3. Übung, Maßtheorie

1. Zeigen Sie, dass ein Ring bezüglich des Durchschnitts endlich vieler Mengen und ein σ-Ring bezüglich des Durchschnitts abzählbar vieler Mengen abgeschlossen sind.

2. Es seien $\mathbf{X}$ eine unendliche Menge und $\mathcal{R}_0$ die Familie aller endlichen Teilmengen von $\mathbf{X}$. Man beschreibe den kleinsten σ-Ring $\mathcal{R}$, der $\mathcal{R}_0$ umfasst.

3. Es sei $\{\mathcal{R}_k : k \in \mathbb{I}\}$ eine Familie von σ-Ringen $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$. Man zeige:

   (a) $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{I}} \mathcal{R}_k$ ist ein σ-Ring.

   (b) $\mathcal{R}_{k_1} \cup \mathcal{R}_{k_2}$ ist i.Allg. kein Ring.

   (c) Sind $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ und $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}_k$ ein Ring, aber i.Allg. kein σ-Ring.

4. Es seien A_n, B_n, Teilmengen einer Menge $\mathbf{X}$. Man beweise:

   (a) Es gilt $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

   (b) Gilt $A_n \subset A_{n+1}$, $B_{n+1} \subset B_n$, $n \in \mathbb{N}$, so existieren $A = \lim A_n$ bzw. $B = \lim B_n$ und sind gleich $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bzw. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

   (**Z**) Unter den Voraussetzungen von (b) seien $C_{2n-1} := A_n$ und $C_{2n} := B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass dann $\liminf C_n = A \cap B$ gilt und dass der Grenzwert $\lim C_n$ genau dann existiert, wenn $A = B$ ist.

5. Wir gehen von den Beispielen 1.4 und 1.7 mit dem Vektorverband $\mathcal{X}^{(1)} = \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ und dem Riemann-Integral $\mathcal{J}^{(1)} : \mathcal{X}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ aus und erweitern dieses Integral zu dem vollständigen Lebesgue-Integral $\mathcal{J}_L^{(1)} : L(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $L(\mathbb{R}) := L\left(\mathcal{J}^{(1)}\right)$ (vgl. Abschnitt 1.4). Für $\varphi \in L(\mathbb{R})$ schreiben wir
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \quad \text{statt} \quad \mathcal{J}_L^{(1)}(\varphi)\,.$$
Diese Schreibweise verwenden wir auch für integrierbare Funktionen $\varphi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}))$. Im Weiteren betrachten wir also den Integrationsraum $\left(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}}\right)$. Beweisen Sie:

   (a) Jedes Intervall der reellen Achse ist messbar, und das Maß eines Intervalls ist gleich dessen Länge, z.B. $\mu([a,b)) = b - a$, $-\infty < a < b \leq \infty$.

   (b) Für $-\infty < a < b < \infty$ und jede stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt
$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[a,b]}(x)\,dx\,,$$
wobei $(R)\int_a^b$ das Riemann-Integral bezeichnet.

   (c) Wir betrachten den Integrationsraum $\left([0,1], L([0,1]), \int_0^1\right)$ als Einschränkung des Integrationsraumes $\left(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}}\right)$ auf das Intervall $[0,1]$. Man zeige, dass die Funktionen $f_n \in L([0,1])$ genau dann dem Maße nach gegen $g \in L([0,1])$ konvergieren, wenn
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{|f_n(x) - g(x)|}{1 + |f_n(x) - g(x)|}\,dx = 0$$
gilt.