

Skript zur Vorlesung
Orthogonale Polynome

SS 2012

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Orthogonalität	7
1.2	Erzeugende Funktion	11
1.3	Geburts- und Sterbeprozess	12
1.4	Übungsaufgaben	13
2	Elementare Theorie der orthogonalen Polynome	15
2.1	Momentenfunktionale	15
2.2	Übungsaufgaben	18
2.3	Rekursionsformeln	19
2.4	Nullstellen. Gauß'sche Quadraturformel	20
2.5	Die Jacobi-Polynome	22
2.6	Übungsaufgaben	25
3	Singuläre Integraloperatoren	27
3.1	Cauchy'sche singuläre Integraloperatoren	27
3.2	Singuläre Integro-Differentialoperatoren	28
3.3	Schwach singuläre Integraloperatoren	29
4	Kettenbrüche und orthogonale Polynome	31
4.1	Grundlagen	31
4.2	Jacobi-Brüche und orthogonale Polynome	33
4.3	Kettenfolgen	34

Literaturverzeichnis

- [1] D. Berthold, W. Hoppe, B. Silbermann, A fast algorithm for solving the generalized airfoil equation, *J. Comp. Math.*, 43 (1992), 185-219.
- [2] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon & Breach, New York, 1978.
- [3] G. Freud, *Orthogonale Polynome*, Berlin, 1969.
- [4] P. Junghanns, *EAGLE-GUIDE Orthogonale Polynome*, Edition am Gutenbergplatz, Leipzig, 2009.
- [5] P. Junghanns, *Hilbertraummethode*, Skript zur Vorlesung, SS 2011,
<http://www-user.tu-chemnitz.de/~peju/>
- [6] I. P. Natanson, *Konstruktive Funktionentheorie*, Berlin, 1955.
- [7] P. G. Nevai, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1979.
- [8] P. Nevai, *Orthogonal Polynomials, Theory and Practice*, NATO ASI Series C, Vol. 294, 1990.
- [9] N. Obreschkoff, *Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome*, Berlin, 1963.
- [10] R. Remmert, *Funktionentheorie 2*, Springer-Verlag, Berlin, . . ., 1992.
- [11] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1939.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Orthogonalität

Wir bezeichnen mit $\mathbb{K}[x]$ den linearen Raum aller Polynome der Gestalt

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1.1)$$

wobei $a_k \in \mathbb{K}$ Elemente eines Körpers (z.B. \mathbb{C} oder \mathbb{R}) sind und $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Die Elemente von $\mathbb{C}[x]$ sind also Polynome mit komplexen Koeffizienten, die wir auch als Abbildungen $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto p(x)$ der Menge der reellen Zahlen in die Menge der komplexen Zahlen auffassen werden. Die unabhängige Veränderliche x sei also eine beliebige reelle Zahl. Ist in (1.1) der Koeffizient a_n von Null verschieden, so nennen wir $\deg p = n$ den **Grad des Polynoms** $p(x)$ und a_n den **Leitkoeffizienten** dieses Polynoms. Den linearen Teilraum von $\mathbb{C}[x]$ der Polynome, deren Grad kleiner als n ist, bezeichnen wir mit $\mathbb{C}_n[x]$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist bekanntlich das System $M_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, eine Basis in $\mathbb{C}_n[x]$, was nichts anderes bedeutet, als dass die Darstellung des Polynoms $p(x)$ aus $\mathbb{C}_{n+1}[x]$ in (1.1) eindeutig ist. Das heißt aber auch, dass jedes endliche Teilsystem des Systems $(M_n)_{n=0}^\infty$ linear unabhängig ist, weshalb man dieses unendliche System selbst linear unabhängig nennt. Als Beispiel definieren wir nun auf $\mathbb{C}[x]$ ein **Skalarprodukt**, auch **inneres Produkt** genannt,

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) \overline{q(x)} dx, \quad p, q \in \mathbb{C}[x]. \quad (1.2)$$

Würden wir nun das aus der linearen Algebra bekannte Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf das System $(M_n)_{n=0}^\infty$ anwenden, so erhielten wir ein System $(P_n)_{n=0}^\infty$ von Polynomen $P_n(x)$ mit den Eigenschaften $\deg P_n = n$,

$$\text{span} \{P_0, \dots, P_{n-1}\} = \mathbb{C}_n[x], \quad n \in \mathbb{N},$$

und

$$\langle P_k, P_j \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & : j \neq k \\ 1 & : j = k \end{cases}, \quad j, k \in \mathbb{N}_0. \quad (1.3)$$

Mit $\text{span} \{P_0, \dots, P_{n-1}\}$ wird dabei die Menge aller Linearkombinationen der Polynome P_j , $j = 0, 1, \dots, n-1$ bezeichnet. Da diese Menge auch gleich $\text{span} \{M_0, \dots, M_{n-1}\}$ ist, sieht man leicht, dass für $k \neq j$ die Orthogonalitätsbedingungen in (1.3) äquivalent sind zu

$$\langle M_k, P_n \rangle = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

Wir betrachten die Polynome $f_n(x) = (1 - x^2)^n$ und $Q_n(x) = f_n^{(n)}(x)$. Unter Verwendung der Formel der partiellen Integration ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$ und $0 < k \leq n$

$$\langle M_k, Q_n \rangle = \int_{-1}^1 x^k \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n dx = -k \int_{-1}^1 x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (1 - x^2)^n dx$$

und dies fortgesetzt

$$\langle M_k, Q_n \rangle = (-1)^k k! \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (1 - x^2)^n dx = \begin{cases} 0 & : k = 0, \dots, n-1, \\ (-1)^n n! \kappa_n & : k = n, \end{cases}$$

mit $\kappa_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx$. Wiederum durch partielle Integration erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$

$$\kappa_n = \kappa_{n-1} - \int_{-1}^1 [(1 - x^2)^{n-1} x] x dx = \kappa_{n-1} - \frac{1}{2n} \kappa_n$$

und somit, da $\kappa_0 = 2$ ist,¹

$$\kappa_n = \frac{2n}{2n+1} \kappa_{n-1} = \dots = \frac{2^n n!}{(2n+1)!!} \kappa_0 = \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)!!}.$$

Durch Normierung der $Q_n(x)$ wollen wir nun die Bedingung $\langle P_n, P_n \rangle = 1$ erfüllen. Dazu machen wir den Ansatz $P_n(x) = \delta_n Q_n(x)$ und fordern (der Eindeutigkeit wegen), dass der Leitkoeffizient von $P_n(x)$ positiv ist. Der Leitkoeffizient von $Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} [(-1)^n x^{2n} + \dots + 1]$ ist gleich $(-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$. Wegen

$$\delta_n^2 \int_{-1}^1 [Q_n(x)]^2 dx = \delta_n^2 (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \int_{-1}^1 x^n Q_n(x) dx = \delta_n^2 (2n)! \kappa_n = \delta_n^2 \frac{2(2^n n!)^2}{2n+1}$$

folgt, dass für

$$\delta_n = c_n \frac{(-1)^n}{2^n n!} \quad \text{mit} \quad c_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$$

die Bedingung $\langle P_n, P_n \rangle = 1$ erfüllt ist. Der Leitkoeffizient des Polynoms $P_n(x) = \gamma_n x^n + \dots$ ergibt sich nun zu $\gamma_n = \frac{c_n}{2^n} \binom{2n}{n}$. Das Polynom

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n \tag{1.5}$$

nennt man n -tes **Legendre-Polynom**. Bis auf den Faktor c_n ist es also das n -te Polynom im **orthonormalen Polynomsystem** $(P_n)_{n=0}^\infty$ bez. des in (1.2) definierten Skalarproduktes. Die Formel (1.5) wird nach **Rodrigues** benannt.

Die Folge $(P_n)_{n=0}^\infty$ von Polynomen ist Lösung des folgenden **Momentenproblems**:

Gegeben ist die Folge $(\mu_n)_{n=0}^\infty$ der Zahlen $\mu_n = \int_{-1}^1 x^n dx = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1}$. Auf der linearen Menge $\mathbb{C}[x]$ der Polynome der Gestalt (1.1) definiert man das lineare Funktional \mathcal{L} durch

$$\mathcal{L}[p] = a_n \mu_n + a_{n-1} \mu_{n-1} + \dots + a_1 \mu_1 + a_0 \mu_0.$$

¹ $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)$

Man finde nun ein System von Polynomen $P_n(x)$ mit $\deg P_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$, so dass die Orthogonalitätsbedingungen

$$\mathcal{L}[P_m P_n] = 0 \quad \text{für } m \neq n$$

erfüllt sind. Genügen die Polynome $P_n(x)$ auch den Bedingungen

$$\mathcal{L}[P_n^2] \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

so nennen wir die Folge $(P_n(x))_{n=0}^\infty$ ein **orthogonales Polynomsystem** (OPS) bez. des **Momentenfunktional** \mathcal{L} . Im folgenden Kapitel werden wir die Frage beantworten, unter welchen Voraussetzungen an die Momentenfolge $(\mu_n)_{n=0}^\infty$ ein solches OPS existiert.

Ein anderes OPS kann man z.B. auf folgende Art und Weise gewinnen:

Aus der trigonometrischen Beziehung

$$2 \cos m\theta \cos n\theta = \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta \quad (1.6)$$

folgt bekanntlich

$$\int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n, \\ \pi & , \quad m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2} & , \quad m = n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Mit $x = \cos \theta$ und $T_n(x) = \cos n\theta$, $n \in \mathbb{N}_0$, folgt ebenfalls aus (1.6) für $m = 1$

$$2x T_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) \quad (1.8)$$

bzw.

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

Wegen $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$ zeigt die rekursive Beziehung (1.9), dass $T_n(x)$ ein Polynom n -ten Grades mit dem Leitkoeffizienten 2^{n-1} für $n \in \mathbb{N}$ ist. Aus (1.7) folgt

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n, \\ \pi & , \quad m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2} & , \quad m = n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Das Polynom $T_n(x)$ nennt man **Tschebyscheff-Polynom erster Art** und n -ten Grades, die Funktion $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ **Tschebyscheff-Gewicht erster Art**.

Es zeigt sich nun, dass man durch Betrachtung des Polynoms $xP_n(x) = M_1(x)P_n(x)$ unter Verwendung der Orthogonalitätsrelationen (1.4) eine Rekursionsformel für die Polynome $P_n(x)$ analog zu (1.8) erhalten kann. Es gilt ja die Darstellung

$$M_1 P_n = \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon_{nk} P_k,$$

wobei $\varepsilon_{nk} = \langle M_1 P_n, P_k \rangle = \langle P_n, M_1 P_k \rangle = 0$ für $k = 0, \dots, n-2$ ist. Da $x[P_n(x)]^2$ offenbar eine ungerade Funktion ist, gilt auch $\varepsilon_{nn} = 0$. Für die restlichen beiden Koeffizienten erhalten wir $\varepsilon_{n,n+1} = \gamma_n \langle M_{n+1}, P_{n+1} \rangle = \gamma_n \gamma_{n+1}^{-1} \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle = \gamma_n \gamma_{n+1}^{-1}$ und $\varepsilon_{n,n-1} = \gamma_{n-1} \langle P_n, M_n \rangle = \gamma_{n-1} \gamma_n^{-1}$. Damit haben wir die Formel

$$\rho_{n+1} P_{n+1}(x) = x P_n(x) - \rho_n P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (1.11)$$

mit $\rho_n = \gamma_{n-1}\gamma_n^{-1}$ bewiesen, wobei wir $P_{-1}(x) \equiv 0$ gesetzt haben. Wir werden sehen, dass eine solche dreigliedrige Rekursionsformel charakteristisch für orthogonale Polynomsysteme ist und dass sie es erlaubt, numerisch interessante Parameter der orthogonalen Polynome effizient zu berechnen. Solche Parameter sind z. B. die Nullstellen dieser Polynome, die man als Eigenwerte schwach besetzter Matrizen erhält. Schreibt man nämlich die Formeln (1.11) gleichzeitig für $n = 0, 1, \dots, m-1$ in matrizieller Form

$$\begin{bmatrix} 0 & \rho_1 & & & 0 \\ \rho_1 & 0 & \rho_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \rho_{m-2} & 0 & \rho_{m-1} \\ 0 & & & \rho_{m-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{m-2}(x) \\ P_{m-1}(x) \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{m-2}(x) \\ P_{m-1}(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho_m P_m(x) \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

so sieht man, dass eine Nullstelle des m -ten orthogonalen Polynoms $P_m(x)$ zugleich Eigenwert der tridiagonalen Matrix in (1.12) ist.

Schreiben wir (1.8) in matrizieller Form, so erhalten wir

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ \vdots \\ T_{m-2}(x) \\ T_{m-1}(x) \end{bmatrix} = 2x \begin{bmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ \vdots \\ T_{m-2}(x) \\ T_{m-1}(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_m(x) \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte der $m \times m$ -Matrix auf der linken Seite dieser Gleichung sind damit genau die Zahlen

$$2 \cos \frac{(2k-1)\pi}{2m}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Normieren wir die Polynome $T_n(x)$ zu $\bar{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ und $\bar{T}_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$, so erhalten wir aus (1.9)

$$\frac{1}{2} \bar{T}_{n+1}(x) = x \bar{T}_n(x) - \frac{1}{2} \bar{T}_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$\frac{1}{2} \bar{T}_2(x) = x \bar{T}_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{T}_0(x),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{T}_1(x) = x \bar{T}_0(x).$$

Die Zahlen $\cos \frac{2k-1}{2m}$, $k = 1, \dots, m$ sind somit die Eigenwerte der diesen Rekursionsformeln entsprechenden symmetrischen tridiagonalen Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & & & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2 Erzeugende Funktion

Wir betrachten die Funktion zweier Veränderlicher ($a \neq 0$)

$$G(x, w) = e^{-aw}(1+w)^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-a)^m w^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} w^n. \quad (1.13)$$

Bilden wir das Cauchy-Produkt der beiden Reihen in (1.13), so erhalten wir

$$G(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) w^n \quad (1.14)$$

mit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \frac{(-a)^{n-k}}{(n-k)!}. \quad (1.15)$$

Wegen $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ ist $P_n(x)$ ein Polynom n -ten Grades. Die Funktion $G(x, w)$ heißt **erzeugende Funktion** der Polynome $P_n(x)$, die auch **Charlier-Polynome** genannt werden. Aus (1.13) folgt

$$a^x G(x, v) G(x, w) = e^{-a(v+w)} [a(1+v)(1+w)]^x$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k G(k, v) G(k, w)}{k!} &= e^{-a(v+w)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[a(1+v)(1+w)]^k}{k!} \\ &= e^{-a(v+w)} e^{a(1+v)(1+w)} = e^a e^{avw} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a a^n (vw)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Unter Verwendung von (1.14) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k G(k, v) G(k, w)}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{m, n=0}^{\infty} P_m(k) P_n(k) v^m w^n \\ &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_m(k) P_n(k) \frac{a^k}{k!} \right) v^m w^n. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Koeffizientenvergleich in (1.16) und (1.17) liefert

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_m(k) P_n(k) \frac{a^k}{k!} = \begin{cases} 0 & , m \neq n, \\ \frac{e^a a^n}{n!} & , m = n. \end{cases} \quad (1.18)$$

Definieren wir also

$$\mu_n = \mathcal{L}[M_n] = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{a^k}{k!},$$

so folgt aus (1.18)

$$\mathcal{L}[P_m P_n] = \frac{e^a a^n}{n!} \delta_{mn}.$$

Das Polynomsystem $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ ist als ein OPS bez. des Momentenfunktionals \mathcal{L} .

1.3 Geburts- und Sterbeprozess

Wir modellieren einen Geburts- und Sterbeprozess (ein spezieller Markov-Prozess, dessen Zustandsraum die Menge \mathbb{N}_0 der nichtnegativen ganzen Zahlen ist). Mit $p_{mn}(t)$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$, bezeichnen wir die sog. Übergangswahrscheinlichkeiten. Das bedeutet, $p_{mn}(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System (z. B. die Größe einer Population) während der Zeitspanne t vom Zustand m zum Zustand n übergeht. Die Matrix $P(t) = [p_{mn}(t)]_{m,n=0}^{\infty}$ wird Übergangsmatrix genannt. Dabei soll $p_{mn}(t)$ wirklich nur von m, n, t abhängen und nicht davon, wie und wann das System den Zustand m erreicht hat (stationärer Prozess). Das ist äquivalent zu der Bedingung

$$P(s+t) = P(s)P(t). \quad (1.19)$$

Für $t \rightarrow +0$ mögen die Übergangswahrscheinlichkeiten den folgenden Bedingungen genügen²:

$$p_{mn}(t) = \begin{cases} \lambda_m t + o(t) & : n = m + 1, \\ 1 - \lambda_m t - \eta_m t + o(t) & : n = m, \\ \eta_m t + o(t) & : n = m - 1 \end{cases} \quad (1.20)$$

und

$$\sum_{n=0}^{m-2} p_{mn}(t) + \sum_{n=m+2}^{\infty} p_{mn}(t) = o(t). \quad (1.21)$$

Die Koeffizienten λ_m und η_m nennt man die Geburts- bzw. Sterberate im Zustand m . Sie sollen die Bedingungen

$$\lambda_m > 0, \eta_{m+1} > 0, m \in \mathbb{N}_0, \eta_0 \geq 0 \quad (1.22)$$

erfüllen. Es sei nun $\Delta t > 0$. Aus der Bedingung (1.19) folgt die Gleichung $P(t+\Delta t) = P(t)P(\Delta t)$, d. h. wegen (1.20)

$$\begin{aligned} p_{mn}(t+\Delta t) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{mk}(t)p_{kn}(\Delta t) \\ &= p_{m,n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + p_{m,n+1}(t)\eta_{n+1}\Delta t \\ &\quad + p_{mn}(t)[1 - (\lambda_n + \eta_n)\Delta t] + o(\Delta t). \end{aligned}$$

(Größen mit negativen Indizes sind Null zu setzen.) Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{p_{mn}(t+\Delta t) - p_{mn}(t)}{\Delta t} &= \lambda_{n-1}p_{m,n-1}(t) + \eta_{n+1}p_{m,n+1}(t) \\ &\quad - (\lambda_n + \eta_n)p_{mn}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \end{aligned}$$

woraus sich für $\Delta t \rightarrow +0$ die Gleichung

$$p'_{mn}(t) = \lambda_{n-1}p_{m,n-1}(t) + \eta_{n+1}p_{m,n+1}(t) - (\lambda_n + \eta_n)p_{mn}(t)$$

ergibt. Verwendet man die Beziehung $P(t+\Delta t) = P(\Delta t)P(t)$, so ergibt sich analog

$$p'_{mn}(t) = \lambda_m p_{m+1,n}(t) + \eta_m p_{m-1,n}(t) - (\lambda_m + \eta_m)p_{mn}(t).$$

²Mit $o(t)$ werden Größen bezeichnet, für die $\lim_{t \rightarrow +0} o(t)/t = 0$ gilt.

Die letzten beiden Gleichungen nennt man **rückwärtige** bzw. **vorwärtige Chapman-Kolmogorov-Gleichungen**. Wir machen nun den Separationsansatz $p_{mn}(t) = f(t)Q_m F_n$ und erhalten aus den rückwärtigen Chapman-Kolmogorov-Gleichungen

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\lambda_{n-1}F_{n-1} + \eta_{n+1}F_{n+1} - (\lambda_n + \eta_n)F_n}{F_n} =: -x.$$

Bis auf eine multiplikative Konstante ist also $f(t) = e^{-xt}$. Die F_n hängen offenbar von x ab, weshalb wir auch $F_n(x)$ schreiben. Vereinbarungsgemäß ist $F_{-1}(x) \equiv 0$, und wir erhalten

$$\eta_{n+1}F_{n+1}(x) = (\lambda_n + \eta_n - x)F_n(x) - \lambda_{n-1}F_{n-1}(x), \quad (1.23)$$

$n \in \mathbb{N}_0$. Die Funktion $F_0(x)$ kann offenbar beliebig gewählt werden. Damit sind die $F_n(x)$ z. B. durch die Anfangsbedingungen $F_{-1}(x) \equiv 0$, $F_0(x) \equiv 1$ festgelegt. Analog sind die Funktionen $Q_n(x)$ durch die Anfangsbedingungen $Q_{-1}(x) \equiv 0$, $Q_0(x) \equiv 1$ und die rekursive Beziehung

$$\lambda_n Q_{n+1}(x) = (\lambda_n + \eta_n - x)Q_n(x) - \eta_n Q_{n-1}(x),$$

$n \in \mathbb{N}_0$, eindeutig bestimmt. Das Polynomsystem $(\varepsilon_n Q_n)_{n=0}^\infty$ mit

$$\varepsilon_0 = 1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\eta_1 \cdots \eta_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

erfüllt offenbar die gleichen Anfangsbedingungen und Rekursionsgleichungen wie das Polynomsystem $(F_n)_{n=0}^\infty$. Der Separationsansatz führt also auf

$$p_{mn}(t) = \frac{1}{\varepsilon_m} e^{-xt} F_m(x) F_n(x),$$

wobei $x \geq 0$ gelten muss, damit $p_{mn}(t)$ für $t \rightarrow +\infty$ beschränkt bleibt. Wir bemerken, dass wir wieder auf ein System von Polynomen gestoßen sind, welches einer zu (1.11) ähnlichen Rekursionsformel genügt (siehe (1.23)). Wir werden sehen, dass eine solche Rekursionsformel die Existenz einer Momentenfolge $(\mu_n)_{n=0}^\infty$ garantiert, bez. der das System $(F_n)_{n=0}^\infty$ OPS ist, und dass zu einer solchen Momentenfolge auch eine Belegungsfunktion $\Omega(x)$ mit der Eigenschaft

$$\mu_n = \int_0^\infty x^n d\Omega(x), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

existiert.

1.4 Übungsaufgaben

1. Wir definieren³

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} \mathbf{D}^n (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{D} = \frac{d}{dx}, \quad \tilde{T}_0(x) = 1.$$

(a) Beweisen Sie, dass für die Tschebyscheff-Polynome $T_n(x)$ erster Art die Gleichheit

$$T_n(x) = \tilde{T}_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

gilt.

³ $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$

- (b) Verwenden Sie diese Darstellung von $T_n(x)$ zum Beweis der Orthogonalitätsrelationen (1.10).

2. Die Tschebyscheff-Polynome $U_n(x)$ **zweiter Art** können durch die Formel

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\vartheta]}{\sin \vartheta}, \quad x = \cos \vartheta, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

definiert werden.

- (a) Zeigen Sie, dass $U_n(x)$ ein Polynom (in x) n -ten Grades ist und dass die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_{-1}^1 U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn} \quad (1.24)$$

erfüllt sind.

- (b) Beweisen Sie die Formel

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+1)!!\sqrt{1-x^2}} \mathbf{D}^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

und verwenden Sie diese zum Beweis der Orthogonalitätsrelationen (1.24).

3. Für $x = \cos \vartheta$ definieren wir

$$R_n(x) = \frac{\cos[(n+\frac{1}{2})\vartheta]}{\cos \frac{\vartheta}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweisen Sie

(a) $R_n(x) = \frac{T_n(x) + T_{n+1}(x)}{1+x}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$

(b) $R_0(x) = 1, R_1(x) = 2x - 1, R_{n+1}(x) = 2xR_n(x) - R_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$

(c) $\int_{-1}^1 R_m(x)R_n(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \pi\delta_{mn}.$

4. Es sei $F(x, w) = e^{-(x-w)^2}$. Beweisen Sie

(a) $H_n(x) = e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial w^n} F(x, 0) = e^{x^2} (-1)^n \mathbf{D}^n e^{-x^2}$ ist ein Polynom n -ten Grades,

(b) $G(x, w) := e^{2xw-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{w^n}{n!},$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, v)G(x, w)e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{2vw}$ (Hinweis: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$),

(d) $\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}.$

$H_n(x)$ ist das sogenannte HERMITE-Polynom n -ten Grades.

Kapitel 2

Elementare Theorie der orthogonalen Polynome

2.1 Momentenfunktionale.

Existenz orthogonaler Polynomsysteme

Definition 2.1 Für eine gegebene Zahlenfolge $(\mu_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$ definieren wir das dieser Folge entsprechende **Momentenfunktional** \mathcal{L} auf dem linearen Raum $\mathbb{C}[x]$ aller (algebraischen) Polynome in x durch

$$\mathcal{L}[M_n] = \mu_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad M_n(x) = x^n,$$

und

$$\mathcal{L}[\alpha_1\pi_1 + \alpha_2\pi_2] = \alpha_1\mathcal{L}[\pi_1] + \alpha_2\mathcal{L}[\pi_2], \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, \quad \pi_j \in \mathbb{C}[x].$$

Die Zahl μ_n heißt **Moment** n -**ter Ordnung**.

Die Koeffizienten der Polynome sind im Allg. komplexe Zahlen, während die unabhängige Variable x hier als reell betrachtet wird.

Definition 2.2 Eine Folge $(P_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}[x]$ heißt **orthogonales Polynomsystem (OPS)** bzgl. des Momentenfunktionals \mathcal{L} , wenn $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (a) $\deg P_n = n$,
- (b) $\mathcal{L}[P_m P_n] = k_n \delta_{mn}$, $k_n \neq 0$.

Im Fall $k_n = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, nennt man $(P_n)_{n=0}^\infty$ ein **orthonormales Polynomsystem (ONPS)**.

Man sieht sofort, dass nicht für alle Folgen $(\mu_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$ ein OPS existiert, z.B. falls $\mu_0 = 0$. Es existiert z.B. aber auch kein OPS, wenn $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ ist, denn sonst wäre für $P_0(x) = a$ und $P_1(x) = bx + c$

$$0 = \mathcal{L}[P_0 P_1] = a(b + c), \quad \text{d.h. } c = -b$$

und somit

$$\mathcal{L}[P_1^2] = \mathcal{L}[b^2(x-1)^2] = b^2(\mu_2 - 2\mu_1 + \mu_0) = 0.$$

Satz 2.3 Es seien \mathcal{L} ein Momentenfunktional und $(P_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}[x]$ eine Folge von Polynomen mit $\deg P_n = n$. Dann sind folgende Aussagen zueinander äquivalent:

(a) $(P_n)_{n=0}^\infty$ ist OPS bzgl. \mathcal{L} .

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathcal{L}[\pi P_n] = 0 \quad \forall \pi \in \mathbb{C}_n[x]$$

und

$$\mathcal{L}[\pi P_n] \neq 0 \quad \forall \pi \in \mathbb{C}[x] \text{ mit } \deg \pi = n.$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathcal{L}[M_m P_n] = \tilde{k}_n \delta_{mn}, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad \tilde{k}_n \neq 0.$$

Bemerkung 2.4 Es sei $(P_n)_{n=0}^\infty$ ein OPS bzgl. des Momentenfunktionals \mathcal{L} .

(a) Aus $\pi = \sum_{k=0}^n \gamma_k P_k \in \mathbb{C}[x]$ folgt $\gamma_k = \frac{\mathcal{L}[\pi P_k]}{\mathcal{L}[P_k^2]}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

(b) Ist $(Q_n)_{n=0}^\infty$ ein weiteres OPS bzgl. \mathcal{L} , so folgt aus (a) und Satz 2.3, (b)

$$Q_n = \delta_n P_n, \quad \delta_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

(c) Sind alle $P_n(x)$ monisch, d.h. $P_n(x) = x^n + \dots$, so heißt $(P_n)_{n=0}^\infty$ **monisches OPS**.

(d) Das Polynomsystem $(p_n)_{n=0}^\infty$ mit

$$p_n(x) = (\mathcal{L}[P_n^2])^{-\frac{1}{2}} P_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ist ein ONPS bzgl. \mathcal{L} . Dabei bezeichnet $(\mathcal{L}[P_n^2])^{\frac{1}{2}}$ eine Lösung der Gleichung $z^2 = \mathcal{L}[P_n^2]$.

Für eine gegebene Momentenfolge $(\mu_n)_{n=0}^\infty$ definieren wir

$$\Delta_n = \det [\mu_{j+k}]_{j,k=0}^n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}.$$

Satz 2.5 Es sei \mathcal{L} ein Momentenfunktional mit der Folge $(\mu_n)_{n=0}^\infty$. Für die Existenz eines OPS bzgl. \mathcal{L} ist notwendig und hinreichend, dass

$$\Delta_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gilt.

Beweis. Es sei $(P_n)_{n=0}^\infty$ ein OPS bzgl. \mathcal{L} , $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \gamma_{nk} x^k$. Aus Satz 2.3,(c) folgt dann

$$\mathcal{L}[M_m P_n] = \sum_{k=0}^n \gamma_{nk} \mu_{k+m} = \tilde{k}_n \delta_{mn}, \quad m \leq n, \quad \tilde{k}_n \neq 0,$$

d.h.

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{n0} \\ \gamma_{n1} \\ \vdots \\ \gamma_{n,n-1} \\ \gamma_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{k}_n \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Aus Bemerkung 2.4,(a),(b) folgt, dass $P_n(x)$ für gewähltes \tilde{k}_n eindeutig bestimmt ist, was die eindeutige Lösbarkeit von (2.1) bedeutet. Ist umgekehrt $\Delta_n \neq 0$, so ist (2.1) eindeutig lösbar, d.h. $P_n(x)$ existiert, und es gilt

$$\gamma_{nn} = \frac{\tilde{k}_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.2)$$

wobei wir $\Delta_{-1} = 1$ gesetzt haben. □

Es seien $(P_n)_{n=0}^\infty$ ein OPS bzgl. \mathcal{L} und $\pi_n \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom n -ten Grades mit dem Leitkoeffizienten α_n , d.h. $\pi_n(x) = \alpha_n x^n + \cdots$. Dann gilt wegen (2.2)

$$\mathcal{L}[\pi_n P_n] = \alpha_n \tilde{k}_n = \frac{\alpha_n \gamma_{nn} \Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad (2.3)$$

wobei γ_n den Leitkoeffizienten von $P_n(x)$ bezeichnet.

Definition 2.6 Ein Momentenfunktional \mathcal{L} heißt **positiv definit**, wenn $\mathcal{L}[\pi] > 0$ für jedes Polynom $\pi \in \mathbb{C}[x]$ mit $\pi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, und $\pi(x) \not\equiv 0$ gilt.

Ist \mathcal{L} positiv definit, so folgt $\mu_{2n} = \mathcal{L}[M_{2n}] > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, und wegen

$$0 < \mathcal{L}[(x+1)^{2n}] = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \mu_k$$

gilt $\mu_{2n-1} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Ferner kann man mittels $\langle p, q \rangle := \mathcal{L}[p\bar{q}]$ auf $\mathbb{C}[x]$ ein (positiv definites) Skalarprodukt definieren. Der Schmidt'sche Orthogonalisierungsprozess angewendet auf das System $\{M_0, M_1, M_2, \dots\}$ liefert dann ein ONPS $(p_n)_{n=0}^\infty$ mit $p_n \in \mathbb{R}[x]$.

Lemma 2.7 Für $\pi \in \mathbb{C}[x]$ gilt $\pi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, genau dann, wenn Polynome $p, q \in \mathbb{R}[x]$ existieren, so dass $\pi(x) = [p(x)]^2 + [q(x)]^2$ gilt.

Satz 2.8 Ein Momentenfunktional \mathcal{L} ist genau dann positiv definit, wenn alle Momente reell sind und $\Delta_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Folgerung 2.9 Aus dem Beweis von Satz 2.8 erkennt man, dass ein Momentenfunktional \mathcal{L} positiv definit ist, falls ein OPS $(P_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}[x]$ mit $\mathcal{L}[P_n^2] > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, existiert.

Definition 2.10 Ein Momentenfunktional \mathcal{L} nennt man **quasi-definit**, falls $\Delta_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.

2.2 Übungsaufgaben

1. Es sei $\mathcal{L}[M_n] = a^n$, $n \geq 0$, wobei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Man zeige, dass für \mathcal{L} **kein** OPS existiert.
2. Man zeige, dass es **kein** Momentenfunktional gibt, für das $(M_n)_{n=0}^\infty$ ein OPS ist.
3. Es seien \mathcal{L} ein Momentenfunktional, für welches ein OPS existiert, und $\{c_n\}$ eine Folge von Null verschiedener Zahlen. Man zeige, dass jede der folgenden Bedingungen das OPS $(P_n)_{n=0}^\infty$ zu \mathcal{L} eindeutig bestimmt:

- (a) $\mathcal{L}[M_n P_n] = c_n$, $n \in \mathbb{N}_0$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^n P_n(1/x) = c_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

4. Ausgehend von bekannten Polynomsystemen bestimme man Polynomsysteme $(P_n)_{n=0}^\infty$, welche den folgenden Bedingungen genügen:

- (a) $\int_0^1 P_m(x) P_n(x) (1-x)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = k_n \delta_{mn}$, $k_0 = \pi$, $k_n = \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$,
- (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x) P_n(x) e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi} n! \delta_{mn}$,
- (c) $\int_0^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} \delta_{mn}$.

5. Es sei \mathcal{L} ein quasi-definites Momentenfunktional mit der Momentenfolge $\{\mu_n\}$. Man zeige, dass $\{(\Delta_{n-1})^{-1} D_n\}$ mit

$$D_n(x) = \det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{bmatrix}$$

das monische OPS zu \mathcal{L} ist, und bestimme ein ONPS für \mathcal{L} .

6. Es sei \mathcal{L} ein quasi-definites Momentenfunktional. Man beweise: Ist $\deg \pi_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$, und $\mathcal{L}[\pi_m \pi_n] = 0$ für $m \neq n$, so ist $(\pi_n)_{n=0}^\infty$ ein OPS für \mathcal{L} .
7. Es sei \mathcal{L} ein quasi-definites Momentenfunktional. Man zeige, dass aus $\pi \in \mathbb{C}[x]$ und $\mathcal{L}[\pi M_n] = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, stets $\pi(x) \equiv 0$ folgt.
8. Es seien \mathcal{L} positiv definit und $(P_n)_{n=0}^\infty$ das monische OPS für \mathcal{L} . Man beweise, dass dann $\mathcal{L}[P_n^2] < \mathcal{L}[|\pi|^2]$ für jedes monische Polynom $\pi(x) \not\equiv P_n(x)$ mit $\deg \pi(x) = n$ gilt.

2.3 Rekursionsformeln und die Formel von Christoffel-Darboux

Satz 2.11 *Sind das Momentenfunktional \mathcal{L} quasi-definit und $(P_n)_{n=0}^\infty$ das zugehörige monische OPS, so existieren Zahlen $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$ mit $\beta_n \neq 0$ und*

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.4)$$

wobei $P_{-1}(x) \equiv 0$, $P_0(x) \equiv 1$ und β_0 beliebig ist. Im Fall eines positiv definiten Momentenfunktionals \mathcal{L} gilt $\alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\beta_n > 0$.

Folgerung 2.12 *Aus (2.4) und dem Beweis von Satz 2.11 ergeben sich folgende Beziehungen:*

1. *Es gilt*

$$\beta_n = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2} = \frac{\mathcal{L}[P_n^2]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2]}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. *Wir vereinbaren $\beta_0 = \mu_0 = \Delta_0$. Dann ist*

$$\mathcal{L}[P_n^2] = \beta_0\beta_1 \cdots \beta_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

3. *Es gilt*

$$\alpha_n = \frac{\mathcal{L}[M_1 P_n^2]}{\mathcal{L}[P_n^2]}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

4. *Das n -te monische orthogonale Polynom gestattet die Darstellung*

$$P_n(x) = x^n - (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1})x^{n-1} + \dots,$$

denn für $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + d_n x^n + \dots$ erhalten wir aus (2.4) $d_n = d_{n-1} - \alpha_n$.

Beispiel 2.13 *Das monische OPS $(\widehat{T}_n(x))_{n=0}^\infty$ zum Tschebyscheff-Gewicht erster Art ist gegeben durch*

$$\widehat{T}_0(x) = T_0(x) \quad \text{und} \quad \widehat{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aus (1.9) folgt

$$\widehat{T}_1(x) = x\widehat{T}_0(x), \quad \widehat{T}_2(x) = x\widehat{T}_1(x) - \frac{1}{2}\widehat{T}_0(x)$$

und

$$\widehat{T}_{n+1}(x) = x\widehat{T}_n(x) - \frac{1}{4}\widehat{T}_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

so dass in diesem Fall $\alpha_n = 0$ für $n \geq 0$ und $\beta_1 = \frac{1}{2}$ sowie $\beta_n = \frac{1}{4}$ für $n \geq 2$ gilt.

Satz 2.14 (Favard/Shohat/Natanson) *Zu beliebigen Zahlenfolgen $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$, $(\beta_n)_{n=0}^\infty$ und einem Polynomsystem $\{P_n\}_{n=-1}^\infty$ mit $P_{-1}(x) \equiv 0$ und $P_0(x) \equiv 1$, welches (2.4) genügt, existiert genau ein Momentenfunktional \mathcal{L} mit den Eigenschaften*

$$\mathcal{L}[P_0] = \beta_0 \quad \text{und} \quad \mathcal{L}[P_m P_n] = 0, \quad m \neq n.$$

Dieses Momentenfunktional \mathcal{L} ist genau dann quasi-definit, wenn $\beta_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, und genau dann positiv definit, wenn $(\alpha_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{R}$ und $\beta_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

Satz 2.15 (Christoffel/Darboux) Das Polynomsystem $\{P_n\}_{n=-1}^{\infty}$ genüge der Rekursionsformel (2.4) mit $\beta_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(t)}{\beta_0 \cdots \beta_k} = \frac{1}{\beta_0 \cdots \beta_n} \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t}. \quad (2.5)$$

Aus dem monischen OPS $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ zu einem positiv definiten Momentenfunktional berechnet sich ein ONPS $(\tilde{p}_n(x))_{n=0}^{\infty}$ nach den Formeln

$$\tilde{p}_n(x) = k_n P_n(x), \quad k_n = (\beta_0 \cdots \beta_n)^{-\frac{1}{2}}.$$

Aus (2.4) folgt dann

$$\sqrt{\beta_{n+1}} \tilde{p}_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) \tilde{p}_n(x) - \sqrt{\beta_n} \tilde{p}_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.6)$$

und aus (2.5)

$$\sum_{k=0}^n \tilde{p}_k(x) \tilde{p}_k(t) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{\tilde{p}_{n+1}(x) \tilde{p}_n(t) - \tilde{p}_n(x) \tilde{p}_{n+1}(t)}{x-t}. \quad (2.7)$$

Aus (2.5) folgt außerdem für $t \rightarrow x$

$$\sum_{k=0}^n \frac{[P_k(x)]^2}{\beta_0 \cdots \beta_k} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)}{\beta_0 \cdots \beta_n}. \quad (2.8)$$

Im Fall eines positiv definiten Momentenfunktionals gilt also

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0. \quad (2.9)$$

2.4 Über die Nullstellen orthogonaler Polynome. Die Gauß'sche Quadraturformel

Definition 2.16 Eine Menge $E \subset \mathbb{R}$ heißt eine **Trägermenge** von \mathcal{L} , wenn aus $P(x) \geq 0$ auf E und $P(x) \not\equiv 0$ auf E folgt, dass $\mathcal{L}[P] > 0$ gilt. Man nennt in diesem Fall \mathcal{L} auch **positiv definit auf E** .

Im weiteren seien \mathcal{L} positiv definit und $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ das zugehörige monische OPS.

Satz 2.17 Es sei (a, b) eine Trägermenge von \mathcal{L} und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind alle Nullstellen von $P_n(x)$ reell, einfach und in (a, b) gelegen.

Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.17 bezeichnen wir die Nullstellen von $P_n(x)$ mit x_{nk} und vereinbaren $x_{nn} < x_{n,n-1} < \cdots < x_{n1}$. Es folgt $\operatorname{sgn} P_n(x) = 1$ für $x > x_{n1}$ und $\operatorname{sgn} P_n(x) = (-1)^n$ für $x < x_{nn}$. Das Polynom $P'_n(x)$ hat genau eine Nullstelle im Intervall $(x_{nk}, x_{n,k-1})$, $k = 2, \dots, n$, woraus

$$\operatorname{sgn} P'_n(x_{nk}) = (-1)^{k-1} \quad (2.10)$$

folgt.

Satz 2.18 *Es gilt $x_{n+1,k+1} < x_{nk} < x_{n+1,k}$, $k = 1, \dots, n$.*

Folgerung 2.19 *Für alle $k \geq 1$ sind die Folge $\{x_{nk}\}_{n=k}^{\infty}$ monoton wachsend und die Folge $\{x_{n,n-k+1}\}_{n=k}^{\infty}$ monoton fallend. Somit existieren*

$$\xi_k := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk} \quad \text{und} \quad \eta_k := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,n-k+1}$$

(evtl. $\xi_k = +\infty$ oder/und $\eta_k = -\infty$).

Definition 2.20 *Das Intervall (η_1, ξ_1) heißt **Träger** des Momentenfunktionals \mathcal{L} .*

Mit $\ell_{nk}(x)$ bezeichnen wir die sog. **Lagrange'schen Grundpolynome**

$$\ell_{nk}(x) = \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x - x_{nj}}{x_{nk} - x_{nj}} = \frac{P_n(x)}{(x - x_{nk})P'_n(x_{nk})}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Offenbar gilt $\ell_{nk}(x_{nj}) = \delta_{jk}$. Für eine auf (η_1, ξ_1) stetige Funktion $f(x)$, d.h. $f \in \mathbf{C}(\eta_1, \xi_1)$, definieren wir das Lagrange'sche **Interpolationspolynom**

$$(L_n f)(x) = \sum_{k=1}^n f(x_{nk}) \ell_{nk}(x)$$

und das Funktional, die sog. **Gauß'sche Quadraturformel**,

$$\mathcal{L}_n[f] := \mathcal{L}[L_n f] = \sum_{k=1}^n A_{nk} f(x_{nk}) \quad \text{mit} \quad A_{nk} = \mathcal{L}[\ell_{nk}].$$

Satz 2.21 *Es gilt*

$$\mathcal{L}_n[P] = \mathcal{L}[P] \quad \forall P \in \mathbb{C}_{2n}[x].$$

Folgerung 2.22 *Es gilt*

$$\sum_{k=1}^n A_{nk} = \mu_0 \quad \text{und} \quad A_{nk} > 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Folgerung 2.23 *Aus Folgerung 2.22 ergibt sich wegen $L_n p = p$ für $p \in \mathbb{C}[x]$ und für alle $n \geq n_0(p)$, dass (η_1, ξ_1) eine Trägermenge von \mathcal{L} ist.*

Wir können nun im Fall $-\infty < \eta_1 < \xi_1 < \infty$ den Wert $\mathcal{L}[f]$ für jedes $f \in \mathbf{C}[\eta_1, \xi_1]$ über

$$\mathcal{L}[f] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}[p_n],$$

definieren, wobei $p_n \in \mathbb{C}[x]$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_{\infty} = 0$,

$$\|f\|_{\infty} = \|f\|_{\infty, [\eta_1, \xi_1]} = \max \{|f(x)| : \eta_1 \leq x \leq \xi_1\}.$$

Diese Definition ist korrekt. Dabei gilt $\mathcal{L}[f_1] \leq \mathcal{L}[f_2]$, falls $f_1(x) \leq f_2(x)$, $x \in [\eta_1, \xi_1]$.

Satz 2.24 Ist $-\infty < \eta_1 < \xi_1 < +\infty$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n[f] = \mathcal{L}[f] \quad \forall f \in \mathbf{C}[\eta_1, \xi_1]$.

Satz 2.25 Für $-\infty < \eta_1 < \xi_1 < \infty$ und $f \in \mathbf{C}[\eta_1, \xi_1]$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}[|f - L_n f|^2] = 0$.

Wir definieren für $z \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}_z^*[M_n] = \mathcal{L}[(x - z)x^n] = \mu_{n+1} - z\mu_n$$

und

$$P_n^z(x) = \frac{1}{x - z} \left[P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)} P_n(x) \right],$$

wobei $P_n(z) \neq 0$ für alle $n \geq 1$ erfüllt sei. Aus (2.5) zusammen mit Folgerung 2.12, 2. folgt

$$P_n^z(x) = \frac{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_n}{P_n(z)} \sum_{k=0}^n \tilde{p}_k(x) \tilde{p}_k(z). \quad (2.11)$$

Satz 2.26 Das Momentenfunktional \mathcal{L}_z^* ist quasi-definit und $(P_n^z)_{n=0}^\infty$ ist das zugehörige monische OPS. Das Momentenfunktional \mathcal{L}_z^* ist genau dann positiv definit, wenn $z \leq \eta_1$ gilt.

Wegen (2.11) gilt

$$K_n(z, x) := \frac{1}{\beta_0 \beta_1 \cdots \beta_n} P_n(z) P_n^z(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{p}_k(x) \tilde{p}_k(z), \quad x, z \in \mathbb{R}.$$

Für $w, z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$K_n(z, w) = \sum_{k=0}^n \tilde{p}_k(w) \overline{\tilde{p}_k(z)} = \sum_{k=0}^n \tilde{p}_k(w) \tilde{p}_k(\bar{z}).$$

Satz 2.27 Für beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\frac{1}{K_n(z_0, z_0)} = \min \{ \mathcal{L}[|\pi|^2] : \pi \in \mathbf{C}_{n+1}[x], \pi(z_0) = 1 \}$$

und

$$A_{nk} = \frac{1}{K_{n-1}(x_{nk}, x_{nk})} = \frac{1}{K_n(x_{nk}, x_{nk})}.$$

2.5 Die Jacobi-Polynome

Es sei $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man die **Jacobi-Polynome** über die **Rodriguessche Formel** (vgl. auch Abschnitt 1.4, Übungsaufgabe 1)

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta}}{(-2)^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right]. \quad (2.12)$$

Lemma 2.28 *Es gilt*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} = \binom{2n+\alpha+\beta}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Aus

$$(1+z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} z^j$$

folgt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{2n+\alpha+\beta}{j} z^j = (1+z)^{n+\alpha} (1+z)^{n+\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \binom{n+\alpha}{j-k} \binom{n+\beta}{k} z^j.$$

Vergleich der Koeffizienten bei z^n liefert die Behauptung. \square

Aus (2.12) und

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (1-x)^{n+\alpha} \right] \left[\frac{d^k}{dx^k} (1+x)^{n+\beta} \right] \\ &= (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-1)^{n-k} (n+\alpha) \cdots (k+\alpha+1) (1-x)^k \cdot \\ & \quad \cdot (n+\beta) \cdots (n+\beta-k+1) (1+x)^{n-k} \\ &= (-1)^n (1-x)^\alpha (1+x)^\beta n! \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k} \end{aligned}$$

folgt

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left(\frac{x-1}{2} \right)^k \left(\frac{x+1}{2} \right)^{n-k}. \quad (2.13)$$

Nach Lemma 2.28 hat $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ also den Leitkoeffizienten

$$k_n^{\alpha,\beta} = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} = 2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n}. \quad (2.14)$$

Die monischen Jacobi-Polynome bezeichnen wir mit $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$, d.h.

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{k_n^{\alpha,\beta}} P_n^{\alpha,\beta}(x).$$

Mittels partieller Integration beweist man folgendes Lemma.

Lemma 2.29 *Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\int_{-1}^1 x^k P_n^{\alpha,\beta}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \begin{cases} = 0 & , \quad k = 0, \dots, n-1, \\ > 0 & , \quad k = n. \end{cases}$$

$(P_n^{\alpha,\beta}(x))_{n=0}^{\infty}$ ist also ein OPS und wir leiten nun Formeln für die Koeffizienten α_n und β_n in der Rekursionsformel

$$\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) = (x - \alpha_n)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) - \beta_n\widehat{P}_{n-1}^{\alpha,\beta}(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.15)$$

der monischen Jacobi-Polynome her. Wir definieren

$$(\alpha)_n := \begin{cases} 1 & : n = 0, \\ \prod_{k=1}^n (k + \alpha) & : n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Aus (2.13) folgt

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n} \quad \text{und} \quad P_n^{\alpha,\beta}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n},$$

so dass

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(1) = \frac{2^n \binom{n+\alpha}{n}}{\binom{2n+\alpha+\beta}{n}} = \frac{2^n (\alpha)_n (\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}}$$

und

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(-1) = \frac{(-2)^n \binom{n+\beta}{n}}{\binom{2n+\alpha+\beta}{n}} = \frac{(-2)^n (\beta)_n (\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}}.$$

Es folgt

$$1 - \alpha_0 = \widehat{P}_1(1) = \frac{2(1+\alpha)}{2+\alpha+\beta}, \quad \text{d.h.} \quad \alpha_0 = \frac{\beta - \alpha}{2 + \alpha + \beta}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ löst man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(1) &= (1 - \alpha_n)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(1) - \beta_n\widehat{P}_{n-1}^{\alpha,\beta}(1), \\ \widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(-1) &= -(1 + \alpha_n)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(-1) - \beta_n\widehat{P}_{n-1}^{\alpha,\beta}(-1), \end{aligned}$$

das sich aus (2.15) für $x = \pm 1$ ergibt und das sich auch in der Form

$$\frac{4(\alpha)_{n+1}(\alpha+\beta)_{n+1}}{(\alpha+\beta)_{2n+2}} = (1 - \alpha_n) \frac{2(\alpha)_n(\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}} - \beta_n \frac{(\alpha)_{n-1}(\alpha+\beta)_{n-1}}{(\alpha+\beta)_{2n-2}} \quad (2.16)$$

$$\frac{4(\beta)_{n+1}(\alpha+\beta)_{n+1}}{(\alpha+\beta)_{2n+2}} = (1 + \alpha_n) \frac{2(\beta)_n(\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}} - \beta_n \frac{(\beta)_{n-1}(\alpha+\beta)_{n-1}}{(\alpha+\beta)_{2n-2}} \quad (2.17)$$

schreiben lässt. Wir multiplizieren die Gleichung (2.16) mit $(\beta)_{n-1}$, die Gleichung (2.17) mit $(\alpha)_{n-1}$, subtrahieren (2.16) von (2.17) und erhalten wegen

$$(n + \beta)(n + 1 + \beta) - (n + \alpha)(n + 1 + \alpha) = (2n + \alpha + \beta + 1)(\beta - \alpha)$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{2(\alpha)_{n-1}(\beta)_{n-1}(\alpha+\beta)_{n+1}(2n+\alpha+\beta+1)(\beta-\alpha)}{(\alpha+\beta)_{2n+2}} \\ &= \frac{(\alpha)_{n-1}(\beta)_{n-1}(\alpha+\beta)_n[\beta-\alpha+\alpha_n(2n+\alpha+\beta)]}{(\alpha+\beta)_{2n}}, \end{aligned}$$

so dass

$$\alpha_n = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Multiplizieren wir (2.16) mit $(\beta)_n$, (2.17) mit $(\alpha)_n$ und addieren beide Gleichungen, so folgt

$$\frac{4(\alpha)_n(\beta)_n(\alpha + \beta)_{n+1}}{(\alpha + \beta)_{2n+1}} = \frac{4(\alpha)_n(\beta)_n(\alpha + \beta)_n}{(\alpha + \beta)_{2n}} - \beta_n \frac{(\alpha)_{n-1}(\beta)_{n-1}(\alpha + \beta)_{n-1}(2n + \alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)_{2n-2}},$$

so dass

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{4(1 + \alpha)(1 + \beta)}{(2 + \alpha + \beta)^2(3 + \alpha + \beta)}, & n = 1 \\ \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)}, & n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

2.6 Übungsaufgaben

Im weiteren bezeichnen wir mit $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ das monische OPS zum quasi-definiten Momentenfunktional \mathcal{L} mit der Momentenfolge $\{\mu_n\}$ und der zugehörigen Rekursionsformel (2.4).

1. Man beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (a) \mathcal{L} ist symmetrisch, d.h. es gilt $\mu_{2n+1} = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.
- (b) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0$.
- (c) In der Rekursionsformel (2.4) gilt $\alpha_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.

2. Wir definieren $Q_n(x) = a^{-n} P_n(ax + b)$ ($a \neq 0$). Man beweise:

- (a) $Q_{n+1}(x) = \left(x - \frac{\alpha_n - b}{a}\right) Q_n(x) - \frac{\beta_n}{a^2} Q_{n-1}(x)$,
- (b) $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ ist monisches OPS bzgl. der Momentenfolge $\{\eta_n\}$ mit

$$\eta_n = a^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-b)^{n-k} \mu_k.$$

3. Man beweise für die Polynome $P_n(x)$ aus Formel (1.15) die Gültigkeit der Rekursionsformel

$$Q_{n+1}(x) = (x - n - a) Q_n(x) - a n Q_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad Q_n(x) := n! P_n(x).$$

4. Es seien $\alpha_n = 0$ und $\beta_n < 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ ein OPS bezüglich eines quasi-definiten Momentenfunktionals \mathcal{L} . Wir definieren $\mathcal{L}^*[M_n] := \mathbf{i}^{-n} \mathcal{L}[M_n]$. Man zeige, dass \mathcal{L}^* positiv definit ist, und bestimme das entsprechende monische OPS.

5. Es seien $\alpha_n = 0$, $\beta_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$, und $\alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir definieren $R_n(x) = \operatorname{Re}[\mathbf{i}^{-n} P_n(\mathbf{i}x)]$ und $I_n(x) = \operatorname{Im}[\mathbf{i}^{-n} P_n(\mathbf{i}x)]$. Man beweise, dass sowohl $(R_n)_{n=0}^{\infty}$ als auch $(\alpha_0^{-1} I_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ monische OPS bezüglich gewisser positiv definiter Momentenfunktionale sind.

6. Man beweise:

$$(a) \frac{1-xw}{1-2xw+w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) w^n$$

$$(b) \frac{1}{1-2xw+w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) w^n$$

7. Man zeige, dass ein monisches OPS $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ genau dann einer Beziehung der Gestalt

$$P_{n-1}(x)P_n(-x) + P_{n-1}(-x)P_n(x) = a_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

genügt, wenn in der Rekursionsformel (2.4) $\beta_n \neq 0$, $n > 0$, und $\alpha_n = 0$, $n \geq 1$, $\alpha_0 \neq 0$ gilt. Man zeige ferner, dass das entsprechende Momentenfunktional genau dann positiv definit ist, wenn die Bedingungen $(-1)^n a_1 a_n < 0$, $n \geq 1$, und $\beta_0 > 0$ erfüllt sind.

8. Es seien $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ ein OPS und \mathcal{M} ein Momentenfunktional, welches den Beziehungen $\mathcal{M}[P_0] \neq 0$ und $\mathcal{M}[P_n] = 0$, $n \in \mathbb{N}$ genügt. Man zeige, dass $\{P_n\}$ ein OPS bezüglich \mathcal{M} ist.

9. Man zeige, dass für ein symmetrisches Momentenfunktional die Gewichte in der Gaußschen Quadraturformel der Beziehung $A_{n,n-k+1} = A_{nk}$ genügen.

10. Es seien \mathcal{L} positiv definit und $K_n(z, x)$ wie im Abschnitt 2.4 definiert. Man zeige, dass für jedes Polynom $\pi \in \mathbb{C}[x]$ und $n \geq \deg \pi(x)$ die Formel $\pi(t) = \mathcal{L}[\pi K_n(\cdot, t)]$ gilt.

11. Man zeige, dass die normierten Jacobi-Polynome $p_n^{\alpha, \beta}(x)$ durch

$$p_n^{\alpha, \beta}(x) = \left[h_n^{\alpha, \beta} \right]^{-1} P_n^{\alpha, \beta}(x) \quad (2.18)$$

mit

$$h_n^{\alpha, \beta} = \sqrt{\frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(\alpha+\beta+2)}}$$

gegeben sind (vgl. [4, Formel (3.1)]).

12. Man beweise, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Formeln

$$\frac{d P_n^{\alpha, \beta}(x)}{dx} = \frac{1}{2} (n+\alpha+\beta+1) P_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x), \quad (2.19)$$

$$\frac{d p_n^{\alpha, \beta}(x)}{dx} = \gamma_n^{\alpha, \beta} p_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x) \quad (2.20)$$

mit $\gamma_n^{\alpha, \beta} = \sqrt{n(n+\alpha+\beta+1)}$ und

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta p_n^{\alpha, \beta}(x) = -\frac{1}{\gamma_n^{\alpha, \beta}} \frac{d}{dx} \left[(1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} p_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x) \right] \quad (2.21)$$

(vgl. [4, Formel (3.4) und Aufgabe 3.1]) gültig sind.

Kapitel 3

Singuläre Integraloperatoren

3.1 Cauchy'sche singuläre Integraloperatoren

Wir definieren

$$(\mathcal{S}u)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(y) dy}{y-x} := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-1}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1 \right) \frac{u(y) dy}{y-x}, \quad -1 < x < 1, \quad (3.1)$$

falls dieses Cauchy'sche Hauptwertintegral existiert.

Lemma 3.1 Für $0 < \nu < 1$ und $0 < t < \infty$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{s^{\nu-1} ds}{s-t} = -\pi t^{\nu-1} \cot(\pi\nu), \quad (3.2)$$

wobei das Integral im Sinne des Cauchy'schen Hauptwertes zu verstehen ist.

Folgerung 3.2 Für $\alpha, \beta > -1$, $\alpha + \beta = -1$ und $-1 < x < 1$ gilt

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v^{\alpha,\beta}(y) dy}{y-x} = -\cot(\pi\beta) v^{\alpha,\beta}(x), \quad (3.3)$$

wobei $v^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$.

Für $\alpha, \beta > -1$ definieren wir

$$(\mathcal{S}_{\alpha,\beta}u)(x) = \cos(\pi\beta) v^{\alpha,\beta}(x) u(x) + \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v^{\alpha,\beta}(y) u(y)}{y-x} dy, \quad -1 < x < 1.$$

Satz 3.3 Für $\alpha, \beta > -1$, $\alpha + \beta = -1$ und $-1 < x < 1$ gilt

$$\left(\mathcal{S}_{\alpha,\beta} \widehat{P}_n^{\alpha,\beta} \right) (x) = -\widehat{P}_{n-1}^{-\alpha,-\beta}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.4)$$

Bemerkung 3.4 Der Satz 3.3 lässt sich im folgenden Sinne verallgemeinern. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a - ib = e^{i\pi\beta_0}$, $\beta_0 \in (0, 1)$, $\lambda, \nu \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha := \lambda + \beta_0 \in (-1, 1)$ und $\beta := \nu - \beta_0 \in (-1, 1)$. Dann gelten für

$$(\mathcal{A}u)(x) := av^{\alpha,\beta}(x)u(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v^{\alpha,\beta}(y)u(y)}{y-x} dy, \quad (3.5)$$

die Beziehungen

$$\left(\widehat{\mathcal{A}P}_n^{\alpha,\beta}\right)(x) = (-1)^\lambda \widehat{P}_{n-\kappa}^{-\alpha,-\beta}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad -1 < x < 1,$$

und

$$\left(\mathcal{A}p_n^{\alpha,\beta}\right)(x) = (-1)^\lambda p_{n-\kappa}^{-\alpha,-\beta}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad -1 < x < 1, \quad (3.6)$$

wobei $\kappa = -(\lambda + \nu) = -(\alpha + \beta)$ (vgl. [4, Folgerung 3.7, Aufgaben 3.8, 3.9]).

Folgerung 3.5 Mit $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^2$ bezeichnen wir den Hilbertraum der bezüglich des Jacobigewichtes $v^{\alpha,\beta}(x)$ quadratisch integrierbaren Funktionen $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{\alpha,\beta} = \int_{-1}^1 u(x) \overline{v(x)} v^{\alpha,\beta}(x) dx.$$

Dann ist der durch (3.5) auf allen Polynomen definierte Operator \mathcal{A} eindeutig zu einem beschränkten linearen Operator $\mathcal{A} : \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^2 \rightarrow \mathbf{L}_{-\alpha,-\beta}^2$ fortsetzbar. Dieser Operator ist im Fall $\kappa = 0$ invertierbar, im Fall $\kappa = -1$ linksseitig invertierbar und im Fall $\kappa = 1$ rechtsseitig invertierbar.

Für $s \geq 0$ definieren wir den gewichteten Sobolev-Raum $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^{2,s}$ als

$$\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^{2,s} = \left\{ u \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^{2,s} : \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{2s} \left| \langle u, p_n^{\alpha,\beta} \rangle_{\alpha,\beta} \right|^2 < \infty \right\},$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{\alpha,\beta,s} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{2s} \left| \langle u, p_n^{\alpha,\beta} \rangle_{\alpha,\beta} \right|^2}.$$

Folgerung 3.6 Der in Bemerkung 3.4 definierte Operator $\mathcal{A} : \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^2 \rightarrow \mathbf{L}_{-\alpha,-\beta}^2$ ist auch von $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^{2,s}$ nach $\mathbf{L}_{-\alpha,-\beta}^{2,s}$ beschränkt, und zwar für jedes $s > 0$.

Bemerkung 3.7 Für $s \geq 0$ und $\delta > 0$ ist $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^{2,s+\delta}$ kompakt in $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^{2,s}$ eingebettet.

3.2 Singuläre Integro-Differentialoperatoren

Bemerkung 3.8 ([1], Section 2) Ist $r \in \mathbb{N}_0$, so gilt $u \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^{2,r}$ dann und nur dann, wenn $u^{(k)} \varphi^k \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^2$ für alle $k = 0, \dots, r$, wobei $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$. Außerdem sind die Normen $\|u\|_{\alpha,\beta,s}$ und $\sum_{k=0}^r \|u^{(k)} \varphi^k\|_{\alpha,\beta}$ äquivalent.

Lemma 3.9 Für $s \geq 0$ und $\alpha, \beta > -1$ ist der Operator \mathcal{D} der verallgemeinerten Differentiation ein stetiger Isomorphismus von $\mathbf{L}_{\alpha, \beta}^{2, s+1, 0}$ auf $\mathbf{L}_{\alpha+1, \beta+1}^{2, s}$, wobei $\mathbf{L}_{\alpha, \beta}^{2, s, 0} = \left\{ u \in \mathbf{L}_{\alpha, \beta}^{2, s} : \langle u, 1 \rangle_{\alpha, \beta} = 0 \right\}$.

Mit Hilfe des Operators \mathcal{A} aus Bemerkung 3.4 definieren wir $\mathcal{B} = \mathcal{D}\mathcal{A}$.

Satz 3.10 Es gilt

$$\mathcal{B}p_n^{\alpha, \beta} = (-1)^\lambda \sqrt{(n - \kappa)(n + 1)} p_{n - \kappa - 1}^{1 - \alpha, 1 - \beta}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Folglich gilt im Fall $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, d.h. $a = 0$, $b = -1$, $\lambda = 0$ und $\nu = 1$,

$$-\frac{d}{dx} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - y^2} U_n(y)}{y - x} dy = (n + 1) U_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad -1 < x < 1,$$

so dass der Operator $\mathcal{D}\mathcal{S} : \mathbf{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{2, s+1} \rightarrow \mathbf{L}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{2, s}$ ein isometrischer Isomorphismus ist.

3.3 Schwach singuläre Integraloperatoren

Wir verwenden die Bezeichnungen aus Bemerkung 3.4 und definieren

$$(\mathcal{W}u)(x) = a \int_{-1}^x v^{\alpha, \beta}(y) u(y) dy - \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 v^{\alpha, \beta}(y) \ln |y - x| u(y) dy, \quad -1 < x < 1.$$

Im Fall $\alpha + \beta = -1$ gilt dann wegen (2.21),

$$\int_{-1}^x v^{\alpha, \beta}(y) p_n^{\alpha, \beta}(y) dy = -\frac{1}{n} v^{\alpha+1, \beta+1}(x) p_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

und, nach partieller Integration,

$$\int_{-1}^1 v^{\alpha, \beta}(y) \ln |y - x| p_n^{\alpha, \beta}(y) dy = \frac{1}{n} \int_{-1}^1 \frac{v^{\alpha+1, \beta+1}(y) p_{n-1}^{\alpha+1, \beta+1}(y)}{y - x} dy, \quad -1 < x < 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

also

$$\mathcal{W}p_n^{\alpha, \beta} = -\frac{1}{n} p_n^{-\alpha-1, -\beta-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung 3.11 (vgl. [5], Beispiel 3.27) Im Fall $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ gilt für $-1 < x < 1$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |y - x| T_n(y) \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \begin{cases} \ln 2 & : n = 0, \\ \frac{1}{n} T_n(x) & : n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Weitere diesbezügliche Betrachtungen findet man in [4, Abschnitt 3.4].

Kapitel 4

Kettenbrüche und orthogonale Polynome

4.1 Grundlagen

Unter einem (unendlichen) **Kettenbruch** versteht man ein Tripel $((a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty, (c_n)_{n=0}^\infty)$ von Zahlenfolgen, wobei

$$\begin{aligned}c_0 &= b_0 \\c_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\c_2 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} \\&\vdots \\c_n &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}}\end{aligned}$$

Die Zahl c_n nennt man den n -ten **Näherungsbruch** des unendlichen Kettenbruches

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}}} \tag{4.1}$$

Für c_n schreiben wir im Weiteren kurz

$$c_n = b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \dots + \frac{a_n}{|b_n|}$$

und für (4.1)

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1|} + \frac{a_2|}{|b_2|} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n|} + \dots$$

Ist $a_k = -d_k$, so schreiben wir $-\frac{d_k|}{|b_k|}$ anstelle von $+\frac{-d_k|}{|b_k|}$.

Definition 4.1 Wir sagen, dass der Kettenbruch (4.1) gegen K **konvergiert**, wenn höchstens endlich viele Näherungsbrüche c_n nicht definiert sind und wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = K$$

gilt. Wir schreiben dann auch

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1|} + \frac{a_2|}{|b_2|} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n|} + \dots = K.$$

Wir können c_n in der Form

$$c_n = \frac{A_n}{B_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

schreiben, wobei z.B.

$$A_0 = b_0, \quad B_0 = 1,$$

$$A_1 = b_0 b_1 + a_1 \quad B_1 = b_1,$$

$$A_2 = b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2, \quad B_2 = b_1 b_2 + a_2.$$

Allgemein kann man die Folgen $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ so definieren, dass

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad A_{-1} = 1, \quad A_0 = b_0, \quad (4.2)$$

und

$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1. \quad (4.3)$$

A_n und B_n nennt man den n -ten **partiellen Zähler** bzw. **Nenner** des Kettenbruches (4.1). Es gelten die Formeln

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.4)$$

und unter der Voraussetzung, dass $B_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$,

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} a_1 a_2 \cdots a_k}{B_{k-1} B_k}. \quad (4.5)$$

Lemma 4.2 Ist $m_0 = 0$, so ist der n -te partielle Nenner des Kettenbruches

$$1 - \frac{1|}{|1|} - \frac{(1 - m_0)m_1|}{|1|} - \frac{(1 - m_1)m_2|}{|1|} - \dots$$

gleich

$$B_n = (1 - m_1) \cdots (1 - m_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Lemma 4.3 Es seien $a_n = (1 - m_{n-1})m_n$, $m_0 = 0$ und $0 < m_n < 1$, $n = 1, 2, \dots$. Dann ist

$$1 - \frac{a_1}{|1|} - \frac{a_2}{|1|} - \frac{a_3}{|1|} - \dots = \frac{1}{1 + L},$$

wobei

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{(1 - m_1)(1 - m_2) \cdots (1 - m_n)}.$$

Satz 4.4 Es seien $b_n = (1 - g_{n-1})g_n$, $0 \leq g_0 < 1$ und $0 < g_n < 1$, $n = 1, 2, \dots$. Dann gilt

$$1 - \frac{b_1}{|1|} - \frac{b_2}{|1|} - \frac{b_3}{|1|} - \dots = g_0 + \frac{1 - g_0}{1 + G}, \quad (4.7)$$

wobei

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n)}.$$

Beispiel 4.5 Aus

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \frac{a_3}{|b_3|} + \dots = K \neq 0$$

folgt die Beziehung

$$b_{-1} + \frac{a_0}{|b_0|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \frac{a_3}{|b_3|} + \dots = b_{-1} + \frac{a_0}{K}.$$

Beispiel 4.6 Nehmen wir an, dass der Kettenbruch

$$1 + \frac{1}{|1|} + \frac{1}{|1|} + \frac{1}{|1|} + \dots$$

konvergiert, so ist sein Wert gleich $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

4.2 Jacobi-Brüche und orthogonale Polynome

Es seien α_n und β_n gegebene Zahlen mit $\beta_n \neq 0$. Für den n -ten partiellen Nenner des sogenannten **Jacobi-Bruches**

$$\frac{\beta_0}{|x - \alpha_0|} - \frac{\beta_1}{|x - \alpha_1|} - \frac{\beta_2}{|x - \alpha_2|} - \dots \quad (4.8)$$

schreiben wir $P_n(x)$. Nach Formel (4.3) gilt dann

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad P_0(x) = 1, \quad P_{-1}(x) = 0. \quad (4.9)$$

Der n -te partielle Zähler $A_n(x)$ genügt der Rekursionsformel

$$A_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)A_n(x) - \beta_n A_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, \dots, \quad A_1(x) = \beta_0, \quad A_0(x) = 0.$$

Dabei ist $\beta_0^{-1}A_n(x)$ ein monisches Polynom vom Grade $n - 1$, welches unabhängig von β_0 ist. Wir schreiben deshalb $Q_n(x) = \beta_0^{-1}A_{n+1}(x)$, $n = -1, 0, 1, \dots$. Es gilt dann

$$Q_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1})Q_n(x) - \beta_{n+1}Q_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad Q_0(x) = 1, \quad Q_{-1}(x) = 0. \quad (4.10)$$

Die Polynome $Q_n(x)$ nennt man die **monischen Zählerpolynome** bezüglich des Polynomsystems $(P_n(x))_{n=0}^\infty$. Aus (4.4) folgt

$$P_{n+1}(x)Q_{n-1}(x) - P_n(x)Q_n(x) = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Satz 4.7 *Gilt $\alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\beta_n > 0$, so genügen die Nullstellen x_{nk} und y_{nk} der Polynome $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ den Beziehungen*

$$x_{n+1,k+1} < y_{nk} < x_{n+1,k}.$$

Folgerung 4.8 *Sind (η_1, ξ_1) und (η_1^1, ξ_1^1) die Träger der OPS*

$$(P_n(x))_{n=0}^\infty \quad \text{und} \quad (Q_n(x))_{n=0}^\infty,$$

so gilt $(\eta_1^1, \xi_1^1) \subset (\eta_1, \xi_1)$. Ferner folgt z.B. aus $\xi_1^1 < \xi_1$, dass $P_n(x)$ für alle hinreichend großen n im Intervall (ξ_1^1, ξ_1) genau eine Nullstelle hat.

Satz 4.9 *Sind die α_n reell und die β_n positiv, so gilt*

$$\frac{\beta_0 Q_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_{nk}}{x - x_{nk}},$$

wobei A_{nk} die Gewichte in der Gauß'schen Quadraturformel zum OPS $(P_n(x))_{n=0}^\infty$ bezeichnen.

Beispiel 4.10 *Die monischen Tschebyscheff-Polynome $2^{-n}U_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Zählerpolynome für $2^{1-n}T_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ und $T_0(x)$.*

4.3 Kettenfolgen

Definition 4.11 *Eine Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ der Gestalt*

$$a_n = (1 - g_{n-1})g_n \quad \text{mit} \quad 0 \leq g_0 < 1 \quad \text{und} \quad 0 < g_n < 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

heißt Kettenfolge. Dabei nennt man $(g_n)_{n=0}^\infty$ eine Parameterfolge und g_0 einen Anfangsparameter der Kettenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty$.

Beispiel 4.12 *Die konstante Folge $\left(\frac{1}{4}\right)_{n=1}^\infty$ ist Kettenfolge, wobei sowohl $\left(\frac{n}{2(n+1)}\right)_{n=0}^\infty$ als auch die konstante Folge $\left(\frac{1}{2}\right)_{n=0}^\infty$ Parameterfolgen sind. Die Gleichungen*

$$a = \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}\right) \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} = \left(1 - \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}\right) \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$$

zeigen, dass jede konstante Folge $(a)_{n=1}^\infty$ mit $0 < a \leq \frac{1}{4}$ eine Kettenfolge ist.

Lemma 4.13 *Es seien $(g_n)_{n=0}^\infty$ und $(h_n)_{n=0}^\infty$ Parameterfolgen der Kettenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty$. Dann gilt $g_n < h_n$, $n = 1, 2, \dots$, genau dann, wenn $g_0 < h_0$ ist.*

Lemma 4.14 *Hat eine Kettenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ die Parameterfolge $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $g_0 > 0$, so hat $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zu jedem $h_0 \in [0, g_0]$ eine Parameterfolge $(h_n)_{n=0}^{\infty}$.*

Folgerung 4.15 *Jede Kettenfolge besitzt eine Parameterfolge $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $m_0 = 0$. Dabei gilt $m_n < g_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, für jede andere Parameterfolge $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ dieser Kettenfolge. Die Folge $(m_n)_{n=1}^{\infty}$ nennt man die **minimale Parameterfolge** der entsprechenden Kettenfolge. Eine Parameterfolge $(M_n)_{n=0}^{\infty}$, für die $M_n \geq g_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, für jede Parameterfolge $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ gilt, nennt man **maximale Parameterfolge** der entsprechenden Kettenfolge.*

Lemma 4.16 *Jede Kettenfolge besitzt eine maximale Parameterfolge.*

Im Weiteren seien mit $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ die minimale und mit $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ die maximale Parameterfolge der Kettenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ bezeichnet.

Satz 4.17 *Ist $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Kettenfolge mit der Parameterfolge $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ und mit der Eigenschaft $a_n \leq b_n$, $n = 1, 2, \dots$, so gilt*

$$m_n \leq h_n \leq M_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Lemma 4.18 *Ist die Kettenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton nicht fallend, so sind die minimale Parameterfolge $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ monoton wachsend und die maximale Parameterfolge $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ monoton nicht wachsend.*

Folgerung 4.19 *Für $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{4}\right)_{n=1}^{\infty}$ ist $(M_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)_{n=0}^{\infty}$.*

Folgerung 4.20 *Ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Kettenfolge und existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \geq \frac{1}{4}$, $n = N, N+1, \dots$, so folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{4}$. Ist also $b_n \geq b > \frac{1}{4}$, $n = N, N+1, \dots$, so ist $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ **keine** Kettenfolge.*