

Prüfungsfragen zur Vorlesung Maßtheorie WS 17/18

1. Erläutern Sie den Begriff des Integrals auf einem Vektorverband und beweisen Sie die Monotonieeigenschaften des Integrals. (Definitionen 1.2 und 1.6 sowie Satz 1.8,(a)-(e)) Geben Sie ein Beispiel an.
2. Wie kann man ein Integral auf die isotone Hülle des Vektorverbandes fortsetzen? (Definitionen 1.9 und 1.11) Zeigen Sie, dass diese Fortsetzung stetig von unten ist. (Satz 1.12) Betrachten Sie ein Beispiel.
3. Wann nennt man ein Integral auf einem Vektorverband Lebesgue-Integral und wann vollständiges Lebesgue-Integral? (Definition 1.14) Wie kann man die eindeutig bestimmte minimale Fortsetzung eines Integrals zu einem vollständigen Lebesgue-Integral definieren? (ohne Beweis) Geben Sie ein Beispiel an.
4. Formulieren und beweisen Sie den Satz von Beppo Levi. (Satz 1.22) Zeigen Sie, dass jede nichtnegative messbare Funktion isoton durch nichtnegative Funktionen aus dem Vektorverband approximiert werden kann. (Lemma 1.24) Wie ist das Integral für eine messbare Funktion erklärt? (Definition 1.25)
5. Formulieren und beweisen Sie das Lemma von Fatou und den Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz. (Sätze 1.27 und 1.28)
6. Wie kann man das System der Mengen vom Maße Null definieren? Warum verschwindet eine nichtnegative messbare Funktion f.ü., wenn ihr Integral gleich Null ist? (Lemma 1.30) Warum ist eine messbare Funktion mit endlichem Integral f.ü. endlich? (Lemma 1.31)
7. Erläutern Sie die Definition der Räume \mathbf{L}^p , $1 \leq p < \infty$. (Abschnitt 2.1)
8. Es sei $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum. Was versteht man unter einem Integrationsbereich? Zeigen Sie, dass das System der Integrationsbereiche eine σ -Algebra ist und dass für zwei messbare Funktionen φ, ψ die Menge $\{\varphi > \psi\}$ ein Integrationsbereich ist. (Sätze 3.2 und 3.3).
9. Erklären Sie den Grenzwertbegriff für Mengenfolgen und beweisen Sie die Stetigkeit und σ -Additivität der Mengenfunktion $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J}) \mapsto \int_A \varphi(x) dx$. (Sätze 3.5 und 3.6)
10. Definieren Sie das System $\mathbf{M}(\mathcal{J})$ der messbaren Mengen und das \mathcal{J} -Maß einer messbaren Menge. (Definition 3.7) Zeigen Sie, dass $\mathbf{M}(\mathcal{J})$ ein σ -Ring und das \mathcal{J} -Maß σ -additiv sind. (Sätze 3.8 und 3.10)
11. Formulieren und beweisen Sie die Tschebyscheff'sche Ungleichung. (Satz 3.11) Was versteht man unter Konvergenz dem Maße nach? (Definition 3.12) Zeigen Sie, dass die \mathbf{L}^1 -Konvergenz die Konvergenz dem Maße nach impliziert. (Folgerung 3.13) Was besagt der Satz von Egorov? (Satz 3.14)
12. Wie kann man das Lebesgue'sche Integral über \mathbb{R}^n definieren? (Satz 4.1, Definition 4.2) Zeigen Sie, dass aus der Lebesgue-Messbarkeit von $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ die von $A \times B$ folgt. (Satz 4.3 und Folgerung 4.4)

13. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass eine Teilmenge des \mathbb{R}^n Lebesgue-messbar ist. Begründen Sie Ihre Aussage. (Satz 4.8)
14. Wie kann man mittels eines Prämaßes ein äußeres Maß definieren? Beweisen Sie dessen Eigenschaften. ((A1)–(A3), Lemma 5.3)
15. Wie definiert man mittels des äußeren Maßes das System \mathcal{R}_0^* der messbaren Mengen? (Definition 5.4) Zeigen Sie, dass die Einschränkung des äußeren Maßes auf \mathcal{R}_0^* ein Maß ist. (Satz 5.6)
16. Wie definiert man zu einem messbaren Raum $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ das System $\mathcal{M}(\mu)$ der messbaren Funktionen? (Definition 5.7) Beweisen Sie wesentliche Eigenschaften von $\mathcal{M}(\mu)$. (Satz 5.8)
17. Wie definiert man das Integral auf dem System $\mathcal{M}(\mu)$ der messbaren Funktionen? (Definitionen 5.9 und 5.10) Beweisen Sie die Eigenschaften (I1)–(I4) dieses Integralbegriffes.
18. Zeigen Sie die σ -Additivität der Mengenfunktion $A \in \mathcal{R} \mapsto \int_A f d\mu$. (Satz 5.11 und Folgerung 5.12)
19. Beweisen Sie den Grenzwertsatz 5.13 und die sich daraus ergebenden Eigenschaften (I5)–(I7) des Integrals.
20. Beweisen Sie das Lemma 5.14 von Fatou und den Satz 5.15 von Lebesgue.
21. Was besagt der Satz von Lebesgue-Radon-Nikodym? (Satz 5.19) Wie definiert man positive und negative Variation einer σ -additiven Mengenfunktion $\eta : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$? Zeigen Sie, dass positive und negative Variation Maße sind. (Satz 5.20)
22. Formulieren und beweisen Sie den Zerlegungssatz von Hahn. (Satz 5.21)
23. Wie kann man eine σ -Algebra $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ für ein Produktmaß ausgehend von zwei messbaren Räumen $(\mathbf{X}, \mathcal{R})$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S})$ definieren? (Definition 5.23) Zeigen Sie, dass der x -Schnitt einer Menge $E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ messbar ist. (Lemma 5.24) Zeigen Sie, dass $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ das kleinste monotone Mengensystem ist, welches das System der Elementarmengen umfasst. (Lemma 5.27)
24. Wie kann man ein Maß $\mu \otimes \lambda : \mathcal{R} \otimes \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^e$ definieren? Zeigen Sie, dass diese Definition korrekt ist. (Definition 5.29 mit Satz 5.28)
25. Zeigen Sie, dass für eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\mu \otimes \lambda)$ mit $f \geq 0$ gilt

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\int_{\mathbf{Y}} f_x d\lambda \right) d\mu = \int_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}} f d(\mu \otimes \lambda) = \int_{\mathbf{Y}} \left(\int_{\mathbf{X}} f^y d\mu \right) d\lambda.$$

(Satz 5.30) Wie ergibt sich daraus der Satz von Fubini? (Satz 5.31)

26. Definieren Sie die Menge $\mathcal{L}^p(\mu)$. Was versteht man in diesem Zusammenhang unter einer Cauchyfolge? Zeigen Sie, dass jede Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p(\mu)$ einen Grenzwert im p -ten Mittel und eine μ -f.ü. konvergente Teilfolge besitzt. (Satz 5.37)
27. Formulieren und beweisen Sie die Sätze zur Stetigkeit und zur Differenzierbarkeit von Parameterintegralen. (Sätze 5.42 und 5.43)

Folgende Übungsaufgaben sind für die Prüfung relevant:

1. Übung, Aufgaben 1, 4, 5, 6, 7, 9, 10
2. Übung, Aufgaben 1, 3, 4
3. Übung, Aufgaben 1, 2, 3(a), 4(a), 4(b), 5
4. Übung, Aufgaben 1, 3
5. Übung, Aufgaben 1, 2, 3, 4