2. Übung, Maßtheorie

1. Zeigen Sie, dass durch (2.1) eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ definiert wird.

2. Zeigen Sie, dass die Definitionen (2.2), (2.3), (2.4) und (2.5) korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten aus den Äquivalenzklassen, sind.

3. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Es seien a_{kn} $(k,n \in \mathbb{N}_0)$ reelle Zahlen mit den Eigenschaften

   $$\sup\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|a_{kn}| : k \in \mathbb{N}_0\right\} < \infty \quad \text{und} \quad a_{kn} \uparrow b_n \ (k \to \infty) \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

   Dann gilt

   $$\sum_{n=0}^{\infty}|b_n| < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{kn} = \sum_{n=0}^{\infty}b_n\,.$$

   (b) Es seien a_{kn} $(k,n \in \mathbb{N}_0)$ reelle Zahlen mit den Eigenschaften

   $$\lim_{k\to\infty} a_{kn} = b_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,, \quad |a_{kn}| \le c_n \ \forall\, k,n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty\,.$$

   Dann gilt

   $$\sum_{n=0}^{\infty}|b_n| < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{kn} = \sum_{n=0}^{\infty}b_n\,.$$

4. Wir betrachten den Integrationsraum $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ mit $\mathbf{X} = \mathbb{N}_0$,

   $$\mathcal{X} = L\left(\mathcal{J}^{(2)}\right) = \left\{f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty}|f(n)| < \infty\right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{J}(f) = \mathcal{J}_L^{(2)}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

   (vgl. Abschnitt 1.4). Beschreiben Sie die zugehörigen Räume $\mathbf{L}^p$, $1 \le p < \infty$.

5. Es seien $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   (a) Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen $\alpha, \beta \in [0,\infty)$ die Ungleichung

   $$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\,.$$

   gilt und leiten Sie daraus die Hölder'sche Ungleichung (2.7) ab.

   (b) Zeigen Sie, dass $\left(\mathbf{L}^p, \|.\|_p\right)$ ein normierter Raum ist (vgl. Bem. 2.3).