Prüfungskomplexe zur Vorlesung Orthogonale Polynome, WS 2018/19

1. Erklären Sie die Begriffe Momentenfunktional und orthogonales Polynomsystem (OPS), monisches OPS, positiv definites Momentenfunktional und quasi-definites Momentenfunktional. (Definitionen 2.1 und 2.2, Satz 2.3, Bemerkung 2.4) Wann existiert ein OPS? (Satz 2.5 mit Beweis) Wann ist ein Momentenfunktional positiv definit? (Definition 2.6, Lemma 2.7 und Satz 2.8 mit Beweisen, Folgerung 2.9) Erläutern Sie die Zusammenhänge zwischen dem Begriff des Momentenfunktionals und der Gültigkeit einer dreigliedrigen Rekursionsformel. (Satz 2.11 mit Beweis, Satz 2.14) Was besagt die Formel von Christoffel-Darboux? (Satz 2.15 mit Beweis)

2. Erläutern Sie die Begriffe Trägermenge und Träger eines Momentenfunktionals. (Definitionen 2.16 und 2.20) Was können Sie über die Lage der Nullstellen orthogonaler Polynome aussagen? (Sätze 2.17 und 2.18 mit Beweisen) Beschreiben Sie die Konstruktion der Gauß'schen Quadraturformel. Welche Eigenschaften hat diese Quadraturformel? (Sätze 2.21, 2.24 und 2.25 mit Beweisen) Beschreiben Sie die Nyström-Methode zur numerischen Lösung einer Fredholmschen Integralgleichung. Wenden Sie die Theorie der kollektiv kompakten Operatorfolgen auf die Untersuchung dieser Methode im Raum $\mathbf{C}[-1,1]$ der stetigen Funktionen an. (Satz 6.2 mit Beweis und Abschnitt 6.3)

3. Wie kann man den Begriff des orthogonalen Polynoms über Teilmengen der komplexen Ebene definieren? Was besagt die Minimaleigenschaft orthogonaler Polynome? (Satz 3.1 mit Beweis) Welche Aussagen über die Lage der Nullstellen orthogonaler Polynome kennen Sie? (Sätze 3.2, 3.3 und 3.5 mit Beweisen) Erörtern Sie die Aussagen des Satzes 3.13 zur Asymptotik der Nullstellen der orthogonalen Polynome und demonstrieren Sie diese an Beispielen (Beispiel 3.14).

4. Erläutern Sie die Begriffe Kettenbruch, konvergenter Kettenbruch, partieller Zähler und Nenner, Jacobi-Bruch. Was versteht man unter dem System der monischen Zählerpolynome zu einem gegebenen Polynomsystem? Beweisen Sie die entsprechende Partialbruchzerlegung. (Satz 4.9) Zeigen Sie einige Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften des Trägers eines positiv definiten Momentenfunktionals und der Theorie der Kettenfolgen auf. Gehen Sie dabei auf die Zusammenhänge zwischen den Momentenfunktionalen $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_0^*$ und $\mathcal{M}$ in Abschnitt 4.4 der Vorlesung und die zugehörigen OPS ein. Beweisen Sie ausgehend von Satz 4.29 die Folgerungen 4.34 und 4.35 sowie die Sätze 4.36 und 4.37.

5. Erläutern Sie den Begriff der Belegungsfunktion und beweisen Sie das Darstellungstheorem für positiv definite Momentenfunktionale. (Sätze 5.5 und 5.6) Gehen Sie auf die Begriffe der wesentlich eindeutigen Darstellung und der Determiniertheit eines positiv definiten Momentenfunktionals ein. Zeigen Sie, dass jedes positiv definite Momentenfunktional mit kompaktem Träger determiniert ist. (Satz 5.15) Formulieren Sie das Stieltjes'sche und das Hamburger Momentenproblem und deren Lösungen (Sätze 5.18 und 5.19). Beweisen Sie das erste allgemeine Darstellungstheorem (Satz 5.20).