1. Übung, Maßtheorie

1. Man zeige, dass $\mathcal{X}$ genau dann ein Vektorverband ist, wenn aus $f, g \in \mathcal{X}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt $\alpha f, f+g, f \cap 0 \in \mathcal{X}$.

2. Man beweise, dass die Menge $\mathcal{X}^{(3)}$ der stetigen und stückweise linearen Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit kompakten Träger einen Vektorverband bilden.

3. Mit $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge der Zerlegungen der reellen Achse,
$$\mathcal{Z}(\mathbb{R}) := \{\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} : -\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \infty,\, n \in \mathbb{N}_0\} .$$
Eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{Z}(\mathbb{R})$ nennen wir **zulässig** für $f \in \mathcal{X}^{(3)}$, wenn $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [x_0, x_n]$ gilt und wenn f auf jedem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$ linear ist. Wir definieren auf $\mathcal{X}^{(3)}$ das Funktional $\mathcal{J}^{(3)}$ wie folgt. Sind $f \in \mathcal{X}^{(3)}$ und $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ zulässig für f, so setzen wir
$$\mathcal{J}^{(3)}(f) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} \left[f(x_{j-1}) + f(x_j)\right](x_j - x_{j-1}) .$$
Man zeige, dass $\mathcal{J}^{(3)} : \mathcal{X}^{(3)} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Integral ist.

4. Man beweise:
   (a) $F, G \in \mathcal{X}^\sigma$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0 \Rightarrow F + G, F \cup G, F \cap G, \alpha F \in \mathcal{X}^\sigma$
   (b) $F \in \mathcal{X}^\sigma$, $F \geq 0 \Rightarrow \exists\, (f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X} : f_n \geq 0,\ f_n \uparrow F$

5. Man zeige, dass das verallgemeinerte Integral $\mathcal{J}^* : \mathcal{X}^\sigma \longrightarrow \mathbb{R}^e$ (vgl. Def. 1.11) die Eigenschaften (V1) – (V4) besitzt.

6. Man beweise, dass für $F_k \in \mathcal{X}^\sigma$ mit $F_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\mathcal{J}^*\left(\sum_{k=0}^\infty F_k\right) = \sum_{k=0}^\infty \mathcal{J}^*(F_k) .$$
Hinweis: Man verwende Satz 1.12.

7. Man zeige:
   (a) $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi^+, \varphi^-, |\varphi| \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,
   (b) $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi \cup \psi, \varphi \cap \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,
   (c) $(\varphi_n)_{n=0}^\infty \subset \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \displaystyle\bigcap_{n=0}^\infty \varphi_n := \inf\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\}, \liminf \varphi_n, \limsup \varphi_n \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

8. Man zeige, dass eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ genau dann zu $\mathcal{N}(\mathcal{J})$ gehört, wenn ein $F \in \mathcal{X}_0^\sigma$ mit $A = \{x \in \mathbf{X} : F(x) = \infty\}$ existiert.

9. Der Integrationsraum $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ besitze die Eigenschaft (E). Man zeige, dass $\mathcal{N}(\mathcal{J})$ ein σ-Ring ist, d.h., dass aus $A, B \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ und $A_n \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$, $n \in \mathbb{N}$ folgt $A \setminus B \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ und $\displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$.

10. Der Integrationsraum $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ besitze die Eigenschaft (E). Man zeige, aus $A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ und $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt $\int \varphi(x)\chi_A(x)\,dx = 0$ und, falls $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, auch $\varphi\chi_A \in \mathcal{X}$.
Zusatz: Man zeige, dass auch $\varphi(1 - \chi_A) \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ gilt und dass, falls $\int \varphi(x)\,dx$ existiert,
$$\int \varphi(x)\,dx = \int \varphi(x)[1 - \chi_A(x)]\,dx .$$