die Gruppe $(A, \circ_1)$ isomorph zu der Untergruppe $(\widetilde{A}, \circ)$ von $(G, \circ)$ mit
   $$\widetilde{A} = \{(a, e_B) : a \in A\} \subset G$$
   ist, wobei e_B das Einselement in B bezeichnet.

6. (a) Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass $\varphi_g : G \longrightarrow G$, $x \mapsto g^{-1}x\,g$ für jedes fest gewählte $g \in G$ ein Automorphismus (**innerer Automorphismus** genannt) ist.

   (b) **(HA)** Zeigen Sie, dass die inneren Automorphismen einer Gruppe G mit der Komposition $(\varphi \diamondsuit \psi)(x) = \psi(\varphi(x))$ eine Gruppe $(G_{\text{aut}}, \diamondsuit)$ bilden.

7. Es seien G eine Gruppe und $\varphi : G \longrightarrow G$ definiert durch $\varphi(x) = x^2$. Beweisen Sie, dass φ genau dann ein Morphismus ist, wenn G eine kommutative Gruppe ist.

8. Es sei $(S_\triangle, \circ)$ die Bewegungsgruppe eines gleichseitigen Dreiecks.

   (a) Stellen Sie die Gruppentafel auf.

   (b) Geben Sie alle Untergruppen an.

   (c) Geben Sie alle Normalteiler an.

9. **(HA)** Lösen Sie die Aufgabe 8 für die Bewegungsgruppe $(S_\square, \circ)$ eines Quadrates.

10. Es seien die Gruppen $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto |x|$ ein surjektiver Morphismus mit dem Kern $\ker f = \{-1, +1\}$ ist.

11. Seien $(G_1, \circ_1)$, $(G_2, \circ_2)$ Gruppen und $f : G_1 \to G_2$ Gruppenmorphismus, e_1 bezeichne das neutrale Element in G_1. Zeigen Sie, dass f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $f(G_1) = G_2$ und $\ker f = \{e_1\}$.

12. **(HA)** Sei N ein Normalteiler der Gruppe G und f ein Automorphismus. Zeigen Sie, dass $f(N)$ wieder ein Normalteiler von G ist.

13. **(HA)** Seien M eine nichtleere Menge, R ein Ring und F die Menge aller Abbildungen $f : M \to R$. Wir versehen F mit den (punktweise definierten) Verknüpfungen

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (fg)(x) := f(x)g(x) \quad \forall\, x \in M.$$

    Zeigen Sie, dass F ein Ring ist.

14. $\mathbb{P}$ sei die Menge aller Polynome der Gestalt $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, mit der binären Operation $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

    (a) Untersuchen Sie, ob $(\mathbb{P}, +, \circ)$ ein Ring ist.

    (b) Welche Teilmenge $\mathbb{P}_0$ von $\mathbb{P}$ ist bzgl. der Verknüpfung "$\circ$" eine Gruppe? Ist diese kommutativ?

    (c) Ist $(\mathbb{P}_1, \circ)$ mit $\mathbb{P}_1 = \{f \in \mathbb{P}_0 : f(1) = 1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{P}_0, \circ)$?

Kapitel 5

Vektorräume und lineare Abbildungen

5.1 Moduln und Vektorräume, der Begriff der Basis

Es seien R ein Ring und $(V,+)$ eine abelsche Gruppe. Ferner sei eine Verknüpfung "$\cdot$": $R \times V \longrightarrow V$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha\, x$ erklärt. V heißt R-**Modul** (oder Modul über R), wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(M1) $(\alpha + \beta)x = \alpha\, x + \beta\, x \quad \forall \alpha, \beta \in R\,, \forall x \in V\,,$

(M2) $\alpha(x+y) = \alpha\, x + \alpha\, y \quad \forall \alpha \in R\,, \forall x, y \in V\,,$

(M3) $\alpha(\beta\, x) = (\alpha\, \beta)x \quad \forall \alpha, \beta \in R\,, \forall x \in V\,,$

(M4) $1\, x = x \quad \forall x \in V\,.$

Ist R ein Körper, so nennt man V einen R-**Vektorraum** (oder Vektorraum über R, oder linearen Raum über R).

Die Elemente von R heißen **Skalare** (Zahlen), die von V **Vektoren**. Die Abbildung $(\alpha, x) \mapsto \alpha\, x$ nennt man Multiplikation eines Skalars α mit einem Vektor x. In (M4) ist 1 das Einselement in R (die "Zahl" 1). Mit 0 bezeichnen wir das neutrale Element in $(R,+)$, mit Θ das in $(V,+)$. Man **beachte**: Das „+“ in $\alpha + \beta$ ist i.a. etwas völlig anderes als das „+“ in $x + y$.

Beispiel 5.1 *R sei ein Ring und*

$$V = R^n = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_j \in R\,,\ j = 1, 2, \ldots, n \right\}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

(Wir schreiben einen Vektor x auch in der Form $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$.) Für Vektoren

$$x = [x_1, \ldots, x_n]^T \in V \quad \text{und} \quad y = [y_1, \ldots, x_n]^T \in V$$

definieren wir

$$x + y := [x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n]^T$$

und für $\alpha \in R$

$$\alpha\, x := [\alpha\, x_1, \ldots, \alpha\, x_n]^T .$$

Dann ist V ein R-Modul, wobei $\Theta = [0, \ldots, 0]^T$. Uns bereits gut bekannte Beispiele sind der anschauliche dreidimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$ bzw. die zweidimensionale Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der Vektoraddition und der skalaren Multiplikation eines Vektors.

Beispiel 5.2 *Es seien M eine beliebige nichtleere Menge und R ein Ring. Mit R^M bezeichnen wir den R-Modul aller Abbildungen $f : M \longrightarrow R$, $m \mapsto f(m)$, versehen mit den Verknüpfungen*

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m) \quad \text{und} \quad (\alpha\, f)(m) := \alpha\, f(m) \quad \forall m \in M ,$$

wobei $f, g \in R^M$ und $\alpha \in R$. Man beachte, dass mit dieser Definition gilt: $R^n = R^{\{1,\ldots,n\}}$.

In einem R-Modul gelten folgende Rechenregeln ($x \in V$, $\alpha \in R$):

1. $x = 1\, x = (1+0)x = 1\, x + 0\, x = x + 0\, x \quad \Rightarrow \quad 0\, x = \Theta$.
2. $\Theta = 0\, x = (1 + (-1))x = 1\, x + (-1)x = x + (-1)x \quad \Rightarrow \quad (-1)x = -x$.
3. $\alpha\, \Theta = \alpha(x + (-x)) = \alpha\, x + \alpha(-x) = \alpha\, x + \alpha(-1)x = (\alpha + (-\alpha))x = \Theta$.

$V' \subset V$ heißt **Untermodul**, wenn eine der folgenden (äquivalenten) Bedingungen erfüllt ist:

(U1) Aus $x, y \in V'$ und $\alpha \in R$ folgt stets $x + y \in V'$ und $\alpha\, x \in V'$.

(U2) Aus $x, y \in V'$ und $\alpha, \beta \in R$ folgt stets $\alpha\, x + \beta\, y \in V'$.

Satz 5.3 *Sind V_k', $k = 1, \ldots, m$, Untermoduln von V, so ist auch ihr Durchschnitt $V' = \bigcap\limits_{k=1}^{m} V_k'$ ein Untermodul von V.*

Sind V_k', $k = 1, \ldots, m$, Untermoduln von V, so bezeichnen wir mit $\sum\limits_{k=1}^{m} V_k'$ die **Summe** dieser Untermoduln:

$$\sum_{k=1}^{m} V_k' := \left\{ x_1 + x_2 + \ldots + x_m : x_k \in V_k' \right\} .$$

Folgt dabei aus $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \Theta$, $x_k \in V_k'$ stets $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = \Theta$, so heißt $\sum\limits_{k=1}^{m} V_k'$ die **direkte Summe** der Untermoduln V_k' und wird mit $\bigoplus\limits_{k=1}^{m} V_k'$ bezeichnet.

Satz 5.4 *Die Summe von Untermoduln ist wieder ein Untermodul.*

Beispiel 5.5 *Untermoduln des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$ unserer Anschauung sind der $\mathbb{R}^3$ selbst, alle Geraden und Ebenen, die den Nullpunkt Θ enthalten, und der Nullpunkt $\{\Theta\}$. Die (direkte) Summe zweier verschiedener Geraden durch den Nullpunkt ist die von diesen Geraden aufgespannte Ebene.*

Es seien V ein R-Modul und $E \subset V$, $E \neq \emptyset$. Die Menge

$$\mathcal{L}[E] := \left\{ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k : \alpha_k \in R,\ x_k \in E\,,\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

heißt **lineare Hülle** der Menge E . Ein Element

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m$$

heißt **Linearkombination** der Elemente x_k , $k = 1, \ldots, m$. E nennt man **Erzeugendensystem** von V , wenn $\mathcal{L}[E] = V$ gilt.

Beispiel 5.6 *Wir betrachten wieder den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ unserer Anschauung. Für $x \neq \Theta$ ist $\mathcal{L}[\{x\}]$ gleich der Geraden durch Θ und x . Falls x , y und Θ nicht auf einer Geraden liegen, ist $\mathcal{L}[\{x, y\}]$ die Ebene durch die Punkte x , y und Θ . Liegen x , y , z und Θ nicht in einer Ebene, so ist $\mathcal{L}[\{x, y, z\}] = \mathbb{R}^3$.*

Es seien V ein R-Modul und $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset V$. Das System E heißt **linear unabhängig**, wenn aus $\alpha_k \in R$, $k = 1, 2, \ldots, m$, und

$$\Theta = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$$

mit Notwendigkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ folgt. Sonst heißt das System **linear abhängig**.

Beispiel 5.7 *Das System $\{[1, 0, 0]^T, [0, 1, 0]^T, [0, 0, 1]^T\} \subset \mathbb{R}^3$ ist linear unabhängig. Das System $\{[1, -1, 0]^T, [-2, 2, 0]^T\} \subset \mathbb{R}^3$ ist linear abhängig, denn es gilt*

$$2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Satz 5.8 *Ein System $E = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn sich jedes $x \in \mathcal{L}[E]$ auf* **eindeutige** *Weise in der Form*

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k\,, \quad \alpha_k \in R \tag{5.1}$$

darstellen läßt.

Im weiteren sei V ein R-Vektorraum. Ein System $E = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset V$ heißt **Basis** von V , wenn E linear unabhängig und Erzeugendensystem von V ist. Die Zahl m nennt man dann **Dimension** des Vektorraumes V .

Beispiel 5.9 *Es gilt $\dim \mathbb{R}^n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Es gibt Vektorräume, die keine endliche Dimension haben. Betrachten wir z.B. den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}[z]$ der Polynome in der Variablen $z \in \mathbb{C}$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$. Das System $\{1, z, z^2, \ldots, z^m\}$ ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ linear unabhängig, denn wir wissen, dass jedes Polynom $p(z) \not\equiv 0$ aus $\mathcal{L}[E]$ höchstens m verschiedene Nullstellen hat.*

Aus dem Satz 5.8 folgt, dass jedes $x \in V$ bei gegebener Basis $E = \{x_1, \ldots, x_m\}$ auf eindeutige Weise in der Form (5.1) darstellbar ist. Die $\alpha_k \in R$ in Formel (5.1) nennt man die **Koeffizienten von x in der Basis E**. Im Abschnitt 5.3 beschäftigen wir uns noch etwas ausführlicher mit endlichdimensionalen Vektorräumen, insbesondere mit der Frage, ob der Begriff der Dimension korrekt definiert ist, d.h. unabhängig von der Wahl der Basis.

Bemerkungen

1. Jedes System, in dem das Nullelement Θ enthalten ist, ist linear abhängig.
2. Aus $x \in \mathcal{L}[\{b_1, \ldots, b_m\}]$ folgt stets die lineare Abhängigkeit von $\{x, b_1, \ldots, b_m\}$.
3. Ist das System $\{b_1, \ldots, b_m\}$ linear unabhängig, so ist das System $\{x, b_1, \ldots, b_m\}$ genau dann linear abhängig, wenn $x \in \mathcal{L}[\{b_1, \ldots, b_m\}]$ gilt.

5.2 Lineare Abbildungen

Im Falle von Moduln haben die Morphismen, d.h. die strukturverträglichen Abbildungen, einen besonderen Namen. Eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ zwischen den R-Moduln V und W heißt **linear**, wenn für alle $x, y \in V$ und jedes $\alpha \in R$ gilt

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

(d.h. $f : (V, +) \longrightarrow (W, +)$ ist ein Gruppenmorphismus) und

$$f(\alpha\, x) = \alpha\, f(x)\,.$$

Diese beiden Bedingungen lassen sich auch zu der Bedingung

$$f(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, f(x) + \beta\, f(y)\,, \quad \forall x, y \in V\,,\ \forall \alpha, \beta \in R$$

zusammenfassen.

Beispiel 5.10 *Es seien R ein Ring und $V = R^n$ (vgl. Beispiel 5.1). Dann ist*

$$pr_k : R^n \longrightarrow R\,, \quad [x_1, \ldots, x_n]^T \mapsto x_k$$

eine lineare Abbildung.

Beispiel 5.11 *Es seien R ein Ring und M eine beliebige nichtleere Menge (vgl. Beispiel 5.2). Dann ist für festes $a \in M$ die Abbildung $E_a : R^M \longrightarrow R$, $f \mapsto f(a)$ eine lineare Abbildung.*

Satz 5.12 *Ist $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung, so sind der Kern von f*

$$\ker f := \{x \in V : f(x) = \Theta\}$$

und das Bild $f(V)$ Untermoduln von V bzw. W.

Satz 5.13 *Sind $f : U \longrightarrow V$ und $g : V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen, so ist auch $g \circ f : U \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.*

Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt **linearer Isomorphismus**. Die R-Moduln V und W nennt man dann zueinander **isomorph**. Ist $V = W$, so nennt man einen linearen Isomorphismus $f : V \longrightarrow V$ auch **linearen Automorphismus**. Die Menge aller linearen Automorphismen eines R-Moduls V bildet eine Untergruppe von S_V (vgl. Beispiel 4.6). Diese wird mit $GL(V)$ bezeichnet. Die Menge aller linearen Abbildungen $f : V \longrightarrow W$ bezeichnen wir mit $L(V, W)$, im Fall $V = W$ mit $L(V)$. Wir bemerken, dass eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ genau dann injektiv ist, wenn $\ker f = \{\Theta\}$ gilt.

Sind V ein R-Modul und $U \subset V$ ein Untermodul, so ist nach Satz 4.13 die Faktorgruppe V/U eine abelsche Gruppe. Wir definieren das Produkt $\alpha[x]$ für $\alpha \in R$ und $[x] \in V/U$ durch $\alpha[x] := [\alpha\, x]$. Diese Definition ist korrekt, denn aus $[x'] = [x]$ folgt $x' - x \in U$, also auch $\alpha(x' - x) = \alpha\, x' - \alpha\, x \in U$, d.h. $[\alpha\, x'] = [\alpha\, x]$. Die Gültigkeit der Modulaxiome in V/U folgt nun leicht aus der Gültigkeit dieser Axiome in V, so dass V/U ein R-Modul ist.

Satz 5.14 (Homomorphiesatz für Module) *Ist $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung, so ist*

$$\Phi : V/\ker f \longrightarrow f(V)\,, \quad [x] \mapsto f(x)$$

ein Isomorphismus.

Wir wenden Satz 5.14 auf die Beispiele 5.10 und 5.11 an.

Beispiel 5.15 *Der Kern der Abbildung $pr_k : R^n \longrightarrow R$, $x \mapsto x_k$ ist gleich der Menge*

$$\left\{x = [x_1, \dots, x_n]^T \in R^n : x_k = 0\right\} .$$

Ferner ist $pr_k(R^n) = R$. Aus Satz 5.14 folgt nun, dass $R^n/\ker pr_k$ und R zueinander isomorph sind.

Beispiel 5.16 *Der Kern der Abbildung $E_a : R^M \longrightarrow R$, $f \longrightarrow f(a)$ ist gegeben durch*

$$\ker f = \left\{f \in R^M : f(a) = 0\right\} .$$

Außerdem ist wieder $E_a(R^M) = R$ und somit $R^M/\ker E_a$ isomorph zu R.

5.3 Endlichdimensionale Vektorräume, lineare Komplemente

Es sei jetzt V ein K-Vektorraum endlicher Dimension. Aus den Überlegungen im Abschnitt 5.1 folgt, dass ein System $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ genau dann Basis in V ist, wenn sich jeder Vektor $x \in V$ auf eindeutige Weise als Linearkombination

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k$$

darstellen läßt. Das folgende Lemma beschreibt, wie man in einer Basis einen Vektor gegen einen anderen austauschen kann.

Lemma 5.17 *Es seien $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ eine Basis in V und $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k b_k$ mit $\alpha_j \neq 0$. Dann ist auch $(B \setminus \{b_j\}) \cup \{x\}$ eine Basis in V.*

Mit dem folgenden Satz bestätigen wir die Korrektheit der Definition der Dimension eines Vektorraumes aus Abschnitt 5.1.

Satz 5.18 *Ist $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis in V, so besteht jede Basis von V aus genau m Vektoren.*

Ist $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis in V, so kann man die Abbildung

$$\Phi_B : V \longrightarrow K^m\,, \quad x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k \mapsto [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]^T$$

betrachten und erhält folgenden Satz (vgl. Beispiel 5.1).

Satz 5.19 *Jeder K-Vektorraum der Dimension m ist isomorph zu K^m.*

Satz 5.20 *Sind $\Phi : V \longrightarrow W$ ein Isomorphismus und $\{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Basis in V, so ist $\{\Phi(b_1), \ldots, \Phi(b_m)\}$ eine Basis in W. (Insbesondere haben also zueinander isomorphe Vektorräume die gleiche Dimension.)*

Ein K-Vektorraum wird auch linearer Raum über K genannt (vgl. Abschnitt 5.1), und im Falle eines Vektorraumes nennt man einen Untermodul auch linearen Unterraum oder linearen Teilraum. Ist $U \subset V$ ein linearer Unterraum, so heißt ein linearer Unterraum U' (direktes) **Komplement** von U, wenn $U \cap U' = \{\Theta\}$ und $U + U' = V$ gilt, d.h. wenn $V = U \oplus U'$ ist. In einem solchen Fall kann man jeden Vektor $x \in V$ auf eindeutige Weise in der Form $x = x_u + x'_u$ mit $x_u \in U$ und $x'_u \in U'$ darstellen. Man nennt x_U die **Projektion** von x auf den Unterraum U parallel zu U'.

Satz 5.21 *Es sei U ein linearer Teilraum des endlichdimensionalen Vektorraumes V.*

(a) Dann existiert stets ein Komplement U' zu U.

(b) Ist U' ein Komplement zu U, so ist V/U isomorph zu U'.

(c) Sind $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung und $U = \ker f$ sowie U' ein Komplement zu U, so ist $\widetilde{f} : U' \longrightarrow f(V)$, $x \mapsto f(x)$ ein Isomorphismus.

(d) Ist U' Komplement von U, so gilt $\dim V = \dim U + \dim U'$.

V/U heißt **Quotientenraum** (vgl. Satz 5.21(b)), und $\operatorname{codim} U := \dim V/U = \dim U'$ nennt man die **Kodimension** von U.

Theorem 5.22 *Für eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ gilt*

$$\dim \ker f + \dim f(V) = \dim V\,.$$

Satz 5.23 *Es seien U und U' beliebige Teilräume des Vektorraumes V. Dann gilt*

$$\dim U + \dim U' = \dim(U \cap U') + \dim(U + U')\,.$$

Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

5. Übung

1. Es seien

   (a) $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ die Menge aller positiven reellen Zahlen,

   (b) $\mathbb{R}_n[t] := \{p(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j t^j : a_j \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Polynome vom Grade $\leq n$, deren Koeffizienten reelle Zahlen sind.

   Sind diese Mengen mit den folgenden Operationen Vektorräume über $\mathbb{R}$:

   (a) $x + y := xy$ und $\lambda x := x^\lambda$,

   (b) $(p+q)(t) := -p(t) - q(t)$ und $(\lambda p)(t) := p(\lambda t)$.

2. Im Raum $C[0,1]$ der auf $[0,1]$ definierten, reellwertigen und stetigen Funktionen werden die Operationen $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ und $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ erklärt. Man überprüfe folgende Funktionensysteme auf lineare Unabhängigkeit:

   (a) $\left\{1, e^x, e^{2x}\right\}$, (b) $\left\{1, \cos x, \cos 2x, \cos^2 x\right\}$,

   (c) **(HA)** $\{1, \sin x, \cos x\}$, (d) **(HA)** $\{\sin x, \cos x, \tan x\}$.

   Zusatz: Zeigen Sie die lineare Unabh. von $\{\sin kx\,,\ k = 0, \ldots, N\}$ im Raum $C[0, 2\pi]$.

3. Es seien $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sowie $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Man zeige, dass jedes Element von $\mathbb{R}^2$ eine Linearkombination von g_1 und g_2 ist.

   (b) **(HA)** Stellen Sie die Vektoren $e_1 + 2\,e_2$ und $e_1 - 2\,e_2$ in der Basis $\{g_1, g_2\}$ dar.

4. Seien $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Man zeige, dass sowohl $\{e_1, e_2, e_3\}$ als auch $\{g_1, g_2, g_3\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden und stelle $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ in beiden Basen dar.

   (b) **(HA)** Ist das System $\{g_1, g_1 + g_2, g_2 + g_3\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$?

5. Es seien $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ und $b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

   (a) Man ergänze die Vektoren a und b zu einer Basis im $\mathbb{R}^3$.

   (b) Geben Sie alle Vektoren $c \in \mathbb{R}^3$ an, die zusammen mit a und b eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden.

6. **(HA)** Es seien R ein Ring und M, N nichtleere Mengen mit $N \subset M$. Man zeige, dass die Menge $\left\{f \in R^M : f(x) = 0 \quad \forall x \in N\right\}$ ein Untermodul von R^M ist.

7. Es sei $\mathbb{R}_n[t]$ wie oben definiert, und es seien $\mathbb{G}_n[t] = \{p(t) \in \mathbb{R}_n[t] : p(-t) = p(t)\}$ und $\mathbb{U}_n[t] = \{p(t) \in \mathbb{R}_n[t] : p(-t) = -p(t)\}$. Man zeige, dass $\mathbb{R}_n[t] = \mathbb{G}_n[t] \bigoplus \mathbb{U}_n[t]$ gilt.

   (HA) Sei $M = \{p(t) \in \mathbb{R}_n[t] : p(0) = p(1) = 0\}$. Berechnen Sie die Dimension von M.

8. **(HA)** Für welche reellen Zahlen a, b, c, d, e, f bilden folgende Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & d & e \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & f \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

9. **(HA)** Für welche reellen Zahlen λ sind die folgenden Vektoren linear unabhängig:
$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & -2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} \lambda & -4 & \lambda^3+2\lambda+1 \end{bmatrix}^T$$

10. Man untersuche die folgenden Abbildungen auf Linearität:
    (a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R}^3 \text{ konstant})$
    (b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto x + a \quad (a \in \mathbb{R}^3 \text{ konstant})$
    (c) **(HA)** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ konstant})$
    (d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1, [x_1, x_2, x_3]^T \mapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3$
    (e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1, [x_1, x_2, x_3]^T \mapsto x_1^2 + 2x_2 + 3x_3$
    (f) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, [x_1, x_2]^T \mapsto [x_1 + x_2, x_1 - x_2]^T$
    (g) **(HA)** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, [x_1, x_2]^T \mapsto [x_1^2 - x_2^2, 0]^T$
    (h) **(HA)** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, [x_1, x_2]^T \mapsto [(x_1 + 1)^2 - (x_1 - 1)^2, 0]^T$

    Zusatz: Im Falle der Linearität gebe man die Matrixdarstellung der Abbildung f (siehe Abschnitt 6.1) bezüglich der kanonischen Basis an.

11. Man bestimme $\ker f$ und **(HA)** die Matrixdarstellung (siehe Abschnitt 6.1) bezüglich der kanonischen Basis für folgende lineare Abbildungen:
    (a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, [x_1, x_2]^T \mapsto [x_1, 0]^T$
    (b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, [x_1, x_2]^T \mapsto [-x_2, x_1]^T$
    (c) $f : \mathbb{R}_n[t] \longrightarrow \mathbb{R}_n[t], p(t) \mapsto p'(t) \quad (p'(t)$ bezeichnet die Ableitung von $p(t)$ nach $t)$
    (d) $f : \mathbb{R}_n[t] \longrightarrow \mathbb{R}, p(t) \mapsto p(0)$

12. Die Menge $T_n = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} a_k t^k : a_k \in \mathbb{C},\ t = \cos\varphi + \mathbf{i} \sin\varphi \right\}$ der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n \in \mathbb{N}$ betrachten wir als Teilmenge des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ der Abbildungen $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ den Einheitskreis bezeichnet. Man zeige, dass T_n ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist und bestimme dessen Dimension.

13. Man bestimme die Dimension des $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-Vektorraumes der komplexen Zahlen, versehen mit der dort üblichen Addition und
    (a) der üblichen Multiplikation mit reellem λ,
    (b) der üblichen Multiplikation mit komplexem λ.

    Man gebe jeweils eine Basis an und stelle die Zahl $z = \dfrac{3 + \mathbf{i}}{5 - 2\mathbf{i}}$ in dieser Basis dar.

14. Man gebe die Matrixdarstellung (bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$) folgender linearer Operatoren an:
    (a) Drehung der Ebene um den Winkel φ um den Ursprung,
    (b) Spiegelung an der Achse die durch den Ursprung geht und mit der positiven x-Achse den Winkel ψ einschliet.

    Zeigen Sie: Jede Drehung der Ebene kann als Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen erzeugt werden.

15. **(HA)** Man zeige, dass $B = \{(t-1)^2, t^2, (t+1)^2\}$ eine Basis des $\mathbb{R}_2[t]$ ist und (**Zusatz**) bestimme die Matrixdarstellung des Differentialoperators bezüglich dieser Basis.

Index