# 5. Übung, Maßtheorie

1. Man zeige, das für ein Prämaß $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0,\infty]$ gilt:

$$A_n \in \mathcal{R}\,,\;\; n \in \mathbb{N}\,,\;\; A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

   **(Z)** Es seien $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ die Familie aller Mengen, die höchstens abzählbar oder deren Komplemente höchstens abzählbar sind, und $\alpha \in [0,\infty]$. Wir definieren

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & : \quad A \text{ endlich}\,, \\ \alpha & : \quad A \text{ unendlich}\,. \end{cases}$$

   Man zeige, dass nur für $\alpha = 0$ die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0,\infty]$ ein Prämaß ist.

2. Es seien $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0,\infty)$ eine additive Mengenfunktion, d.h.,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{R} : A \cap B = \emptyset\,.$$

   Man zeige, dass $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0,\infty)$ genau dann ein Prämaß ist, wenn aus $A_n \in \mathcal{A}$ und $A_n \supset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\lim A_n = \emptyset$ folgt $\lim \mu(A_n) = 0$.

**(Z)** Unter den Voraussetzungen von Aufgabe 2 zeige man, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0,\infty)$ ist ein Prämaß.
   (b) $A_n \in \mathcal{R}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $A := \lim A_n \in \mathcal{R} \implies \lim \mu(A_n) = \mu(A)$ (Stet. von unten)
   (c) $A_n \in \mathcal{R}$, $A_n \supset A_{n+1}$, $A := \lim A_n \in \mathcal{R} \implies \lim \mu(A_n) = \mu(A)$ (Stet. von oben)

3. Zeigen Sie, dass für $\sigma$-additive Mengenfunktionen $\nu, \nu_1, \nu_2 : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

   (a) Ist $\nu$ konzentriert auf $A \in \mathcal{R}$, so auch $|\nu|$.
   (b) $\nu_1 \perp \nu_2 \Rightarrow |\nu_1| \perp |\nu_2|$
   (c) $\nu \ll \mu \Rightarrow |\nu| \ll \mu$

4. Man zeige, dass $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann bezüglich $\mu$ absolut stetig ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|\nu|(E) < \varepsilon$ für alle $E \in \mathcal{R}$ mit $\mu(E) < \delta$ gilt.

5. Man zeige: Sind $\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\eta_1, \eta_2 : \mathcal{R} \longrightarrow [0,\infty)$ $\sigma$-additiv mit $\eta = \eta_1 - \eta_2$, so gilt $\eta_1 \ge \eta^+$ und $\eta_2 \ge \eta^-$.