Skript zur Vorlesung

Maßtheorie

WS 2017/2018

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] H. Belkner, S. Brehmer, *Lebesguesche Integrale*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1984.

[2] P. Junghanns, Analysis I/II, Vorlesungsskript 2013/14, www-user.tu-chemnitz.de/˜peju

[3] H. Michel, *Maß- und Integrationstheorie I*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[4] M. M. Rao, *Measure Theory and Integration*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2004.

[5] W. Rudin, *Reelle und komplexe Analysis*, Oldenburg Verlag, München, 1999.

Kapitel 1

Lebesgue-Integrale

Bezeichnungen:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ - Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ - Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
- $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ - Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$ - Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ - Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{C}$ - Menge der komplexen Zahlen

Wir erinnern an den Begriff der Riemann-integrierbaren Funktion und bezeichnen mit $\mathbf{R}[a,b]$ die Menge der über dem Intervall $[a,b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ (reellwertigen) Riemann-integrierbaren Funktionen (vgl. auch [2, Abschnitt 5.5]).

- Mit $f, g \in \mathbf{R}[a,b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gehören auch $\alpha f + \beta g$ und fg zu $\mathbf{R}[a,b]$. Insbesondere sind $\mathbf{R}[a,b]$ ein linearer Raum und das Riemann-Integral auf diesem Raum ein lineares Funktional.
- Ist $f \in \mathbf{R}[a,b]$ mit $f(x) \geq 0 \; \forall\, x \in [a,b]$, so gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- Aus $f \in \mathbf{R}[a,b]$ folgt auch $|f| \in \mathbf{R}[a,b]$ und
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$
- Die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ der rationalen Zahlen, auch Dirichlet-Funktion genannt, gehört nicht zu $\mathbf{R}[a,b]$.
- Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ von Funktionen $f_n \in \mathbf{R}[a,b]$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen die Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, so folgt $f \in \mathbf{R}[a,b]$ und
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Wir erinnern auch an die Definition uneigentlicher Integrale, z.B.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} := \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2} \quad \text{oder} \quad \int_0^1 \ln x\,dx := \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \ln x\,dx\,.$$

1.1 Numerische Funktionen

Definition 1.1 *Die Menge* $\mathbb{R}^e = [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *heißt* **erweiterter Bereich der reellen Zahlen**. *Durch die Relationen* $-\infty < x < \infty\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ *wird die Ordnungsrelation von* $\mathbb{R}$ *auf* $\mathbb{R}^e$ *fortgesetzt. Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gelten bzgl. Addition und Multiplikation folgende Regeln:*

(a) $x + \infty = \infty + x = \infty + \infty = \infty\,,\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = (-\infty) + (-\infty) = -\infty\,,$

(b) $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \left\{ \begin{array}{ccc} \infty & : & x > 0 \\ 0 & : & x = 0 \\ -\infty & : & x < 0 \end{array} \right\},$

(c) $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty\,,\ \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty\,,$

(d) $-(-\infty) = \infty\,,\ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -(x \cdot \infty)\,,$

(e) $x - \infty := x + (-\infty)$ *und* $|\infty| = |-\infty| = \infty\,.$

Damit ist die Multiplikation auf $\mathbb{R}^e$ uneingeschränkt ausführbar, die Addition bis auf $x + y$ mit $x = -y = \infty$ und $x = -y = -\infty$. Im Weiteren sei $\mathbf{X}$ eine beliebige nichtleere Menge. Funktionen $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ nennen wir **numerische Funktionen**. Wir definieren die Funktion $|f|$ durch $|f|(x) := |f(x)|$ und, für zwei numerische Funktionen f, g,

$$(f \cup g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \quad (f \cap g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}\ .$$

Der positive Teil f^+ und der negative Teil f^- von f sind dann gegeben durch $f^+ := f \cup 0$ und $f^- := -(f \cap 0) = (-f) \cup 0$. Offenbar gilt $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$. Wir schreiben $f \geq 0$, wenn $f = f^+$ gilt, und $f \leq g$, wenn $f(x) \leq g(x)\ \forall\, x \in \mathbf{X}$ gilt. (Ist $g - f$ erklärt, so ist $f \leq g$ äquivalent zu $g - f \geq 0$.)

1.2 Der Begriff des Integrals

Definition 1.2 *Eine Menge* $\mathcal{X}$ *reellwertiger Funktionen* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* **Vektorverband**, *wenn aus* $f, g \in \mathcal{X}$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *folgt* $\alpha f, f + g, |f| \in \mathcal{X}$.

Folgerung 1.3 *Ist* $\mathcal{X}$ *ein Vektorverband, so gilt mit* $f, g \in \mathcal{X}$ *auch* $f \cup g, f \cap g, f^+, f^- \in \mathcal{X}$.

Beweis. Man verwende $f \cup g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und $f \cap g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$. □

Beispiel 1.4 *Die Menge* $\mathcal{X}^{(1)} := \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ *der stetigen Funktionen* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit kompaktem Träger bilden einen Vektorverband. (Man sagt, dass* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *einen kompakten Träger hat, wenn Zahlen* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *existieren, so dass* $x_1 = x_1(f) < x_2 = x_2(f)$ *und* $f(x) = 0$ $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus [x_1, x_2]$ *gilt.)*

Beispiel 1.5 *Die Menge* $\mathbf{R}_0(\mathbb{R})$ *der Riemann-integrierbaren Funktionen mit kompaktem Träger ist ein Vektorverband.*

Definition 1.6 *Ein auf einem Vektorverband* $\mathcal{X}$ *definiertes lineares Funktional* $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *nennen wir* **Integral** *auf* $\mathcal{X}$, *wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

(I1) $f \in \mathcal{X}$, $f \geq 0 \Rightarrow \mathcal{J}(f) \geq 0$ (*Positivität von* $\mathcal{J}$),

(I2) $f, f_n \in \mathcal{X}$, $f_n \uparrow f \Rightarrow \mathcal{J}(f_n) \uparrow \mathcal{J}(f)$ (*Stetigkeit von unten*).

Dabei bedeutet $f_n \uparrow f$, *dass* $f_n \leq f_{n+1}\ \forall\, n$ (*isotone Folge*) *und* $\lim f_n(x) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbf{X}$ *gilt.*

Wegen der Linearität von $\mathcal{J}$ ist die Stetigkeit von unten äquivalent zur Stetigkeit von oben, ja sogar zur Nullstetigkeit von oben (d.h., $f_n \downarrow 0 \Rightarrow \mathcal{J}(f_n) \downarrow 0$).

Beispiel 1.7 *Als Funktional* $\mathcal{J}^{(1)} : \mathcal{X}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ (*vgl. Bsp. 1.4*) *wählen wir das Riemann-Integral. Dann ist dieses Funktional ein Integral gemäß Definition 1.6.*

Die im Folgenden zu betrachtenden Grenzwerte können aus $\mathbb{R}^e$ sein.

Satz 1.8 *Es seien* $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ein Integral,* $f, g \in \mathcal{X}$ *und* $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ *isotone Folgen von Funktionen aus* $\mathcal{X}$. *Dann gilt*

(a) $f \leq g \Rightarrow \mathcal{J}(f) \leq \mathcal{J}(g)$ (*Isotonie des Integrals*),

(b) $|\mathcal{J}(f)| \leq \mathcal{J}(|f|)\ \forall\, f \in \mathcal{X}$,

(c) $\lim f_n \geq 0 \Rightarrow \lim \mathcal{J}(f_n) \geq 0$,

(d) $\lim f_n \leq \lim g_n \Rightarrow \lim \mathcal{J}(f_n) \leq \lim \mathcal{J}(g_n)$,

(e) $\lim f_n = \lim g_n \Rightarrow \lim \mathcal{J}(f_n) = \lim \mathcal{J}(g_n)$.

Beweis.

(a) $f \leq g \;\Rightarrow\; g - f \geq 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{J}(g) - \mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(g - f) \geq 0$

(b) $\pm f \leq |f| \;\Rightarrow\; \pm\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(\pm f) \leq \mathcal{J}(|f|)$

(c) $\lim f_n \geq 0 \;\Rightarrow\; (f_n \cap 0) \uparrow 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{J}(f_n \cap 0) \uparrow 0$
$f_n \geq f_n \cap 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{J}(f_n) \geq \mathcal{J}(f_n \cap 0) \;\Rightarrow\; \lim \mathcal{J}(f_n) \geq 0$

(d) $\lim f_n \leq \lim g_n \;\Rightarrow\; f_k \leq \lim g_n\ \forall\, k \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} (g_n - f_k) \geq 0$
$\overset{(c)}{\Rightarrow}\; 0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{J}(g_n - f_k) = \lim \mathcal{J}(g_n) - \mathcal{J}(f_k) \;\Rightarrow\; \mathcal{J}(f_k) \leq \lim \mathcal{J}(g_n)\ \forall\, k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow\; \lim \mathcal{J}(f_n) \leq \lim \mathcal{J}(g_n)$

(e) Folgt aus (d).

□

1.3 Fortsetzung eines Integrals auf die isotone Hülle

Definition 1.9 *Man nennt*

$$\mathcal{X}^{\sigma} := \{F : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e : \exists\ (f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}\ mit\ f_n \uparrow F\}$$

die **isotone Hülle** *des Vektorverbandes* $\mathcal{X}$.

Beachte: $\mathcal{X}^\sigma$ ist i. Allg. kein Vektorverband.

Satz 1.10 *Aus* $(F_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X}^\sigma$ *und* $F_n \uparrow F$ *folgt* $F \in \mathcal{X}^\sigma$.

Beweis. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Folge $\left(f_n^{(k)}\right)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X}$ mit $f_n^{(k)} \uparrow F_k$. Wir setzen $f_n := f_n^{(1)} \cup \ldots \cup f_n^{(n)}$. Es folgt $f_n \le f_{n+1}$ und $\widetilde{F} := \lim f_n \in \mathcal{X}^\sigma$. Aus $f_n^{(k)} \le F_k$ folgt $f_n \le F_1 \cup \ldots \cup F_n = F_n \le F$, also $\widetilde{F} \le F$, während andererseits $f_{n+k} \ge f_{n+k}^{(n)} \ge f_k^{(n)}$ und somit $\widetilde{F} = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n+k} \ge \lim\limits_{k\to\infty} f_k^{(n)} = F_n$ gilt, so dass $\widetilde{F} \ge \lim F_n = F$. Damit ist $\widetilde{F} = F \in \mathcal{X}^\sigma$. □

Definition 1.11 *Für* $F \in \mathcal{X}^\sigma$, $f_n \in \mathcal{X}$ *und* $f_n \uparrow F$ *nennen wir* $\mathcal{J}^*(F) := \lim \mathcal{J}(f_n)$ **verallgemeinertes Integral** *von* F .

Nach Satz 1.8,(e) ist $\mathcal{J}^*(F)$ unabhängig von der Wahl der Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ mit $f_n \uparrow F$. Für $f \in \mathcal{X}$ kann man $f_n = f \ \forall n \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $\mathcal{J}^*(f) = \mathcal{J}(f) \ \forall f \in \mathcal{X}$ gilt. Außerdem hat das verallgemeinerte Integral folgende Eigenschaften:

(V1) $\mathcal{J}^*(\alpha F) = \alpha \mathcal{J}^*(F)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \ge 0$, $F \in \mathcal{X}^\sigma$

(V2) $\mathcal{J}^*(F+G) = \mathcal{J}^*(F) + \mathcal{J}^*(G)$, $F, G \in \mathcal{X}^\sigma$

(V3) $\mathcal{J}^*(F \pm g) = \mathcal{J}^*(F) \pm \mathcal{J}^*(g)$, $F \in \mathcal{X}^\sigma$, $g \in \mathcal{X}$

(V4) $F \le G \Rightarrow \mathcal{J}^*(F) \le \mathcal{J}^*(G)$

Satz 1.12 $\mathcal{J}^*$ *ist auf* $\mathcal{X}^\sigma$ *stetig von unten.*

Beweis. Sei $(F_n) \subset \mathcal{X}^\sigma$, $F_n \uparrow F$. Dann existiert eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{X}$ mit $f_n \le F_n \le F$ und $f_n \uparrow F$ (vgl. Beweis von Satz 1.10). Es folgt

$$\mathcal{J}^*(F) = \lim \mathcal{J}(f_n) = \lim \mathcal{J}^*(f_n) \overset{(V4)}{\le} \lim \mathcal{J}^*(F_n) \overset{(V4)}{\le} \mathcal{J}^*(F)$$

und somit $\mathcal{J}^*(F) = \lim \mathcal{J}^*(F_n)$. □

Beispiel 1.13 *Wir wählen* $\mathbf{X}^{(2)} = \mathbb{N}_0$ *und*

$$\mathcal{X}^{(2)} = \{f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : |\{k \in \mathbb{N}_0 : f(k) \ne 0\}| < \infty\} , \quad \mathcal{J}^{(2)}(f) := \sum_{k=0}^\infty f(k) .$$

Dann ist $\mathcal{J}^{(2)}$ *ein Integral auf dem Vektorverband* $\mathcal{X}^{(2)}$, *und gilt*

$$\mathcal{X}^{(2)\sigma} = \{F : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} : \exists\, k_0 \text{ mit } F(k) \ge 0 \ \forall k \ge k_0\} , \quad \mathcal{J}^{(2)*}(F) = \sum_{k=0}^\infty f(k) .$$

1.4 Lebesgue-Integrale

Definition 1.14 *Die Funktionen der Menge* $\mathcal{X}_0^\sigma := \{F \in \mathcal{X}^\sigma : \mathcal{J}^*(F) < \infty\}$ *nennt man* **Levi-Funktionen**. *Das Integral* $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* **Lebesgue-Integral** (*kurz* **L-Integral**), *wenn*

$$\{G : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}\} \cap \mathcal{X}_0^\sigma \subset \mathcal{X}$$

gilt. Man nennt dann das Tripel $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ *einen* **Integrationsraum**. *Mit* $\mathcal{M}_\mathcal{J}$ *bezeichnen wir die Menge von Funktionen*

$$\mathcal{M}_\mathcal{J} := \{\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R} : \exists\, F \in \mathcal{X}_0^\sigma \text{ mit } \varphi(x) \neq F(x) \iff F(x) = \infty\} .$$

Wir nennen das Lebesgue-Integral $\mathcal{J}$ *ein* **vollständiges L-Integral**, *wenn* $\mathcal{M}_\mathcal{J} \subset \mathcal{X}$ *gilt.*

Wir betrachten die Beispiele 1.4 und 1.7 und bezeichnen für $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ mit $g_{ab} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion aus $\mathcal{X}^{(1)}$, die auf $[a-b, a]$ und $[a, a+b]$ linear ist und für die $g_{ab}(a) = 1$ sowie $g_{ab}(x) = 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus [a-b, a+b]$ gilt. Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige Folge paarweise verschiedener reeller Zahlen, so setzen wir

$$f_n := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_{a_k, 2^{-j-k}}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ ist isoton, so dass $F = \lim f_n$ wohldefiniert ist. Dabei gilt

$$\mathcal{J}^{(1)}(f_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{j+k}} = \sum_{j=1}^n 2^{-j} \sum_{k=1}^n 2^{-k} < 1\,.$$

Also gilt $F \in \mathcal{X}_0^{(1)\sigma}$. Außerdem haben wir für $n \geq m$

$$f_n(a_m) \geq \sum_{j=1}^n 1 = n\,,$$

so dass $F(a_m) = \infty\ \forall\, m \in \mathbb{N}$. Die Funktionen aus $\mathcal{M}_{\mathcal{J}^{(1)}}$ können in den Punkten a_m also beliebige Werte annehmen.

Fragestellung: Kann ein Integral $\mathcal{J}$ zu einem L-Integral bzw. zu einem vollständigen L-Integral $\widetilde{\mathcal{J}}$ auf einen Vektorverband $\widetilde{\mathcal{X}} \supset \mathcal{X}$ fortgesetzt werden?

Theorem 1.15 *Jedes Integral besitzt genau eine* **minimale** *Fortsetzung zu einem vollständigen L-Integral.*

Zum Beweis dieses Theorems benötigen wir die folgenden Lemmata 1.16-1.21.

Lemma 1.16 *Ist* $\widetilde{\mathcal{J}} : \widetilde{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine vollständige Fortsetzung des Integrals* $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, *so gilt*

$$L(\mathcal{J}) := \{\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R} : \exists\, F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma \text{ mit } \varphi + G = F\} \subset \widetilde{\mathcal{X}}\,.$$

Beweis. Es seien $\varphi \in L(\mathcal{J})$ und $\varphi + G = F$ mit $G, F \in \mathcal{X}_0^\sigma$. Sei nun $g \in \mathcal{M}_\mathcal{J}$ mit $g(x) \neq G(x) \iff G(x) = \infty$. Wir setzen $f = \varphi + g$. Es folgt $f(x) = F(x) \iff F(x) \neq \infty$, so dass $f \in \mathcal{M}_\mathcal{J}$. Damit sind $f, g \in \widetilde{\mathcal{X}}$ und $\varphi = f - g \in \widetilde{\mathcal{X}}$. □

Lemma 1.17 *Die in Lemma 1.16 definierte Menge $L(\mathcal{J})$ ist ein Vektorverband.*

Beweis. Es seien $\varphi, \psi \in L(\mathcal{J})$ und $\alpha \geq 0$. Dann existieren $G, F, E, D \in \mathcal{X}_0^\sigma$ mit $\varphi + G = F$ und $\psi * E = D$. Es folgt $-\varphi + F = G$, $\alpha\varphi + \alpha G = \alpha F$, $(\varphi + \psi) + (G + E) = F + D$ und $(\varphi \cap 0) + G = (\varphi + G) \cap G = F \cap G$. Es bleiben Aufg. 4,(a) und Aufg. 1, Abschn. 1.6 anzuwenden. □

Lemma 1.18 *Es existiert höchstens eine Fortsetzung $\widetilde{\mathcal{J}}$ von $\mathcal{J}$ zu einem Integral auf einen Vektorverband $\widetilde{\mathcal{X}} \subset L(\mathcal{J})$.*

Beweis. Es seien $\varphi \in \widetilde{\mathcal{X}} \subset L(\mathcal{J})$, $\varphi + G = F$ und $(f_n)_{n=1}^\infty, (g_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X}$ mit $f_n \uparrow F$, $g_n \uparrow G$. Ist $\widetilde{\mathcal{J}}$ eine Fortsetzung von $\mathcal{J}$ auf $\widetilde{\mathcal{X}}$, so folgt $\widetilde{\mathcal{J}}(\varphi) + \lim \mathcal{J}(g_n) = \lim \widetilde{\mathcal{J}}(\varphi + g_n) = \lim \mathcal{J}(f_n)$ nach Satz 1.8,(e). Damit haben wird

$$\widetilde{\mathcal{J}}(\varphi) = \lim \mathcal{J}(f_n) - \lim \mathcal{J}(g_n) = \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G)\,.$$

Also ist $\widetilde{\mathcal{J}}$ durch $\mathcal{J}$ eindeutig bestimmt. □

Ausgehend von Lemma 1.18 und dessen Beweis definieren wir für $\varphi \in L(\mathcal{J})$

$$\mathcal{J}_L(\varphi) := \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G)\,,$$

wobei $\varphi + G = F$ und $F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$.

Lemma 1.19 *Die Definition von $\mathcal{J}_L(\varphi)$ ist korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl der $F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$ mit $\varphi + G = F$.*

Beweis. Es seien $\varphi \in L(\mathcal{J})$ und $\varphi + G = F$, $\varphi + G_1 = F_1$ mit $G, F, G_1, F_1 \in \mathcal{X}_0^\sigma$. Es folgt $F + G_1 = \varphi + G + G_1 = F_1 + G$, so dass wegen (V2) gilt $\mathcal{J}^*(F) + \mathcal{J}^*(G_1) = \mathcal{J}^*(F_1) + \mathcal{J}^*(G)$, also $\mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G) = \mathcal{J}^*(F_1) - \mathcal{J}^*(G_1)$. □

Lemma 1.20 *Für jedes $\varphi \in L(\mathcal{J})$ und jedes $\varepsilon > 0$ existieren $F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$ mit $\varphi + G = F$, $G \geq 0$ und $\mathcal{J}^*(G) < \varepsilon$.*

Beweis. Seien $\varphi + G_1 = F_1$ und $G_1, F_1 \in \mathcal{X}_0^\sigma$ sowie $(g_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X}$ mit $g_n \uparrow G_1$. Damit ist $\mathcal{J}^*(G_1) = \lim \mathcal{J}(g_n)$, so dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathcal{J}^*(G_1 - g_{n_0}) \overset{(V3)}{=} \mathcal{J}^*(G_1) - \mathcal{J}(g_{n_0}) < \varepsilon$. es bleibt $G := G_1 - g_{n_0}$ und $F := F_1 - g_{n_0}$ zu setzen. □

Lemma 1.21 *Es sei $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset L(\mathcal{J})$ eine isotone Folge. Dann existieren für jedes $\varepsilon > 0$ solche $F, G \in \mathcal{X}^\sigma$, so dass $G \geq 0$, $\mathcal{J}^*(G) < \varepsilon$ sowie*

$$\lim_{n\to\infty} (\varphi_n + G) = F \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_L(\varphi_n) = \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G)$$

gilt.

Beweis. Nach Lemma 1.20 gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ Funktionen $F_n, G_n \in \mathcal{X}_0^\sigma$ mit $G_n \geq 0$, $\mathcal{J}^*(G_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ und $\varphi_n + G_n = F_n$. Wir setzen $\widetilde{G}_n := \sum_{k=0,k\neq n}^\infty G_k$, $G := \sum_{k=0}^\infty G_k$ und $\widetilde{F}_n := \widetilde{G}_n + F_n$. Es folgt unter Verwendung von Aufg. 6, Abschn. 1.6

$$\mathcal{J}^*(\widetilde{G}_n) \overset{(V4)}{\leq} \mathcal{J}^*(G) = \sum_{k=0}^\infty \mathcal{J}^*(G_k) < \varepsilon\,.$$

Also gilt $\widetilde{G}_n, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$ und somit auch $\widetilde{F}_n \in \mathcal{X}_0^\sigma$. Wegen $\varphi_n + G = \varphi_n + G_n + \widetilde{G}_n = F_n + \widetilde{G}_n = \widetilde{F}_n$ ist $\mathcal{J}_L(\varphi_n) = \mathcal{J}^*(\widetilde{F}_n) - \mathcal{J}^*(G)$. Offenbar ist die Folge der $\widetilde{F}_n = \varphi_n + G$ isoton, so dass nach Satz 1.10 folgt $\widetilde{F}_n \uparrow F \in \mathcal{X}^\sigma$ und somit

$$\lim \mathcal{J}_L(\varphi_n) = \lim \mathcal{J}^*(\widetilde{F}_n) - \mathcal{J}^*(G) \overset{Satz\ 1.12}{=} \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G)\,.$$

□

Beweis von Theorem 1.15. Wir zeigen, dass $\mathcal{J}_L : L(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ein vollständiges L-Integral ist. Nach Lemma 1.18 ist diese Fortsetzung eindeutig und nach Lemma 1.16 minimal. Es seien $\varphi, \psi \in L(\mathcal{J})$ und $\varphi + G = F$, $\psi + E = D$ mit $D, E, F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$, sowie $\alpha \geq 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_L(-\varphi) &= \mathcal{J}^*(G) - \mathcal{J}^*(F) = -\mathcal{J}_L(\varphi)\,,\\
\mathcal{J}_L(\alpha\varphi) &= \mathcal{J}^*(\alpha F) - \mathcal{J}^*(\alpha G) \overset{(V1)}{=} \alpha[\mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G)] = \alpha \mathcal{J}_L(\varphi)\,,\\
\mathcal{J}_L(\varphi + \psi) &\overset{(V2)}{=} \ldots = \mathcal{J}_L(\varphi) + \mathcal{J}_L(\psi)\,.
\end{aligned}$$

Außerdem folgt aus $\varphi \geq 0$ auch $F \geq G$ und somit nach (V4) $\mathcal{J}_L(\varphi) = \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G) \geq 0$. Somit ist $\mathcal{J}_L : L(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Integral, falls wir noch die Stetigkeit von unten zeigen können: Dazu seien $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset L(\mathcal{J})$ und $\varphi_n \uparrow \varphi \in L(\mathcal{J})$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig. Es folgt $\mathcal{J}_L(\varphi_n) \leq \mathcal{J}_L(\varphi) < \infty$. Nach Lemma 1.21 existieren Funktionen $F, G \in \mathcal{X}^\sigma$ mit $G \geq 0$, $\mathcal{J}^*(G) < \varepsilon$, $\varphi + G = \lim \varphi_n + G = F$ und $\mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G) = \lim \mathcal{J}_L(\varphi_n) \in \mathbb{R}$. Also gilt $F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$ und somit

$$\mathcal{J}_L(\varphi) = \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G) = \lim \mathcal{J}_L(\varphi_n)\,.$$

Es bleibt noch die Vollständigkeit von $\mathcal{J}_L$ zu zeigen, d.h. $\mathcal{M}_{\mathcal{J}_L} \subset L(\mathcal{J})$: Es sei $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}_L}$. Dann existiert ein $E \in L(\mathcal{J})_0^\sigma$, so dass $\varphi(x) \neq E(x)$ genau dann, wenn $E(x) = \infty$. Es gibt also eine Folge $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset L(\mathcal{J})$ mit $\varphi_n \uparrow E$, wobei $\lim \mathcal{J}_L(\varphi_n) < \infty$ gilt. Wie im vorhergehenden Schritt finden wir $F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$ mit $E + G = \lim \varphi_n + G = F$. Wegen $\varphi + E = 2E$ folgt daraus $\varphi + F + G = \varphi + E + 2G = 2(E + G) = 2F$, also $\varphi \in L(\mathcal{J})$. □

Wir betrachten Beispiel 1.13. Offenbar ist

$$\mathcal{X}_0^{(2)\sigma} = \left\{ f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=0}^\infty f(n) < \infty,\ f(n) \geq 0\ \forall\, n \geq n_0(f) \right\}.$$

Man kann zeigen, dass

$$L(\mathcal{J}^{(2)}) = \left\{ f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=0}^\infty |f(n)| < \infty \right\} =: \ell^1_{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_L^{(2)}(f) = \sum_{n=0}^\infty f(n)$$

gilt.

1.5 Grenzwertsätze. Mengen vom Maße Null

Im Weiteren sei $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum.

Satz 1.22 (Beppo Levi) *Seien $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X}$, $\varphi_n \uparrow \varphi$ oder $\varphi_n \downarrow \varphi$ und $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$. Ferner sei $(\mathcal{J}(\varphi_n))_{n=1}^\infty$ beschränkt. Dann gilt $\varphi \in \mathcal{X}$ und $\lim \mathcal{J}(\varphi_n) = \mathcal{J}(\varphi)$.*

Beweis. $\varphi_n \uparrow \varphi$: Aus $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{X}^\sigma$ und $\mathcal{J}^*(\varphi) = \lim \mathcal{J}(\varphi_n) < \infty$ folgt $\varphi \in \{f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}\} \cap \mathcal{X}_0^\sigma \subset \mathcal{X}$ und somit $\mathcal{J}^*(\varphi) = \mathcal{J}(\varphi)$.

$\varphi_n \downarrow \varphi$: Verwende $-\varphi_n \uparrow -\varphi$. □

Definition 1.23 *Unter dem System der* **messbaren Funktionen** *versteht man das kleinste Funktionensystem* $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ *numerischer Funktionen* $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$, *welches folgenden Bedingungen genügt:*

(m1) $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

(m2) $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *und, falls definiert,* $\varphi + \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

(m3) $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n := \sup\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\} \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

Das System $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ der messbaren Funktionen hat folgende Eigenschaften:

($\mathcal{M}$1) $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi^{\pm}, |\varphi| \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

($\mathcal{M}$2) $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi \cap \psi, \varphi \cup \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

($\mathcal{M}$3) $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n := \inf\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\}, \liminf \varphi_n, \limsup \varphi_n \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

($\mathcal{M}$4) $\mathcal{M}(\mathcal{X}) = \{\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e : \exists\,(\varphi_n) \subset \mathcal{X} \text{ mit } \varphi_n \longrightarrow \varphi\}$.

Beweis. ($\mathcal{M}$1)-($\mathcal{M}$3) ÜA. Wir beweisen ($\mathcal{M}$4): Dazu setzen wir

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) := \{\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e : \exists\,(\varphi_n) \subset \mathcal{X} \text{ mit } \varphi_n \longrightarrow \varphi\}$$

und halten fest, dass mit $\varphi \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ auch $\varphi^{\pm} \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ gilt, und dass $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ auch (m1) und (m2) genügt.

(a) Wir zeigen, dass für $\varphi \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ mit $\varphi \geq 0$ eine Folge $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$ mit $\varphi_n \geq 0$ und $\varphi_n \uparrow \varphi$ existiert:

Es existieren $\widetilde{\varphi}_n \in \mathcal{X}$ mit $\widetilde{\varphi}_n \longrightarrow \varphi$, also $\widetilde{\varphi}_n^+ \longrightarrow \varphi$. Wir setzen $\varphi_n := \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \widetilde{\varphi}_k^+ = \lim\limits_{m\to\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{m} \widetilde{\varphi}_k^+$. Aus Satz 1.22 folgt $\varphi_n \in \mathcal{X}$ und $\lim \varphi_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n = \liminf \widetilde{\varphi}_n^+ = \varphi$, also $\varphi_n \uparrow \varphi$.

(b) Wir zeigen, dass aus $\varphi_n \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ und $\varphi_n \uparrow \varphi$ folgt $\varphi \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$:

Aus $\varphi_n \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ und $\varphi_n \uparrow \varphi$ folgt $\varphi_n^+ \uparrow \varphi^+$ und $\varphi_n^- \downarrow \varphi^-$, wobei nach (a) gilt $\varphi_n^{\pm} \in \mathcal{X}^{\sigma}$. Damit gilt auch $\varphi^+ \in \mathcal{X}^{\sigma} \subset \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$. Nach (a) existieren weiter $\psi_k \in \mathcal{X}$ mit $\psi_k \geq 0$ und $\psi_k \uparrow \varphi_0^-$, also $\varphi_0^- \in \mathcal{X}^{\sigma}$ und ebenso $\varphi_n^- \in \mathcal{X}^{\sigma}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Es folgt $\psi_k \cap \varphi_n^- \in \mathcal{X}^{\sigma}$ (vgl. Abschnitt 1.6, Aufgabe 4) und, wegen $0 \leq \psi_k \cap \varphi_n^- \leq \psi_k$, $\psi_k \cap \varphi_n^- \in \mathcal{X}_0^{\sigma}$. Da ein Lebesgue-Integral vorliegt, haben wir somit $\psi_k \cap \varphi_n^- \in \mathcal{X}$, wobei außerdem $\psi_k \cap \varphi_n^- \downarrow \psi_k \cap \varphi^-$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt. Satz 1.22 liefert $\psi_k \cap \varphi^- \in \mathcal{X}$ mit $\psi_k \cap \varphi^- \uparrow \varphi_0^- \cap \varphi^- = \varphi^-$. Es folgt $\varphi^- \in \mathcal{X}^{\sigma} \subset \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ und somit $\varphi = \varphi^+ - \varphi^- \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$.

(c) Wir zeigen, dass $\mathcal{M}(\mathcal{X}) = \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ gilt:

Aus $\varphi \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ folgt $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ für gewisse $\varphi_n \in \mathcal{X}$ und somit wegen ($\mathcal{M}$4) auch $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. Also $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ die Bedingung (m3) erfüllt. Offenbar folgt aus $\varphi_n \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$ auch $\varphi_0 \cup \ldots \cup \varphi_k \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$. Aus (b) folgt $\varphi_0 \cup \ldots \cup \varphi_k \uparrow \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X})$. □

Aus dem Beweisschritt (a) zur Eigenschaft ($\mathcal{M}4$) erhalten wir folgendes Lemma.

Lemma 1.24 *Für jedes* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *mit* $\varphi \geq 0$ *existiert eine Folge* $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$ *mit* $\varphi_n \geq 0$ *und* $\varphi_n \uparrow \varphi$ *.*

Dieses Lemma besagt, dass besagt $\mathcal{M}(\mathcal{X}) \cap \{\varphi \geq 0\} \subset \mathcal{X}^\sigma$ gilt. Nach ($\mathcal{M}1$) sind mit φ auch $\varphi^\pm$ Elemente von $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ und somit von $\mathcal{X}^\sigma$, so dass $\mathcal{J}^*(\varphi^\pm)$ erklärt sind und wir folgende Definition geben können.

Definition 1.25 *Wir sagen, dass das* **Integral** *von* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ **existiert** *bzw. dass* φ **integrierbar** *ist, wenn wenigstens eines der verallgemeinerten Integrale* $\mathcal{J}^*(\varphi^\pm)$ *endlich ist, und schreiben dann*

$$\int \varphi(x)\,dx := \mathcal{J}^*(\varphi^+) - \mathcal{J}^*(\varphi^-)\,.$$

Bemerkung Ist $\varphi \in \mathcal{X}^\sigma$, so ist φ integrierbar, und es gilt $\displaystyle\int \varphi(x)\,dx = \mathcal{J}^*(\varphi)$, denn aus $\varphi_n \in \mathcal{X}$ und $\varphi_n \uparrow \varphi$ folgt $\varphi_n^- \downarrow \varphi^-$ und $0 \leq \mathcal{J}(\varphi_n^-) \leq \mathcal{J}(\varphi_0^-) < \infty$, so dass $\varphi^- \in \mathcal{X}$ nach Satz 1.22. Es folgt $\displaystyle\int \varphi(x) = \mathcal{J}^*(\varphi^+) - \mathcal{J}^*(\varphi^-) \overset{(V3)}{=} \mathcal{J}^*(\varphi^+ - \varphi^-) = \mathcal{J}^*(\varphi)$. Außerdem haben wir $\displaystyle\int |\varphi(x)|\,dx = \mathcal{J}^*(\varphi^+) + \mathcal{J}^*(\varphi^-)$ für alle $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

Lemma 1.26 *Aus* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $\displaystyle\int |\varphi(x)|\,dx < \infty$ *folgt* $\varphi \in \mathcal{X}$.

Beweis. Nach Lemma 1.24 existieren $\varphi_n^{(\pm)} \subset \mathcal{X}$ mit $\varphi_n^{(\pm)} \in \mathcal{X}$ mit $\varphi_n^{(\pm)} \geq 0$ und $\varphi_n^{(\pm)} \uparrow \varphi^\pm$, wobei $\mathcal{J}(\varphi_n^{(\pm)}) \leq \mathcal{J}^*(\varphi^\pm) < \infty$ gilt. Aus Satz 1.22 folgt $\varphi^\pm \in \mathcal{X}$ und somit $\varphi = \varphi^+ - \varphi^- \in \mathcal{X}$. □

Satz 1.27 (Lemma von Fatou) *Sind* $(\varphi_n) \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *und* $\varphi_n \geq 0$, *so gilt*

$$\int \liminf \varphi_n(x)\,dx \leq \liminf \int \varphi_n(x)\,dx\,.$$

Beweis. Wir setzen $\varphi := \liminf \varphi_n$ und $\displaystyle\widetilde{\varphi}_n := \bigcap_{k=n}^{\infty} \varphi_k$. Es folgt $\widetilde{\varphi}_n \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}^\sigma$ (vgl. Lemma 1.24) und $\widetilde{\varphi}_n \uparrow \varphi$, also $\varphi \in \mathcal{X}^\sigma$. Folglich ist

$$\int \varphi(x)\,dx = \mathcal{J}^*(\varphi) \overset{Satz 1.12}{=} \lim \mathcal{J}^*(\widetilde{\varphi}_n) \overset{(V4)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \mathcal{J}^*(\varphi_k) = \liminf \mathcal{J}^*(\varphi_n)\,.$$

□

Der folgende Satz ist bekannt unter dem Namen **Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz**.

Satz 1.28 *Es seien* $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$, $\varphi_n \longrightarrow \varphi$, $|\varphi_n| \leq \psi$ *und* $\psi \in \mathcal{X}$. *Dann gilt* $\varphi \in \mathcal{X}$ *und*

$$\mathcal{J}(\varphi) = \lim \mathcal{J}(\varphi_n)\,.$$

Beweis. Aus $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ folgt $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $|\varphi| \le \psi$ und $|\varphi| \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}^\sigma$, also $\mathcal{J}^*(|\varphi|) \le \mathcal{J}^*(\psi) = \mathcal{J}(\psi)$. Lemma 1.26 liefert $\varphi \in \mathcal{X}$. Offenbar gilt $\psi \pm \varphi_n \ge 0$ und somit nach Satz 1.27

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\psi) - \mathcal{J}(\varphi) &= \mathcal{J}(\psi - \varphi) = \mathcal{J}(\lim(\psi - \varphi_n)) \le \liminf \mathcal{J}(\psi - \varphi_n) = \liminf \left[\mathcal{J}(\psi) - \mathcal{J}(\varphi_n)\right] \\ &= \mathcal{J}(\psi) - \limsup \mathcal{J}(\varphi_n) \end{aligned}$$

und analog

$$\mathcal{J}(\psi) + \mathcal{J}(\varphi) \le \mathcal{J}(\psi) + \liminf \mathcal{J}(\varphi_n)\,.$$

Es folgt $\limsup \mathcal{J}(\varphi_n) \le \mathcal{J}(\varphi) \le \liminf \mathcal{J}(\varphi_n)$. □

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ bezeichnen wir mit $\chi_A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ die **charakteristische Funktion** (erster Art)

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & : \quad x \in A\,, \\ 0 & : \quad x \in \mathbf{X} \setminus A\,, \end{cases}$$

der Menge A. Dagegen wird

$$\omega_A(x) := \begin{cases} \infty & : \quad x \in A\,, \\ 0 & : \quad x \in \mathbf{X} \setminus A\,, \end{cases}$$

die **charakteristische Funktion zweiter Art** der Menge A genannt.

Eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ heißt vom **Maße Null**, wenn $\omega_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $\int \omega_A(x)\,dx = 0$ gilt. Das System der Mengen vom Maße Null bezeichnen wir mit $\mathcal{N}(\mathcal{J})$.

Definition 1.29 *Ist eine Aussage $P(x)$ für $x \in \mathbf{X} \setminus A$ mit $A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ wahr, so sagt man „$P(x)$ gilt fast überall (f.ü.) auf $\mathbf{X}$“.*

Lemma 1.30 *Aus $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\varphi \ge 0$ und $\int \varphi(x)\,dx = 0$ folgt $\varphi = 0$ f.ü.*

Beweis. Setzen $A := \{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) > 0\}$ und $\varphi_n := n\,\varphi$. Es folgt $\varphi_n \uparrow \omega_A$ und $\varphi_n \in \mathcal{X}^\sigma$, so dass

$$\mathcal{J}^*(\omega_A) \overset{Satz 1.12}{=} \lim \mathcal{J}^*(\varphi_n) \overset{(V1)}{=} \lim n\mathcal{J}^*(\varphi) = 0$$

gilt. □

Lemma 1.31 *Für $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ mit $\left|\int \varphi(x)\,dx\right| < \infty$ gilt $|\varphi| < \infty$ f.ü.*

Beweis. Setzen $A := \{x \in \mathbf{X} : |\varphi(x)| = \infty\}$ und $\varphi_n := \frac{1}{n}|\varphi|$. Es folgt $\varphi_n \downarrow \omega_A$ und aus (V4)

$$\mathcal{J}^*(\omega_A) \le \frac{1}{n}\mathcal{J}^*(|\varphi|) \longrightarrow 0\,.$$

□

Im Weiteren besitze der Integrationsraum $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ die folgende Eigenschaft:

(E) Für alle $A \subset \mathbf{X}$ folgt aus $\omega_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ auch $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

In diesem Fall ist $A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ äquivalent dazu, dass $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $\mathcal{J}^*(\chi_A) = 0$ gilt. Aus Letzterem folgt nämlich $n\chi_A \uparrow \omega_A$ und $\mathcal{J}^*(\omega_A) = \lim n\mathcal{J}^*(\chi_A) = 0$.

Die folgenden zwei Sätze liefern je eine Variante des **Satzes von Beppo Levi** (Satz 1.22) und des **Satzes von Lebesgue** (Satz 1.28)

Satz 1.32 *Es seien* $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$, $\varphi_n \uparrow \varphi$ *oder* $\varphi_n \downarrow \varphi$ *f.ü. und* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. *Dann folgt*

$$\int \varphi(x)\, dx = \lim \int \varphi_n(x)\, dx\,.$$

Beweis. Seien $\{x \in \mathbf{X} : \varphi_n(x) \not\uparrow \varphi(x)\} \subset A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$. Es folgt $\varphi_n(1-\chi_A) \uparrow \varphi(1-\chi_A)$, wobei nach Aufg. 10, Abschn. 1.6 $\varphi_n(1-\chi_A) = \varphi_n - \varphi_n\chi_A \in \mathcal{X}$. Somit ist $\varphi(1-\chi_A) \in \mathcal{X}^\sigma$ und, wiederum wegen Aufg. 10, Abschn. 1.6,

$$\int \varphi(x)\, dx = \mathcal{J}^*(\varphi(1-\chi_A)) = \lim \mathcal{J}(\varphi_n(1-\chi_A)) = \lim \mathcal{J}(\varphi_n)\,.$$

$\square$

Satz 1.33 *Sind* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $(\varphi_n) \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\varphi, \varphi_n : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $|\varphi_n| \le \psi$ *f.ü,* $\psi \in \mathcal{X}$ *und* $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ *f.ü., so gilt auch* $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{X}$ *und* $\mathcal{J}(\varphi) = \lim \mathcal{J}(\varphi_n)$.

Beweis. Seien $\{x \in \mathbf{X} : \varphi_n(x) \not\longrightarrow \varphi(x)\} \subset A_1 \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ und $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \in \mathbf{X} : |\varphi_n(x)| > \psi(x)\} \subset A_2 \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$. Es folgt $A := A_1 \cup A_2 \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ und nach Aufg. 10, Abschn. 1.6 $\varphi\chi_A, \varphi_n\chi_A \in \mathcal{X}$ sowie

$$\mathcal{J}^*(|\varphi_n|) = \mathcal{J}^*(|\varphi_n(1-\chi_A)|) \le \mathcal{J}(\psi(1-\chi_A)) = \mathcal{J}(\psi)\,.$$

Aus Lemma 1.26 folgt $\varphi_n \in \mathcal{X}$. Außerdem gilt $\varphi_n(1-\chi_A) \longrightarrow \varphi(1-\chi_A)$. Satz 1.28 liefert $\varphi(1-\chi_A) \in \mathcal{X}$, also $\varphi \in \mathcal{X}$, und

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{J}(\varphi(1-\chi_A)) = \lim \mathcal{J}(\varphi_n(1-\chi_A)) = \lim \mathcal{J}(\varphi_n)\,.$$

$\square$

1.6 Übungsaufgaben

1. Man zeige, dass $\mathcal{X}$ genau dann ein Vektorverband ist, wenn aus $f, g \in \mathcal{X}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt $\alpha f, f+g, f \cap 0 \in \mathcal{X}$.

2. Man beweise, dass die Menge $\mathcal{X}^{(3)}$ der stetigen und stückweise linearen Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit kompakten Träger einen Vektorverband bilden.

3. Mit $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge der Zerlegungen der reellen Achse,

   $$\mathcal{Z}(\mathbb{R}) := \{\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} : -\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \infty,\, n \in \mathbb{N}_0\}\,.$$

   Eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{Z}(\mathbb{R})$ nennen wir **zulässig** für $f \in \mathcal{X}^{(3)}$, wenn $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [x_0, x_n]$ gilt und wenn f auf jedem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$ linear ist. Wir definieren auf $\mathcal{X}^{(3)}$ das Funktional $\mathcal{J}^{(3)}$ wie folgt. Sind $f \in \mathcal{X}^{(3)}$ und $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ zulässig für f, so setzen wir

   $$\mathcal{J}^{(3)}(f) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\,[f(x_{j-1}) + f(x_j)]\,(x_j - x_{j-1})\,.$$

   Man zeige, dass $\mathcal{J}^{(3)} : \mathcal{X}^{(3)} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Integral ist.

4. Man beweise:

   (a) $F, G \in \mathcal{X}^\sigma$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0 \Rightarrow F + G, F \cup G, F \cap G, \alpha F \in \mathcal{X}^\sigma$

   (b) $F \in \mathcal{X}^\sigma$, $F \geq 0 \Rightarrow \exists\ (f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X} : f_n \geq 0,\ f_n \uparrow F$

5. Man zeige, dass das verallgemeinerte Integral $\mathcal{J}^* : \mathcal{X}^\sigma \longrightarrow \mathbb{R}^e$ (vgl. Def. 1.11) die Eigenschaften (V1) – (V4) besitzt.

6. Man beweise, dass für $F_k \in \mathcal{X}^\sigma$ mit $F_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathcal{J}^* \left(\sum_{k=0}^\infty F_k \right) = \sum_{k=0}^\infty \mathcal{J}^*(F_k) \,.$$

   Hinweis: Man verwende Satz 1.12.

7. Man zeige:

   (a) $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi^+, \varphi^-, |\varphi| \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

   (b) $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi \cup \psi, \varphi \cap \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

   (c) $(\varphi_n)_{n=0}^\infty \subset \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \displaystyle\bigcap_{n=0}^\infty \varphi_n := \inf\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, $\liminf \varphi_n,\ \limsup \varphi_n \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

8. Man zeige, dass eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ genau dann zu $\mathcal{N}(\mathcal{J})$ gehört, wenn ein $F \in \mathcal{X}_0^\sigma$ mit $A = \{x \in \mathbf{X} : F(x) = \infty\}$ existiert.

9. Der Integrationsraum $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ besitze die Eigenschaft (E). Man zeige, dass $\mathcal{N}(\mathcal{J})$ ein σ-Ring ist, d.h., dass aus $A, B \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ und $A_n \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$, $n \in \mathbb{N}$ folgt $A \setminus B \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ und $\displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$.

10. Der Integrationsraum $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ besitze die Eigenschaft (E). Man zeige, aus $A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ und $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt $\displaystyle\int \varphi(x)\chi_A(x)\,dx = 0$ und, falls $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, auch $\varphi\chi_A \in \mathcal{X}$.

    Zusatz: Man zeige, dass auch $\varphi(1 - \chi_A) \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ gilt und dass, falls $\displaystyle\int \varphi(x)\,dx$ existiert,

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \varphi(x)[1 - \chi_A(x)]\,dx \,.$$

Kapitel 2

Die Räume $\mathbf{L}^p(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$

Es sei im Weiteren $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum mit der Eigenschaft (E) und der folgenden Eigenschaft:

(p) Für $1 \le p < \infty$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt $\varphi\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $|\varphi|^p \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

2.1 Definitionen und einfachste Eigenschaften

Auf $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$\varphi \sim \psi \iff \exists\, A \in \mathcal{N}(\mathcal{J}) : \{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) \neq \psi(x)\} \subset A\,, \tag{2.1}$$

was natürlich äquivalent zu $\varphi = \psi$ f.ü. ist. Ferner erklären wir auf der Menge $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) = \{[\varphi]_\sim : \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})\}$ der entsprechenden Äquivalenzklassen

$$\big|[\varphi]_\sim\big|^p := [|\varphi|^p]_\sim\ ,\ \lambda[\varphi]_\sim := [\lambda\varphi]_\sim\,,\ [\varphi]_\sim \cdot [\psi]_\sim := [\varphi\psi]_\sim \tag{2.2}$$

und, falls Repräsentanten φ und ψ existieren, für die $\varphi + \psi$ f.ü. definiert ist,

$$[\varphi]_\sim + [\psi]_\sim := [(\varphi(1-\chi_A) + \psi(1-\chi_A)]_\sim\,, \tag{2.3}$$

wobei $\{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) + \psi(x) \text{ ist nicht definiert}\} \subset A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$. Man beachte dabei, dass unter Verwendung von Aufgabe 10, Abschnitt 1.6 folgt $\varphi(1-\chi_A), \psi(1-\chi_A) \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. Ferner seien

$$[\varphi]_\sim \le [\psi]_\sim \iff \exists\, A \in \mathcal{N}(\mathcal{J}) : \{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) > \psi(x)\} \subset A \tag{2.4}$$

und

$$\int [\varphi]_\sim \, dx := \int \varphi(x)\, dx\,, \tag{2.5}$$

falls dieses Integral existiert. Mit $\mathbf{L}^p = \mathbf{L}^p(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$, $1 \le p < \infty$ bezeichnen wir die Menge

$$\mathbf{L}^p = \left\{ [\varphi]_\sim \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) : \int \big|[\varphi]_\sim\big|^p dx < \infty \right\}.$$

Wir beschränken uns im Weiteren auf den Fall $p = 2$ und schreiben für $[\varphi]_\sim \in \mathbf{L}^2$ einfach $\varphi \in \mathbf{L}^2$.

Satz 2.1 $\mathbf{L}^2$ *ist ein linearer Raum, und auf* $\mathbf{L}^2$ *kann man das* **innere Produkt** (*auch* **Skalarprodukt** *genannt*)

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int \varphi(x)\psi(x)\, dx$$

erklären, d.h., es gilt für alle $\varphi, \psi, \zeta \in \mathbf{L}^2$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$

(S1) $\langle\varphi,\varphi\rangle\geq 0$ *und* $(\langle\varphi,\varphi\rangle=0\Leftrightarrow\varphi=0)$,

(S2) $\langle\varphi,\psi\rangle=\langle\psi,\varphi\rangle$,

(S3) $\langle\lambda\varphi,\psi\rangle=\lambda\langle\varphi,\psi\rangle$,

(S4) $\langle\varphi+\psi,\zeta\rangle=\langle\varphi,\zeta\rangle+\langle\psi,\zeta\rangle$.

Beweis. Vorüberlegungen: Wir erinnern daran, dass für $\varphi\in\mathcal{M}(\mathcal{X})$ gilt

$$\int|\varphi(x)|\,dx=\mathcal{J}^*(\varphi^+)+\mathcal{J}^*(\varphi^-)\,.$$

Nach Lemma 1.31 folgt somit aus $\int|\varphi(x)|\,dx<\infty$, dass $\varphi^\pm(x)<\infty\ \forall x\in\mathbf{X}\setminus A$ für ein $A\in\mathcal{N}(\mathcal{J})$. Damit ist $\mathcal{J}^*(\varphi^\pm(1-\chi_A))=\mathcal{J}(\varphi^\pm(1-\chi_A))$, also

$$\int\varphi(x)\,dx=\int\varphi(x)\,[1-\chi_A(x)]\,dx=\mathcal{J}(\varphi(1-\chi_A))\,.$$

Unter Verwendung der Linearität von $\mathcal{J}:\mathcal{X}\longrightarrow\mathbb{R}$ erhalten wir also

$$\int[\varphi(x)+\psi(x)]\,dx=\int\varphi(x)\,dx+\int\psi(x)\,dx$$

für $\varphi,\psi\in\mathcal{M}(\mathcal{X})$ mit $\int|\varphi(x)|\,dx<\infty$ und $\int|\psi(x)|\,dx<\infty$.

Ist $\varphi\in\mathbf{L}^2$, so folgt aus Lemma 1.31 $|\varphi(x)|<\infty$ f.ü., so dass auch $\lambda\varphi$ und $\varphi+\psi$ f.ü. definiert sind für $\lambda\in\mathbb{R}$ und $\varphi,\psi\in\mathbf{L}^2$. Aus $|\varphi(x)+\psi(x)|^2\leq 2\left(|\varphi(x)|^2+|\psi(x)|^2\right)$ folgt außerdem $\int|\varphi(x)+\psi(x)|^2\,dx<\infty$ unter Beachtung obiger Vorüberlegungen. Also ist $\mathbf{L}^2$ ein linearer Raum. Aus $|\varphi(x)\psi(x)|\leq\frac{1}{2}\left[|\varphi(x)|^2+|\psi(x)|^2\right]$ folgt, dass $\langle\varphi,\psi\rangle$ für beliebige $\varphi,\psi\in\mathbf{L}^2$ eine endliche Zahl ist. Die Eigenschaft (S1) folgt aus Lemma 1.30, (S2) aus der Definition und (S3), (S4) aus der Linearität von $\mathcal{J}:\mathcal{X}\longrightarrow\mathbb{R}$ unter Beachtung obiger Vorüberlegungen. □

Folgerung 2.2 *Der Raum* $\left(\mathbf{L}^2,\|.\|\right)$ *mit*

$$\|\varphi\|:=\sqrt{\langle\varphi,\varphi\rangle}=\sqrt{\int|\varphi(x)|^2\,dx}$$

ist ein **normierter Raum**, *d.h., folgende Axiome sind erfüllt:*

(N1) $\|\varphi\|\geq 0\ \ \forall\,\varphi\in\mathbf{L}^2$ *und* $\|\varphi\|=0\iff\varphi=0$,

(N2) $\|\lambda\varphi\|=|\lambda|\,\|\varphi\|\ \ \forall\,\varphi\in\mathbf{L}^2,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}$,

(N3) $\|\varphi+\psi\|\leq\|\varphi\|+\|\psi\|\ \ \forall\,\varphi,\psi\in\mathbf{L}^2$ (*Dreiecksungleichung*).

Außerdem gilt die **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$|\langle\varphi,\psi\rangle|\leq\|\varphi\|\,\|\psi\|\quad\forall\,\varphi,\psi\in\mathbf{L}^2\,.\tag{2.6}$$

Beweis. (N1) und (N2) sind einfach. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $\varphi, \psi \in \mathbf{L}^2$ gilt

$$0 \leq \langle \varphi + \lambda\psi, \varphi + \lambda\psi \rangle = \|\varphi\|^2 + 2\lambda \langle \varphi, \psi \rangle + |\lambda|^2 \|\psi\|^2 .$$

Im Fall $\psi \neq 0$ und $\lambda = -\frac{\langle \varphi, \psi \rangle}{\|\psi\|^2}$ ergibt sich

$$0 \leq \|\varphi\|^2 - \frac{2|\langle \varphi, \psi \rangle|^2}{\|\psi\|^2} + \frac{|\langle \varphi, \psi \rangle|^2}{\|\psi\|^2} = \|\varphi\|^2 - \frac{|\langle \varphi, \psi \rangle|^2}{\|\psi\|^2} ,$$

und (2.6) ist bewiesen. Es folgt

$$\|\varphi + \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 + 2\langle \varphi, \psi \rangle + \|\psi\|^2 \leq \|\varphi\|^2 + 2\|\varphi\|\,\|\psi\| + \|\psi\|^2 = (\|\varphi\| + \|\psi\|)^2 ,$$

womit auch (N3) gezeigt ist. □

Bemerkung 2.3 *Die Räume* $\left(\mathbf{L}^p, \|.\|_p\right)$ *mit*

$$\|\varphi\|_p := \left(\int |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

sind für $1 \leq p < \infty$ *normierte Räume. Dabei gewinnt man die entsprechende Dreiecksungleichung* (N3) *aus der* **Hölder'schen Ungleichung**

$$\left| \int \varphi(x)\psi(x) \, dx \right| \leq \left(\int |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |\psi(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} , \tag{2.7}$$

die für alle $\varphi \in \mathbf{L}^p$ *und* $\psi \in \mathbf{L}^q$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt und die im Fall* $p = q = 2$ *die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung* (2.6) *liefert.*

2.2 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass durch (2.1) eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ definiert wird.

2. Zeigen Sie, dass die Definitionen (2.2), (2.3), (2.4) und (2.5) korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten aus den Äquivalenzklassen, sind.

3. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Es seien a_{kn} $(k, n \in \mathbb{N}_0)$ reelle Zahlen mit den Eigenschaften

   $$\sup \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |a_{kn}| : k \in \mathbb{N}_0 \right\} < \infty \quad \text{und} \quad a_{kn} \uparrow b_n \ (k \to \infty) \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0 .$$

   Dann gilt

   $$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n .$$

   (b) Es seien a_{kn} $(k, n \in \mathbb{N}_0)$ reelle Zahlen mit den Eigenschaften

   $$\lim_{k\to\infty} a_{kn} = b_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0 , \quad |a_{kn}| \leq c_n \ \forall\, k, n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty .$$

   Dann gilt

   $$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n .$$

4. Wir betrachten den Integrationsraum $(\mathbf{X},\mathcal{X},\mathcal{J})$ mit $\mathbf{X}=\mathbb{N}_0$,

$$\mathcal{X}=L\left(\mathcal{J}^{(2)}\right)=\left\{f:\mathbb{N}_0\longrightarrow\mathbb{R}:\sum_{n=0}^{\infty}|f(n)|<\infty\right\}\quad\text{und}\quad\mathcal{J}(f)=\mathcal{J}_L^{(2)}(f)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)$$

(vgl. Abschnitt 1.4). Beschreiben Sie die zugehörigen Räume $\mathbf{L}^p$, $1\le p<\infty$.

5. Es seien $1<p,q<\infty$ und $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

   (a) Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen $\alpha,\beta\in[0,\infty)$ die Ungleichung

   $$\alpha\beta\le\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}\,.$$

   gilt und leiten Sie daraus die Hölder'sche Ungleichung (2.7) ab.

   (b) Zeigen Sie, dass $\left(\mathbf{L}^p,\|.\|_p\right)$ ein normierter Raum ist (vgl. Bem. 2.3).

Kapitel 3

Das System der messbaren Mengen

3.1 Definitionen und Eigenschaften

Es sei $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum. Eine Menge $A \subset \mathbf{X}$ nennen wir **Integrationsbereich**, wenn aus $\varphi \in \mathcal{X}$ stets $\varphi\chi_A \in \mathcal{X}$ folgt. Die Menge aller Integrationsbereiche in $\mathbf{X}$ bezeichnen wir mit $\mathbf{I}(\mathcal{J})$. Wegen $\varphi\chi_A = \varphi^+\chi_A - \varphi^-\chi_A$ ist $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ offenbar äquivalent dazu, dass aus $\varphi \in \mathcal{X}$ und $\varphi \geq 0$ folgt $\varphi\chi_A \in \mathcal{X}$. Für $\varphi \in \mathcal{X}$ und $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ definieren wir

$$\int_A \varphi(x)\, dx := \mathcal{J}(\varphi\chi_A)\,.$$

Lemma 3.1 *Aus $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ und $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt $\varphi\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.*

Beweis. Aus $\mathcal{X} \ni \varphi_n \longrightarrow \varphi$ folgt $\mathcal{X} \ni \varphi_n\chi_A \longrightarrow \varphi\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ (vgl. $(\mathcal{M}4)$). □

Damit können wir für $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ das Integral

$$\int_A \varphi(x)\, dx := \int \varphi^+(x)\chi_A(x)\, dx - \int \varphi^-(x)\chi_A(x)\, dx$$

erklären, falls wenigstens eines der Integrale auf der echten Seite endlich ist.

Ein System $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ von Teilmengen der Menge $\mathbf{X}$ heißt **Ring**, wenn die Axiome

(R1) $\emptyset \in \mathcal{R}$,

(R2) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$

erfüllt sind. Der Ring $\mathcal{R}$ wird **Algebra** genannt, wenn zusätzlich $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$ gilt. Ein Ring (eine Algebra) $\mathcal{R}$ heißt **σ-Ring** (**σ-Algebra**), wenn

(R3) $A_n \in \mathcal{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$

zutrifft.

Satz 3.2 *Das System $\mathbf{I}(\mathcal{J})$ ist eine σ-Algebra.*

Beweis. Offenbar gilt $\emptyset, \mathcal{X} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$.

- $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J}), \varphi \in \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \varphi\chi_{\mathbf{X}\setminus A} = \varphi - \varphi\chi_A \in \mathcal{X} \;\Rightarrow\; \mathbf{X} \setminus A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$
- $A_n \in \mathbf{I}(\mathcal{J}), \varphi \in \mathcal{X}, A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \varphi_n := \varphi\chi_{A_1}\chi_{A_2}\ldots\chi_{A_n}$

  $\Rightarrow\; \varphi\chi_{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n} = \varphi_n \in \mathcal{X}, \varphi_n \longrightarrow \varphi\chi_A, |\varphi_n| \le |\varphi| \in \mathcal{X} \overset{\text{Satz 1.28}}{\Rightarrow} \varphi\chi_A \in \mathcal{X} \;\Rightarrow\; A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$
- $\Rightarrow\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{X} \setminus A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$
- $A, B \in \mathbf{I}(\mathcal{J}) \;\Rightarrow\; A \setminus B = A \cap (\mathbf{X} \setminus B) \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$

□

Im Weiteren schreiben wir z.B. für $\{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) > \psi(x)\}$ kurz $\{\varphi > \psi\}$.

Satz 3.3 *Aus $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt $\{\varphi > \psi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$.*

Beweis.

- Seien vorerst $\varphi \ge 0$ und $\psi \ge 0$ sowie $\varphi \in \mathcal{X}$. Dann ist $A := \{\varphi > \psi\} = \{\varphi - \psi > 0\} = \{(\varphi - \psi)^+ > 0\}$. Sei $\omega \in \mathcal{X}$ mit $\omega \ge 0$. Dann folgt $\varphi_n := \omega \cap (n(\varphi - \psi)^+) \in \mathcal{X}$ (da $(\varphi - \psi)^+ \le \varphi$ und somit $(\varphi - \psi)^+ \in \mathcal{X}$ nach Lemma 1.26) und $\varphi_n \uparrow \omega\chi_A \in \mathcal{X}$ (nach Satz 1.28, weil $|\varphi_n| \le |\omega|$, auch Satz 1.22 ist anwendbar).
- Sei jetzt auch $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. Dann existiert eine Folge $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$ mit $\varphi_n \ge 0$ und $\varphi_n \uparrow \varphi$. Es folgt $\{\varphi > \psi\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\varphi_n > \psi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$.
- Sind nun $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ beliebig, so ist auch $\{\varphi > \psi\} = \{\varphi^+ > \psi^+\} \cup \{\varphi^- < \psi^-\}$ ein Integrationsbereich.

Damit ist der Satz bewiesen. □

Folgerung 3.4 *Unter Verwendung der Sätze 3.2 und 3.3 folgt, dass auch die Mengen $\{\varphi \ge \psi\} = \mathbf{X} \setminus \{\psi > \varphi\}$, $\{\varphi \ne \psi\} = \{\varphi > \psi\} \cup \{\psi > \varphi\}$ und $\{\varphi = \psi\} = \mathbf{X} \setminus \{\varphi \ne \psi\})$ zu $\mathbf{I}(\mathcal{J})$ gehören, falls $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ vorausgesetzt wird.*

Beweis. Aus $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, Satz 3.2 und Satz 3.3 folgt $\{\varphi \ge \psi\} = \mathbf{X} \setminus \{\psi > \varphi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$, $\{\varphi \ne \psi\} = \{\varphi > \psi\} \cup \{\psi > \varphi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ und somit auch $\{\varphi = \psi\} = \mathbf{X} \setminus \{\varphi \ne \psi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$. □

Eine Menge $A \subset \mathbf{X}$ nennen wir Grenzwert der Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ (in Zeichen: $A = \lim A_n$), wenn

$$\liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A$$

gilt. Man beachte, dass aus $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{I}(\mathcal{J})$ und $A = \lim A_n$ folgt $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ (vgl. Satz 3.2). Der folgende Satz zeigt, dass das Integral stetig bezüglich des Integrationsbereiches ist.

Satz 3.5 *Aus $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{I}(\mathcal{J})$, $\lim A_n = A$ und $\varphi \in \mathcal{X}$ folgt*

$$\int_A \varphi(x)\, dx = \lim \int_{A_n} \varphi(x)\, dx \,.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\chi_{A_n} \longrightarrow \chi_A$ gilt:

$$x \in A \;\Rightarrow\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k \;\Rightarrow\; x \in A_k \;\forall\, k \geq n_0 \;\Rightarrow\; \chi_{A_k}(x) = 1 = \chi_A(x) \;\forall\, k \geq n_0$$

$$x \notin A \;\Rightarrow\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : x \notin \bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k \;\Rightarrow\; x \notin A_k \;\forall\, k \geq n_0 \;\Rightarrow\; \chi_{A_k}(x) = 0 = \chi_A(x) \;\forall\, k \geq n_0$$

Damit gilt $\varphi\chi_{A_n} \longrightarrow \varphi\chi_A$ und $|\varphi\chi_{A_n}| \leq |\varphi|$ für $\varphi \in \mathcal{X}$. Satz 1.28 liefert $\lim \mathcal{J}(\varphi\chi_{A_n}) = \mathcal{J}(\varphi\chi_A)$ und somit die Behauptung. □

Satz 3.6 (σ-Additivität des Integrals) *Es seien $A_n \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$, $A_n \cap A_k = \emptyset$ für $n \neq k$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ integrierbar. Dann gilt*

$$\int_A \varphi(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \varphi(x)\, dx\,.$$

Beweis. Sei vorerst $\varphi \geq 0$, d.h., $\varphi \in \mathcal{X}^\sigma$. Aus der Eigenschaft (V2) und der Stetigkeit von unten (Satz 1.12) des verallgemeinerten Integrals folgt

$$\int \varphi(x)\chi_A(x)\, dx = \lim \int \varphi(x) \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(x)\, dx = \lim \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \varphi(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} \varphi(x)\, dx\,.$$

Sei nun $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ integrierbar. Ist $\mathcal{J}(\varphi^\pm) < \infty$, so sind alle Integrale $\int_{A_n} \varphi^\pm(x)\, dx$ und auch $\int_A \varphi^\pm(x)\, dx$ endlich, und aus dem bereits Bewiesenen folgt, dass $\int_A \varphi(x)\, dx$ gleich

$$\int_A \varphi^+(x)\, dx - \int_A \varphi^-(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \varphi^+(x)\, dx - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \varphi^-(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \varphi(x)\, dx$$

ist. Ist eines der Integrale $\mathcal{J}(\varphi^\pm)$ unendlich, so kann man analog verfahren. □

Definition 3.7 *Eine Menge $A \subset \mathbf{X}$ heißt ($\mathcal{X}$-)***messbar***, wenn $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ gilt. Die Menge aller messbaren Mengen $A \subset \mathbf{X}$ bezeichnen wir mit $\mathbf{M}(\mathcal{J})$. Unter dem ($\mathcal{J}$-)***Maß** *einer Menge $A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ verstehen wir die Zahl*

$$\mu(A) := \int \chi_A(x)\, dx\,.$$

Die Eigenschaft (E) aus Abschnitt 1.5 besagt, dass $\mathcal{N}(\mathcal{J}) \subset \mathbf{M}(\mathcal{J})$ gilt.

Satz 3.8 $\mathbf{M}(\mathcal{J})$ *ist ein σ-Ring.*

Beweis. Aus $A, B \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ folgt $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cap B} = \chi_A - (\chi_A \cap \chi_B) \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. Ist $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit $A_n \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$, so folgt $\chi_A = \sup \chi_{A_n} \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. □

Lemma 3.9 *Es gilt* $\mathbf{M}(\mathcal{J}) \subset \mathbf{I}(\mathcal{J})$.

Beweis. Ist $A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$, d.h., $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, so folgt aus Satz 3.3 $A = \{\chi_A > 0\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$. □

Satz 3.10 (σ-Additivität des Maßes μ) *Sind* $A_n \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ *paarweise durchschnittsfremde Mengen, so gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

Beweis. Wegen $\mathbf{M}(\mathcal{J}) \subset \mathbf{I}(\mathcal{J})$ können wir Satz 3.6 anwenden,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{A_n}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \chi_A(x)\,dx \overset{Satz 3.6}{=} \int_A \chi_A(x)\,dx = \int \chi_A(x)\,dx = \mu(A)\,.$$

□

3.2 Konvergenz dem Maße nach

Satz 3.11 (Tschebyscheff'sche Ungleichung) *Es seien* $A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$, $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\varphi \geq 0$ *und* $\varepsilon > 0$. *Dann gilt*

$$\mu\left(\{\varphi \geq \varepsilon\} \cap A\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_A \varphi(x)\,dx\,.$$

Beweis. Nach Lemma 3.1 und Folgerung 3.4 ist

$$A_\varepsilon := \{\varphi \geq \varepsilon\} \cap A = \{\varphi\chi_A \geq \varepsilon\chi_A\} \cap A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$$

und somit

$$\mu(A_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int \varepsilon\chi_{\{\varphi \geq \varepsilon\}}(x)\chi_A(x)\,dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int \varphi(x)\chi_A(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_A \varphi(x)\,dx\,.$$

□

Bemerkungen

1. Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$, so folgt

$$\{\varphi \geq \psi\} \cap A\,,\ \{\varphi > \psi\} \cap A\,,\ \{\varphi \neq \psi\} \cap A\,,\ \{\varphi = \psi\} \cap A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})\,,$$

   denn nach Folgerung 3.4 gilt $\{\varphi \geq \psi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$, so dass nach Lemma 3.1 $\chi_{\{\varphi \geq \psi\} \cap A} = \chi_A \cdot \chi_{\{\varphi \geq \psi\}} \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt. Diese Überlegung wurde bereits im Beweis von Satz 3.11 verwendet und wird auch in den folgenden Betrachtungen genutzt.

2. Im Fall $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ ist die Bedingung (E) erfüllt, denn $\chi_A = \omega_A \cap \chi_{\mathbf{X}}$. Außerdem gilt $\mathbf{M}(\mathcal{J}) = \mathbf{I}(\mathcal{J})$, denn aus $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ folgt mit Lemma 3.1 $\chi_A = \chi_{\mathbf{X}} \cdot \chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. Man beachte zusätzlich Lemma 3.9.

3. Im Fall $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ ist also jede Menge $\{\varphi > a\}$ messbar, falls $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $a \in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt für eine Funktion $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ sogar Folgendes:

$$\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \iff \{\varphi > a\} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})\ \forall\, a \in \mathbb{R}$$

Beweis. Wir haben nur noch die Hinlänglichkeit der Bedingung zu zeigen. Seien also für eine Funktion $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ alle Mengen $\{\varphi > a\}$, $a \in \mathbb{R}$ messbar. Wir setzen vorerst voraus, dass $\varphi \geq 0$ gilt, und definieren die Funktionen

$$\varphi_m = m\,\chi_{A_m} + \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k-1}{2^m}\,\chi_{A_{km}}\,, \quad m \in \mathbb{N}\,,$$

wobei die Mengen

$$A_{km} := \left\{\frac{k-1}{2^m} < \varphi \leq \frac{k}{2^m}\right\} = \left\{\varphi > \frac{k-1}{2^m}\right\} \setminus \left\{\varphi > \frac{k}{2^m}\right\}, \quad k = 1\ldots, m2^m\,,$$

und

$$A_m := \{\varphi > m\}$$

für festes $m \in \mathbb{N}_0$ paarweise disjunkt und nach Voraussetzung messbar sind. Damit gilt $\varphi_m \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. Wir zeigen $\varphi_m \longrightarrow \varphi$ $(m \longrightarrow \infty)$, so dass wegen $(\mathcal{M}3)$ auch $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ gilt.

Ist $\varphi(x) = 0$ oder $\varphi(x) = \infty$, so gilt $\varphi_m(x) = 0$ bzw. $\varphi_m(x) = m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, also $\varphi_m(x) \longrightarrow \varphi(x)$ in beiden Fällen.

Sei nun $x \in \{0 < \varphi \leq m\}$ für $m \geq m_0$, also $x \in A_{km}$ für ein $k \in \{1, \ldots, m2^m\}$. Es folgt

$$\varphi_m(x) = \frac{k-1}{2^m} < \varphi(x) \leq \frac{k}{2^m} = \varphi_m(x) + \frac{1}{2^m} < \varphi(x) + \frac{1}{2^m}\,,$$

was $\varphi_m(x) \longrightarrow \varphi(x)$ impliziert.

Verzichten wir jetzt auf die Voraussetzung $\varphi \geq 0$, so können wir aus der Voraussetzung $\{\varphi > a\} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ schließen, dass

$$\{\varphi^+ > a\} = \left\{\begin{array}{ccc} \{\varphi > a\} & : & a \geq 0 \\ \mathbf{X} & : & a < 0 \end{array}\right\} \in \mathbf{M}(\mathcal{J}) \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

und

$$\{\varphi^- > a\} = \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{X} \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left\{\varphi > -a - \dfrac{1}{n}\right\} & : & a \geq 0 \\ \mathbf{X} & : & a < 0 \end{array}\right\} \in \mathbf{M}(\mathcal{J}) \quad \forall\, a \in \mathbb{R}\,.$$

Nach den vorhergehenden Überlegungen gilt $\varphi^{\pm} \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und damit $\varphi = \varphi^+ - \varphi^- \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. □

Definition 3.12 *Es sei* $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ *. Eine Folge* $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *nennen wir* **konvergent dem Maße nach** *gegen* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *, wenn* $\varphi_n - \varphi$ *für alle hinreichend großen* n *erklärt ist und*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{|\varphi_n - \varphi| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

gilt.

Folgerung 3.13 *Es gelte* $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ *. Aus* $\varphi_n \in \mathbf{L}^1$ *und* $\|\varphi_n\|_1 \longrightarrow 0$ *folgt dann unter Verwendung der Tschebyscheff'schen Ungleichung die Konvergenz von* φ_n *gegen Null dem Maße nach.*

Beweis. Es ist $\mu(\{|\varphi_n| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int |\varphi_n(x)|\,dx = \frac{1}{\varepsilon}\,\|\varphi_n\|_1 \longrightarrow 0$. □

Satz 3.14 (Egorov) *Es seien* $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$, $\mu(\mathbf{X}) < \infty$, $\varphi_n \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $|\varphi_n| < \infty$ *f.ü. und* $\varphi_n \longrightarrow 0$ *f.ü. Dann existiert für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ *mit*

$$\mu(\mathbf{X}_0) \le \varepsilon \quad \textit{und} \quad \sup_{x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{X}_0} |\varphi_n(x)| \longrightarrow 0 .$$

Beweis. Es sei $\{\varphi_n \not\longrightarrow 0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|\varphi_n| = \infty\} \subset A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$. Wir definieren

$$A_{kn} := \bigcup_{\ell=n}^{\infty} \left\{ x \in \mathbf{X} \setminus A : |\varphi_\ell(x)| \ge \frac{1}{k} \right\} = (\mathbf{X} \setminus A) \cap \bigcup_{\ell=n}^{\infty} \left\{ |\varphi_\ell| \ge \frac{1}{k} \right\} , \quad k, n \in \mathbb{N} .$$

Es folgt $A_{kn} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn} = \emptyset \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $A_{k,n+1} \subset A_{kn}$, woraus $\chi_{A_{kn}} \downarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty) \ \forall\, k \in \mathbb{N}$ folgt. Da $\int \chi_{A_{kn}}(x)\, dx = \mu(A_{kn}) \le \mu(\mathbf{X}) < \infty$ gilt, folgt aus Satz 1.22 $\mu(A_{kn}) \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty) \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Somit gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{k,n_k}) \le \frac{\varepsilon}{2^k}$. Wir setzen $\mathbf{X}_0 := A \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,n_k}$ und erhalten $\mu(\mathbf{X}_0) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Seien nun $\delta > 0$ beliebig und $\frac{1}{k} < \delta$. Dann folgt $|\varphi_\ell(x)| < \frac{1}{k} < \delta \ \forall\, \ell \ge n_k$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{X}_0$. □

3.3 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass ein Ring bezüglich des Durchschnitts endlich vieler Mengen und ein σ-Ring bezüglich des Durchschnitts abzählbar vieler Mengen abgeschlossen sind.

2. Es seien $\mathbf{X}$ eine unendliche Menge und $\mathcal{R}_0$ die Familie aller endlichen Teilmengen von $\mathbf{X}$. Man beschreibe den kleinsten σ-Ring $\mathcal{R}$, der $\mathcal{R}_0$ umfasst.

3. Es sei $\{\mathcal{R}_k : k \in \mathbb{I}\}$ eine Familie von σ-Ringen $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$. Man zeige:

   (a) $\bigcap_{k \in \mathbb{I}} \mathcal{R}_k$ ist ein σ-Ring.

   (b) $\mathcal{R}_{k_1} \cup \mathcal{R}_{k_2}$ ist i.Allg. kein Ring.

   (c) Sind $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ und $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}_k$ ein Ring, aber i.Allg. kein σ-Ring.

4. Es seien A_n, B_n, Teilmengen einer Menge $\mathbf{X}$. Man beweise:

   (a) Es gilt $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

   (b) Gilt $A_n \subset A_{n+1}$, $B_{n+1} \subset B_n$, $n \in \mathbb{N}$, so existieren $A = \lim A_n$ bzw. $B = \lim B_n$ und sind gleich $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bzw. $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

   (Z) Unter den Voraussetzungen von (b) seien $C_{2n-1} := A_n$ und $C_{2n} := B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass dann $\liminf C_n = A \cap B$ gilt und dass der Grenzwert $\lim C_n$ genau dann existiert, wenn $A = B$ ist.

5. Wir gehen von den Beispielen 1.4 und 1.7 mit dem Vektorverband $\mathcal{X}^{(1)} = \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ und dem Riemann-Integral $\mathcal{J}^{(1)} : \mathcal{X}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ aus und erweitern dieses Integral zu dem vollständigen Lebesgue-Integral $\mathcal{J}_L^{(1)} : L(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $L(\mathbb{R}) := L\left(\mathcal{J}^{(1)}\right)$ (vgl. Abschnitt 1.4). Für $\varphi \in L(\mathbb{R})$ schreiben wir

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx \quad \text{statt} \quad \mathcal{J}_L^{(1)}(\varphi)\,.$$

Diese Schreibweise verwenden wir auch für integrierbare Funktionen $\varphi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}))$. Im Weiteren betrachten wir also den Integrationsraum $\left(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}}\right)$. Beweisen Sie:

   (a) Jedes Intervall der reellen Achse ist messbar, und das Maß eines Intervalls ist gleich dessen Länge, z.B. $\mu([a,b)) = b - a$, $-\infty < a < b \le \infty$.

   (b) Für $-\infty < a < b < \infty$ und jede stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$(R) \int_a^b f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[a,b]}(x)\, dx\,,$$

   wobei $(R)\int_a^b$ das Riemann-Integral bezeichnet.

   (c) Wir betrachten den Integrationsraum $\left([0,1], L([0,1]), \int_0^1\right)$ als Einschränkung des Integrationsraumes $\left(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}}\right)$ auf das Intervall $[0,1]$. Man zeige, dass die Funktionen $f_n \in L([0,1])$ genau dann dem Maße nach gegen $g \in L([0,1])$ konvergieren, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{|f_n(x) - g(x)|}{1 + |f_n(x) - g(x)|}\, dx = 0$$

   gilt.

Kapitel 4

Das Lebesgue-Integral im $\mathbb{R}^n$

4.1 Erster Zugang

Wie in Übungsaufgabe 5, Abschnitt 3.3 gehen wir auch hier von den Beispielen 1.4 und 1.7 mit dem Vektorverband $\mathcal{X}^{(1)} = \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ und dem Riemann-Integral $\mathcal{J}^{(1)} : \mathcal{X}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ aus und erweitern dieses Integral zu dem vollständigen Lebesgue-Integral $\mathcal{J}_L^{(1)} : L(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $L(\mathbb{R}) := L\left(\mathcal{J}^{(1)}\right)$ (vgl. Abschnitt 1.4). Für $\varphi \in L(\mathbb{R})$ schreiben wir

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx \quad \text{statt} \quad \mathcal{J}_L^{(1)}(\varphi)\,.$$

Diese Schreibweise verwenden wir auch für integrierbare Funktionen $\varphi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}))$. Damit ist uns der Integrationsraum $\left(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}}\right)$ gegeben.

Mit $\mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir die Menge der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Für einen Vektor $x = \left[\ \xi_k\ \right]_{k=1}^n$ sei mit $|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2}$ seine Euklidische Norm bezeichnet.

Satz 4.1 *Sind $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})$ und*

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\, dt\,,$$

so folgt $g \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Es existieren reelle Zahlen $K > 0$ und $R > 0$, so dass $|f(y)| \le K\ \forall\, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $f(y) = 0\ \forall\, y \in \mathbb{R}^{n+1} : |y| > R$. Es folgt $f_x(t) := f(t,x) = 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} : |t| > R$ und $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Damit ist $\int_{\mathbb{R}} f(t,x)\, dt = (R)\int_{-R}^{R} f_x(t)\, dt$ wohldefiniert für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Seien nun $x_k \in \mathbb{R}^n$ und $|x_k - x| \longrightarrow 0\ (k \longrightarrow \infty)$ sowie $\varphi_k(t) := f(t, x_k)$. Dann gilt $\varphi_k \longrightarrow f_x$ und $|\varphi_k| \le K\chi_{[-R,R]} \in L(\mathbb{R})$. Satz 1.28 liefert

$$g(x_k) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(t)\, dt \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f_x(t)\, dt = g(x)\,.$$

Also ist g stetig mit kompaktem Träger. $\square$

Die Aussage des Satzes 4.1 können wir iterieren und erhalten, dass für $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$ das Funktional

$$\mathcal{J}^{(n)}(f) := \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(\xi_1, \dots, \xi_n)\, d\xi_1 \dots d\xi_n \tag{4.1}$$

wohldefiniert ist. Das Funktional $\mathcal{J}^{(n)} : \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ erweist sich als Integral.

Definition 4.2 *Das von $\mathcal{J}^{(n)} : \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ erzeugte vollständige L-Integral nennen wir* **Lebesgue'sches Integral** *über $\mathbb{R}^n$ (vgl. Abschnitt 1.4). Den zugehörigen Vektorverband bezeichnen wir mit $L(\mathbb{R}^n)$ und das Integral mit $\int_{\mathbb{R}^n}$. Für $\varphi \in L(\mathbb{R}^n)$ schreiben wir*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)\, d(\xi_1, \dots, \xi_n)\,.$$

Diese Schreibweise verwenden wir auch für integrierbare Funktionen $\varphi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$.

Damit ist uns also der Integrationsraum $\left(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n}\right)$ gegeben.

Satz 4.3 *Seien $\varphi \in L(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in L(\mathbb{R}^m)$ und $\rho(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$. Dann gilt $\rho \in L(\mathbb{R}^{n+m})$ und*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \rho(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^m} \psi(y)\, dy\,.$$

Beweis. O. E. d. A. können wir annehmen, dass $\varphi \geq 0$ und $\psi \geq 0$ gilt. Nach Lemma 1.20 existieren $\Phi, F \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)_0^\sigma$ und $\Psi, G \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^m)_0^\sigma$ mit $\Phi, F, \Psi, G \geq 0$ und $\varphi + \Phi = F$, $\psi + \Psi = G$. Dann existieren $\varphi_k, f_k \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$ und $\psi_k, g_k \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^m)$, so dass $\varphi_k, g_k, \psi_k, f_k \geq 0$ und $\varphi_k \uparrow \Phi$, $f_k \uparrow F$, $\psi_k \uparrow \Psi$, $g_k \uparrow G$ (vgl. Aufgabe 4,(b), Abschnitt 1.6). Nun ist

$$\varphi\psi + \Phi G + \Psi F = \varphi\psi + \Phi(\psi + \Psi) + \Psi(\varphi + \Phi) = (\varphi + \Phi)(\psi + \Psi) + \Phi\Psi = FG + \Phi\Psi\,.$$

Da z.B. $\varphi_k\psi_k \uparrow \Phi\Psi$ und nach Definition 4.2

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi_k(x)\psi_k(y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^m} \psi_k(y)\, dy \overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \mathcal{J}^{(n)*}(\Phi)\mathcal{J}^{(m)*}(\Psi) < \infty$$

gilt, folgt $FG + \Phi\Psi, \Phi G + \Psi F \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^{n+m})_0^\sigma$ und z.B.

$$\mathcal{J}^{(n+m)*}(FG + \Phi\Psi) = \mathcal{J}^{(n)*}(F)\mathcal{J}^{(m)*}(G) + \mathcal{J}^{(n)*}(\Phi)\mathcal{J}^{(m)*}(\Psi)\,.$$

Somit ist $\phi\psi \in L(\mathbb{R}^{n+m})$ und

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi(x)\psi(y)\, d(x,y) &= \mathcal{J}^{(n+m)*}(FG + \Phi\Psi) - \mathcal{J}^{(n+m)*}(\Phi G + \Psi F) \\
&= \left[\mathcal{J}^{(n)*}(F) - \mathcal{J}^{(n)*}(\Phi)\right]\left[\mathcal{J}^{(m)*}(G) - \mathcal{J}^{(m)*}(\Psi)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^m} \psi(y)\, dy\,.
\end{aligned}$$

□

Für die bzgl. $\int_{\mathbb{R}^n}$ messbaren Mengen verwenden wir statt $\mathbf{M}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\right)$ die Bezeichnung $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$.

Folgerung 4.4 *Mit $A \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ und $B \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^m)$ folgt $A \times B \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^{n+m})$.*

Beweis. Es existieren $\varphi_k \in L(\mathbb{R}^n)$ und $\psi_k \in L(\mathbb{R}^m)$ mit $\varphi_k \longrightarrow \chi_A$ und $\psi_k \longrightarrow \chi_B$. Aus Satz 4.3 folgt mit $\rho_k(x,y) = \varphi_k(x)\psi_k(y)$, dass $\rho_k \in L(\mathbb{R}^{n+m})$ und $\rho_k \longrightarrow \chi_{A\times B} \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^{n+m})$ wegen $\chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A\times B}(x,y)$. □

Diese Folgerung zeigt zusammen mit Übungsaufgabe 5, Abschnitt 3.3, dass z.B. jedes Parallelepiped $[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ wie auch $(a_1,b_1)\times\ldots\times(a_n,b_n)$ messbar und sein Maß gleich $(b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)$ ist.

Folgerung 4.5 *Es gilt* $\mathbb{R}^n \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$, *so dass nach den Bemerkungen im Abschnitt 3.2 der Integrationsraum* $\left(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n}\right)$ *die Eigenschaft* (E) *besitzt. Außerdem ist* $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n) = \mathbf{I}(\mathbb{R}^n) := \mathbf{I}(\int_{\mathbb{R}^n})$, *und eine Funktion* $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^e$ *ist genau dann messbar, wenn jede Menge* $\{\varphi > a\}$, $a \in \mathbb{R}$ *messbar ist.*

Da jede offene Menge als Vereinigung höchstens abzählbar vieler Würfel darstellbar ist, folgt aus Satz 3.2 die Messbarkeit jeder offenen und auch jeder abgeschlossenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Der folgende Satz 4.8 charakterisiert die Messbarkeit einer Menge mittels offener und abgeschlossener Mengen. Zur Vorbereitung seines Beweises dienen das folgende Lemma und seine Folgerung.

Lemma 4.6 *Es sei* $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ *ein Integrationsraum. Das Integral* $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist genau dann vollständig, wenn aus* $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $|\varphi| \le \psi$ *und* $\int \psi(x)\,dx = 0$ *folgt* $\varphi \in \mathcal{X}$.

Beweis. ($\Rightarrow$): Wir haben $n\psi \uparrow \Psi \in \mathcal{X}_0^\sigma$, da $\mathcal{J}^*(n\psi) = n\mathcal{J}^*(\psi) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt

$$\Psi(x) = \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \Longleftrightarrow & \psi(x) = 0 & \Rightarrow & \varphi(x) = 0 = \Psi(x)\,, \\ \infty & \Longleftrightarrow & \psi(x) > 0 & \Rightarrow & \varphi(x) \ne \Psi(x)\,, \end{array} \right\}$$

woraus $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ und somit, wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{J}$, auch $\varphi \in \mathcal{X}$ folgt.

($\Leftarrow$): Es seien $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $F \in \mathcal{X}_0^\sigma$ mit $\{f \ne F\} = \{F = \infty\} =: A$. Wir haben zu zeigen, dass $f \in \mathcal{X}$ gilt. Dazu setzen wir $G := \lim \frac{1}{n} F$, so dass $A = \{G \ne 0\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ folgt (Folgerung 3.4). Somit ist

$$-\infty < \int F(x)\,dx = \int_{\mathbf{X}\setminus A} F(x)\,dx + \int_A F(x)\,dx = \int_{\mathbf{X}\setminus A} f(x)\,dx + \int_A G(x)\,dx < \infty\,.$$

Also sind die Integrale $\displaystyle\int_{\mathbf{x}\setminus A} f(x)\,dx = \int f(x)\chi_{\mathbf{X}\setminus A}(x)\,dx$ und $\displaystyle\int_A G(x)\,dx = \int G(x)\,dx$ endlich. Aus Lemma 1.26 folgt $f\chi_{\mathbf{X}\setminus A} \in \mathcal{X}$. Wir zeigen noch, dass auch $f\chi_A \in \mathcal{X}$ gilt. Es existieren $g_n \in \mathcal{X}$ mit $g_n \ge 0$ und $g_n \uparrow G$. Aus $G(x) = 2G(x)$ und der Endlichkeit von $\displaystyle\int G(x)\,dx$ folgt $\int G(x)\,dx = 0$ und somit auch $\int g_n(x)\,dx = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung haben wir somit $f^\pm\chi_A \cap g_n \in \mathcal{X}$. Wegen $0 \le f^\pm\chi_A \le G$ gilt $f^\pm\chi_A \cap G_n \uparrow f^\pm\chi_A$ und somit $\displaystyle\int f^\pm(x)\chi_A(x)\,dx = 0$, woraus wieder mit Lemma 1.26 $f^\pm\chi_A \in \mathcal{X}$ folgt. □

Folgerung 4.7 *Ist* $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ *ein Integrationsraum mit vollständigem Integral, so folgt aus* $B \subset A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ *stets* $B \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$.

Beweis. Aus $\chi_B \le \omega_A$ und $\displaystyle\int \omega_A(x)\,dx = 0$ folgt mit Lemma 4.6 $\chi_B \in \mathcal{X}$ und $\displaystyle\int \chi_B(x)\,dx = 0$. Das liefert schließlich $\omega_B = \lim n\chi_B \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $\displaystyle\int \omega_B(x)\,dx = 0$. □

Satz 4.8 *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gehört genau dann zu $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $A_o \subset \mathbb{R}^n$ und eine abgeschlossene Menge $A_c \subset \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $A_c \subset A \subset A_o$ und $\mu(A_o \setminus A_c) < \varepsilon$ gilt.*

Beweis. ($\Rightarrow$): Sei $A \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\chi_A \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$. Damit existieren $\varphi_k \in L(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \geq 0$ und $\varphi_k \uparrow \chi_A$. Nach Lemma 1.21 existieren $F, G \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)^\sigma$ mit

$$G \geq 0\,, \quad \int_{\mathbb{R}^n} G(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{4}\,, \quad \chi_A + G = F\,.$$

Ferner gibt es $f_k \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$, so dass $f_k \uparrow F$. Die Menge $A_o := \left\{F > \frac{1}{2}\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{f_k > \frac{1}{2}\right\}$ ist wegen der Stetigkeit der f_k offen. Aus $x \in A_o \setminus A$ folgt $F(x) > \frac{1}{2}$ und $\chi_A(x) = 0$, also $G(x) = F(x) > \frac{1}{2}$ und somit $\chi_{A_o \setminus A} \leq 2G$. Es folgt

$$\mu(A_o \setminus A) \leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} G(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Analog ergibt sich für die Menge $B := \mathbb{R}^n \setminus A$ die Existenz einer offenen Menge $B_o \supset B$ mit $\mu(B_o \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir setzen $A_c := \mathbb{R}^n \setminus B_o$. Damit sind

$$A_c \subset \mathbb{R}^n \setminus B = A \quad \text{und} \quad A_c \setminus A = A \setminus (\mathbb{R}^n \setminus B_o) = A \cap B_o = B_o \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A) = B_o \setminus B\,,$$

also $\mu(A_o \setminus A_c) = \mu(A_o \setminus A) + \mu(A \setminus A_c) < \varepsilon$.

($\Leftarrow$): Nach Voraussetzung existieren für jedes $k \in \mathbb{N}$ abgeschlossene Mengen $A_{c,k}$ und offene Mengen $A_{o,k}$ mit $A_{c,k} \subset A \subset A_{o,k}$ und $\mu(A_{o,k} \setminus A_{c,k}) < \frac{1}{k}$. Wir setzen $A_c := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{c,k}$ und $A_o := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{o,k}$. Es folgt $A_c \subset A \subset A_o$ mit $A_c, A_o \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ und wegen $A_{o,k} \setminus A_{c,k} \supset A_o \setminus A_c$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ auch $\mu(A_o \setminus A_c) = 0$. Damit gilt $A = A_c \cup B$ mit $B = A \setminus A_c \subset A_o \setminus A_c$ und $\mu(A_o \setminus A_c) = 0$. Nach Folgerung 4.7 ist $B \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ und somit $A = A_c \cup B \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$. □

Der folgende Satz zeigt, dass in der vorliegenden Situation die Voraussetzung (p) aus Kapitel 2 erfüllt ist.

Satz 4.9 *Aus $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$ und $1 \leq p < \infty$ folgt $\varphi\psi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$ und $|\varphi|^p \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$.*

Beweis. Sei $a \geq 0$. Es folgt $\{|\varphi|^p > a\} = \left\{|\varphi| > a^{\frac{1}{p}}\right\} \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$. Im Fall $a < 0$ ist $\{|\varphi|^p > a\} = \mathbb{R}^n \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$. Sind nun $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$, so existieren $\varphi_k, \psi_k \in L(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ und $\psi_k \longrightarrow \psi$. Es folgt (nach dem bereits Bewiesenen für $p = 2$)

$$\varphi_k \psi_k = \frac{1}{2}\left[(\varphi_k + \psi_k)^2 - \varphi_k^2 - \psi_k^2\right] \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))\,.$$

Für $A := \{\varphi_k = 0\} \cup \{\psi_k = 0\}$ erhalten wir $\varphi_k \psi_k \chi_{\mathbf{X} \setminus A} \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$ und $\varphi_k \psi_k \chi_{\mathbf{X} \setminus A} \longrightarrow \varphi\psi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$. □

4.2 Zweiter Zugang

Ausgehend von den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnittes beschreiben wir hier einen anderen Zugang zur Maß- und Integrationstheorie über dem $\mathbb{R}^n$ im Lebesgue'schen Sinne:

(a) Für ein n-dimensionales "Intervall" $I = I^1 \times \ldots \times I^n$, wobei I^j ein beliebiges Intervall (offen, abgeschlossen oder halboffen) der reellen Achse $\mathbb{R}$ ist, setzen wir

$$\mu(I) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) .$$

(b) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, so lässt sich diese als Vereinigung höchstens abzählbar vieler paarweise disjunkter Intervalle $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ darstellen. Wir definieren $\mu(A) := \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k)$. Dabei ist $\mu(A)$ unabhängig von der gewählten Darstellung.

(c) Wir nennen eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $A_0 \subset \mathbb{R}^n$ und eine abgeschlossene Menge $A_c \subset \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $A_c \subset A \subset A_o$ und $\mu(A_o \setminus A_c) < \varepsilon$ gilt, und setzen $\mu(A) := \inf \{\mu(A_o) : A \subset A_o \subset \mathbb{R}^n,\ A_o\text{ - offen}\}$.

(d) Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^e$ nennen wir messbar, wenn die Menge $\{\varphi > a\}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ messbar ist.

(e) Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem Beweis der letzten Bemerkung im Abschnitt 3.2:

$$m \in \mathbb{N}, \quad A_{km} = \left\{ \frac{k-1}{2^m} < \varphi \le \frac{k}{2^m} \right\}, \ k = 1, \ldots, m2^m, \quad A_m = \{\varphi > m\} .$$

Ist $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^e$ messbar, wobei $\varphi \ge 0$, so definieren wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx := \lim_{m \to \infty} \left[m \cdot \mu(A_m) + \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k-1}{2^m}\, \mu(A_{km}) \right] .$$

(f) Sind $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^e$ messbar und eines der Integrale $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^+(x)\, dx$ oder $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^-(x)\, dx$ endlich, so setzen wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^+(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^-(x)\, dx .$$

4.3 Iterierte Integrale

Ist $A \subset \mathbb{R}$ eine nicht Lebesgue-messbare Menge, so ist nach Folgerung 4.7 $B = A \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge vom ($\mathbb{R}^2$)-Lebesgue-Maß Null. Man kann aber nicht einfach

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_B(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A(x)\chi_{\{0\}}(y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{0\}}(y) \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x)\, dx\, dy$$

schreiben, weil das Integral $\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x)\, dx$ nicht erklärt ist. Wir formulieren dazu den Satz 4.10 und machen folgende Annahmen:

1. Es seien $(\mathbf{X}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{J}_1)$ und $(\mathbf{X}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{J}_2)$ zwei Integrationsräume mit vollständigem Integral.

2. Es existiere ein Vektorverband $\mathcal{X}$ von Funktionen $\varphi : \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, für die

$$\mathcal{J}(\varphi) := \int_{\mathbf{X}_2} \left(\int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2 \in \mathbb{R}$$

existiert, wobei $\int_{\mathbf{X}_k} \psi(x_k)\,dx_k := \mathcal{J}_k(\psi)$, d.h. insbesondere, dass $\int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1,.)\,dx_1 \in \mathcal{X}_2$ $\forall\,\varphi \in \mathcal{X}$ gilt. Dann ist $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Integral, welches zu einem vollständigen L-Integral $\mathcal{J}_L$ auf dem Vektorverband $L(\mathcal{J})$ fortgesetzt werden kann. Also ist $(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2, L(\mathcal{J}), \mathcal{J}_L)$ ein Integrationsraum mit vollständigem Integral, welches wir auch in der Form

$$\int \varphi(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2)$$

schreiben.

Satz 4.10 *Sei $\varphi \in \mathcal{M}(L(\mathcal{J}))$, und es existiere $\int \varphi(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2)$. Dann gilt:*

(a) *Für $\mathcal{J}_2$-fast alle $x_2 \in \mathbf{X}_2$ existiert $\varphi^*(x_2) := \int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1,x_2)\,dx_1$.*

(b) *Man kann φ^* zu einer $\mathcal{J}_2$-messbaren Funktion $\varphi^* : \mathbf{X}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^e$ fortsetzen. Wir haben also $\varphi^* \in \mathcal{M}(\mathcal{X}_2)$.*

(c) *Es ist*

$$\int \varphi(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2) = \int_{\mathbf{X}_2} \int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 := \int_{\mathbf{X}_2} \varphi^*(x_2)\,dx_2$$

unabhängig von der in (b) *gewählten Fortsetzung.*

Beweis. Es sei vorerst $\varphi \in L(\mathcal{J})$. Dann existieren $g_n, f_n \in \mathcal{X}$, so dass $f_n \uparrow F \in \mathcal{X}_0^\sigma$ und $g_n \uparrow G \in \mathcal{X}_0^\sigma$ sowie $\varphi + G = F$. Es folgt

$$\mathcal{J}_L(\varphi) = \int \varphi(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2) = \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G) = \lim \int_{\mathbf{X}_2} \int_{\mathbf{X}_1} [f_n(x_1,x_2) - g_n(x_1,x_2)]\,dx_1\,dx_2\,.$$

Wir setzen

$$f_n^*(x_2) := \int_{\mathbf{X}_1} f_n(x_1,x_2)\,dx_1 \quad \text{und} \quad g_n^*(x_2) := \int_{\mathbf{X}_1} f_n(x_1,x_2)\,dx_1\,.$$

Dann sind (f_n^*) und (g_n^*) isotone Folgen aus $\mathcal{X}_2$, und es gilt

$$\lim \int_{\mathbf{X}_2} f_n^*(x_2)\,dx_2 = \mathcal{J}^*(F) \quad \text{und} \quad \lim \int_{\mathbf{X}_2} g_n^*(x_2)\,dx_2 = \mathcal{J}^*(G)\,,$$

also $f_n^* \uparrow F^* \in (\mathcal{X}_2)_0^\sigma$ und $g_n^* \uparrow G^* \in (\mathcal{X}_2)_0^\sigma$. Aus Lemma 1.31 und Folgerung 4.7 ergibt sich $A := \{F^* = \infty\} \cup \{G^* = \infty\} \in \mathcal{N}(\mathcal{J}_2)$. Wir verwenden die Bezeichnungen $\varphi^{x_2}(x_1) = \varphi(x_1,x_2)$, $f_n^{x_2}(x_1) = f_n(x_1,x_2)$, usw. Für $x_2 \in \mathbf{X}_2 \setminus A$ gilt

$$\mathcal{J}_1^*(F^{x_2}) = \lim \int_{\mathbf{X}_1} f_n^{x_2}(x_1)\,dx_1 = \lim \int_{\mathbf{X}_1} f_n(x_1,x_2)\,dx_1 = \lim f_n^*(x_2) = F^*(x_2)$$

und analog $\mathcal{J}_1^*(G^{x_2}) = G^*(x_2)$. Das bedeutet $F^{x_2}, G^{x_2} \in (\mathcal{X}_1)_0^\sigma$ und $\varphi^{x_2} + G^{x_2} = F^{x_2}$, also $\varphi^{x_2} \in \mathcal{X}_1$ für alle $x_2 \in \mathbf{X}_2 \setminus A$, weil ja nach Voraussetzung $(\mathbf{X}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{J}_1)$ bereits ein Integrationsraum mit vollständigem Integral ist. Ferner ist

$$\varphi^*(x_2) := \int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1,x_2)\,dx_1 = \int_{\mathbf{X}_1} \varphi^{x_2}(x_1)\,dx_1 = \mathcal{J}_1^*(F^{x_2}) - \mathcal{J}_1^*(G^{x_2}) = F^*(x_2) - G^*(x_2)\,,$$

d.h., $\varphi^*(x_2) + G^*(x_2) = F^*(x_2)\ \forall\, x_2 \in \mathbf{X}_2 \setminus A$. Wir definieren $\varphi^* : \mathbf{X}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, indem wir $\varphi^*(x_2) \in \mathbb{R}$ für $x \in A$ beliebig wählen, und setzen $G_1^* = G^* + \omega_A$, $F_1^* = F^* + \omega_A$. Es folgt $\varphi^* + G_1^* = F_1^*$, also $\varphi^* \in \mathcal{X}_2$, weil nach Voraussetzung auch $\mathcal{J}_2$ ein vollständiges Integral ist. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{X}_2}\int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 &= \int_{\mathbf{X}_2} \varphi^*(x_2)\,dx_2 = \mathcal{J}_2^*(F^*) - \mathcal{J}_2^*(G^*) = \lim[\mathcal{J}_2(f_n^*) - \mathcal{J}_2(g_n^*)] \\ &= \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G) = \int \varphi(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2)\,.\end{aligned}$$

Es sei nun $\varphi \in \mathcal{M}(L(\mathcal{J}))$, $\varphi \geq 0$. Dann existieren $\varphi_n \in L(\mathcal{J})$ mit $\varphi_n \geq 0$ und $\varphi_n \uparrow \varphi$. Nach dem bereits Bewiesenen existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $A_n \in \mathcal{N}(\mathcal{J}_2)$, so dass

$$\int_{\mathbf{X}_1} \varphi_n(x_1,x_2)\,dx_1 = F_n^*(x_2) - G_n^*(x_2) \quad \forall\, x_2 \in A_n$$

gilt, wobei $F_n^*, G_n^* \in (\mathcal{X}_2)_0^\sigma$. Wir setzen $A := \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{N}(\mathcal{J}_2)$ und definieren $F_n = F_n^* + \omega_A$ und $G_n = G_n^* + \omega_A$ sowie

$$\varphi_n^*(x_2) = \left\{ \begin{array}{ccc} \int \varphi_n(x_1,x_2)\,dx_1 & : & x_2 \in \mathbf{X}_2 \setminus A\,, \\ \alpha \in \mathbb{R} & : & x_2 \in A\,. \end{array} \right\}$$

Es folgt $\varphi_n^* + G_n = F_n$, also $\varphi_n^* \in \mathcal{X}_2$, sowie $\varphi_n^* \uparrow \varphi^* \in \mathcal{M}(\mathcal{X}_2)$. Damit ist

$$\begin{aligned}\int \varphi(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2) &= \lim \int \varphi_n(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2) = \lim \int_{\mathbf{X}_2} \varphi_n^*(x_2)\,dx_2 \\ &= \int_{\mathbf{X}_2} \varphi^*(x_2)\,dx_2 = \int_{\mathbf{X}_2}\int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2\,.\end{aligned}$$

Im Fall $\varphi = \varphi^+ - \varphi^- \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ wenden wir das Bewiesene auf φ^+ und φ^- an. Wir haben also

$$\int \varphi^\pm(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2) = \int_{\mathbf{X}_2}\int_{\mathbf{X}_1} \varphi^\pm(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = \int_{\mathbf{X}_2} \varphi_*^\pm(x_2)\,dx_2$$

und müssen beachten, dass z.B. aus der Endlichkeit von $\int \varphi^+(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2)$ folgt, dass φ_*^+ $\mathcal{J}_2$-f.ü. endlich ist. □

4.4 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass das in Abschnitt 4.3, Punkt 2 mit $\mathcal{J}$ bezeichnete Funktional ein Integral auf $\mathcal{X}$ ist.

2. Zeigen Sie, dass $\mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorverband ist und durch (4.1) ein Integral definiert wird.

3. Zeigen Sie, dass jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ als Vereinigung höchstens abzählbar vieler abgeschlossener Quadrate darstellbar ist.

Kapitel 5

Maßräume

5.1 Maße und Prämaße

Definition 5.1 *Es seien* $\mathbf{X}$ *eine beliebige nichtleere Menge und* $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ *ein* σ*-Ring. Eine nichtnegative* σ*-additive Mengenfunktion* $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ *mit* $\mu(\emptyset) = 0$ *heißt* **Maß** *und* $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ *wird* **Maßraum** *genannt. Den* σ*-Ring* $\mathcal{R}$ *nennt man dann das* **System der** μ**-messbaren Mengen**. *Man sagt, dass der Maßraum* $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ *ein* **messbarer Raum** *ist, wenn* $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$ *gilt.*

Im Kapitel 3 haben wir gesehen, dass man mittels eines Integrationsraumes $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ einen Maßraum $(\mathbf{X}, \mathbf{M}(\mathcal{J}), \mu)$ erzeugen kann. Im Weiteren lernen wir die Möglichkeit kennen, aus einem sogenannten Prämaß ein Maß zu konstruieren.

Definition 5.2 *Eine nichtnegative Mengenfunktion* $\mu : \mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^e$ *auf einem Ring* $\mathcal{R}_0$ *heißt* **Prämaß**, *wenn* $\mu(\emptyset) = 0$ *gilt und wenn aus* $A, A_n \in \mathcal{R}_0$, $A_n \cap A_k = \emptyset$ *für* $n \neq k$ *und* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *die Gleichung* $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *folgt (bedingte* σ*-Additivität).*

Ist $\mu : \mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^e$ ein Prämaß, so definieren wir für alle $A \subset \mathbf{X}$ mittels

$$\mu^*(A) := \left\{ \begin{array}{c} \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{R}_0,\, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}, \\ \infty, \text{ falls keine solche Überdeckung von } A \text{ existiert,} \end{array} \right\}$$

das sogenannte **äußere Maß**. Eigenschaften des äußeren Maßes sind

(A1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(A2) $B \subset A \subset \mathbf{X} \Rightarrow \mu^*(B) \leq \mu^*(A)$,

(A3) $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \subset \mathbf{X} \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$,

(A4) $\mu^*(A) = \mu(A) \;\; \forall\, A \in \mathcal{R}_0$.

Lemma 5.3 *Für alle* $A \in \mathcal{R}_0$ *gilt*

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A) \quad \forall\, M \subset \mathbf{X} .$$

Beweis. Aus $M = (M \cap A) \cup (M \setminus A)$ und (A2) folgt $\mu^*(M) \le \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A)$. Ist $\mu^*(M) = \infty$, so folgt die Behauptung. Seien nun $\mu^*(M) < \infty$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existieren $A_n \in \mathcal{R}_0$ mit

$$M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(M) + \varepsilon\,.$$

Wir setzen $B_n := A_n \cap A$ und $D_n := A_n \setminus A$. Es folgt $B_n, D_n \in \mathcal{R}_0$, $A_n = B_n \cup D_n$, $B_n \cap D_n = \emptyset$ und

$$M \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{sowie} \quad M \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \mu^*(M) + \varepsilon \quad &> \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(D_n) \\ &\overset{(A3)}{\ge} \quad \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) \overset{(A2)}{\ge} \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A)\,, \end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Definition 5.4 *Eine Menge $A \subset \mathbf{X}$ heißt **μ^*-messbar** (nach Caratheodory), wenn*

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A) \quad \forall\, M \subset \mathbf{X}$$

gilt.

Das System aller μ^*-messbaren Mengen $A \subset \mathbf{X}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}_0^*$.

Lemma 5.5 *Aus $A \subset \mathbf{X}$ und $\mu^*(A) = 0$ folgt $A \in \mathcal{R}_0^*$.*

Beweis. Aus $M \cap A \subset A$ folgt $0 \le \mu^*(M \cap A) \overset{(A2)}{\le} \mu^*(A) = 0$, also $\mu^*(M \cap A) = 0$. Das impliziert

$$\mu^*(M) \le \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A) \le 0 + \mu^*(M) = \mu^*(M)\,,$$

und das Lemma ist bewiesen. □

Satz 5.6 *Die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{R}_0^* \longrightarrow \mathbb{R}^e$, $A \mapsto \mu^*(A)$ ist ein Maß.*

Definition 5.7 *Sind $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ ein messbarer Raum und $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ eine numerische Funktion, so heißt diese Funktion **μ-messbar**, wenn $\{f > a\} \in \mathcal{R}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. Das System aller μ-messbaren Funktionen $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\mu)$.*

Die Bedingung $\{f > a\} \in \mathcal{R}\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ in Definition 5.7 ist äquivalent zu $\{f \ge a\} \in \mathcal{R}\ \forall\, a \in \mathbb{R}$, zu $\{f < a\} \in \mathcal{R}\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ und auch zu $\{f \le a\} \in \mathcal{R}\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ (vgl. Bemerkungen im Abschnitt 3.2).

Satz 5.8 *Für einen messbaren Raum $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ gilt:*

(a) *Aus $f \in \mathcal{M}(\mu)$ folgt $|f| \in \mathcal{M}(\mu)$.*

(b) *Aus* $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}(\mu)$ *folgt* $\sup f_n,\, \inf f_n,\, \limsup f_n,\, \liminf f_n \in \mathcal{M}(\mu)$.

(c) *Sind* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und* $f, g \in \mathcal{M}(\mu)$ *mit* $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ *für alle* $x \in \mathbf{X}$, *so folgt* $h \in \mathcal{M}(\mu)$, *wobei* $h(x) := F(f(x), g(x))$.

Beweis. (a) $\{|f| < a\} = \{f < a\} \cap \{f > -a\}$.

(b) $\{\sup f_n > a\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{f_n > a\}$, $\{\inf f_n \ge a\} = \bigcap_{n=1}^\infty \{f_n \ge a\}$ oder $\{\inf f_n < a\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{f_n < a\}$,

$$\{\limsup f_n \ge a\} = \bigcap_{n=1}^\infty \left\{ \sup_{k \ge n} f_k \ge a \right\} ,\ \{\liminf f_n \le a\} = \bigcap_{n=1}^\infty \left\{ \inf_{k\ge n} f_k \le a \right\}$$

(c) Wegen der Stetigkeit der Funktion F ist die Menge $G_a := \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : F/u, v) > a\big\}$ offen. Also gilt

$$G_a = \bigcup_{n=1}^\infty (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)$$

mit gewissen Intervallen (a_n, b_n) und (c_n, d_n) und somit

$$\begin{aligned} \{h > a\} &= \{x \in \mathbf{X} : (f(x), g(x)) \in G_a\} \\ &= \bigcup_{n=1}^\infty \{x \in \mathbf{X} : (f(x), g(x9) \in (a_n, b_n) \times (c_n, d_n)\} \\ &= \bigcup_{n=1}^\infty (\{a_n < f < b_n\} \cap \{c_n < g < d_n\}) \ . \end{aligned}$$

□

Aus den Aussagen (a) und (c) des Satzes 5.8 ergibt sich, dass $\mathcal{X} := \{f \in \mathcal{M}(\mu) : f(\mathbf{X}) \subset \mathbb{R}\}$ ein Vektorverband ist.

Definition 5.9 *Eine Funktion* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* **einfache Funktion** *oder* **Treppenfunktion**, *wenn* $f(\mathbf{X})$ *endlich ist. Die Menge aller messbaren einfachen Funktionen* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *bezeichnen wir mit* $\mathcal{M}_e(\mu)$.

Offenbar lässt sich jede Funktion $f \in \mathcal{M}_e(\mu)$ auf eindeutige Weise in der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^m \gamma_k \chi_{E_k}(x)$$

schreiben, wobei $m = m(f) \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \in \mathbb{R}$, $\gamma_k \ne \gamma_j$ für $j \ne k$ und $E_k \in \mathcal{R}$ mit $E_k \cap E_j = \emptyset$ für $j \ne k$ und $\bigcup_{k=1}^m E_k = \mathbf{X}$. Diese Darstellung einer μ-messbaren und einfachen Funktion werden wir im Weiteren immer wieder benutzen.

Definition 5.10 *Für* $f = \sum_{k=1}^m \gamma_k \chi_{E_k} \in \mathcal{M}_e(\mu)$, $f \ge 0$ *und* $E \in \mathcal{R}$ *definieren wir*

$$\int_E f\, d\mu := \sum_{k=1}^m \gamma_k \mu(E \cap E_k) \quad \forall\, E \in \mathcal{R} .$$

Sind $f \in \mathcal{M}(\mu)$, $f \geq 0$ und $E \in \mathcal{R}$, so definieren wir

$$\int_E f\,d\mu := \sup\left\{\int_E s\,d\mu : s \in \mathcal{M}_e(\mu),\, 0 \leq s \leq f\right\}.$$

Sind $f \in \mathcal{M}(\mu)$ und eines der beiden Integrale $\displaystyle\int_E f^{\pm}\,d\mu$ endlich, so setzen wir

$$\int_E f\,d\mu := \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu\,.$$

Unter der Menge $\mathcal{L}_E(\mu)$ der bezüglich μ auf E **summierbaren Funktionen** *verstehen wir*

$$\mathcal{L}_E(\mu) := \left\{f \in \mathcal{M}(\mu) : \left|\int_E f\,d\mu\right| < \infty\right\}.$$

Eigenschaften dieses Integralbegriffes:

(I1) $f, g \in \mathcal{M}(\mu)$, $0 \leq f \leq g$, $E \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; \int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$
Dabei genügt es $f(x) \leq g(x)$ für $x \in E$ vorauszusetzen!

(I2) $A, E \in \mathcal{R}$, $A \subset E$, $f \in \mathcal{M}(\mu)$, $f \geq 0 \;\Rightarrow\; \int_A f\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu$

(I3) $f \in \mathcal{M}(\mu)$, $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in E \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; m\,\mu(E) \leq \int_E f\,d\mu \leq M\,\mu(E)$

(I4) $f \in \mathcal{M}(\mu)$, $f \geq 0$, $E \in \mathcal{R}$:

$$\int_E f\,d\mu = 0 \iff \mu\left(E \cap \{f > 0\}\right) = 0 \qquad \text{(vgl. Lemma 1.30)}$$

Satz 5.11 *Es sei $f \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $f \geq 0$. Für $A \in \mathcal{R}$ definieren wir $\Phi(A) := \int_A f\,d\mu$. Dann ist $\Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ ein Maß (vgl. auch Satz 3.6).*

Folgerung 5.12 *Für $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$ ist die in Satz 5.11 definierte Mengenfunktion $\Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ σ-additiv.*

5.2 Grenzwertsätze

Satz 5.13 (Beppo Levi) *Es seien $f_n \in \mathcal{M}(\mu)$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$, $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ und $E \in \mathcal{R}$. Dann gilt*

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu\,.$$

(I5) Für $f, g \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $f \geq 0$, $g \geq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{R}$ gilt

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu \quad \text{und} \quad \int_E (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu\,.$$

(I6) Aus $f, g \in \mathcal{L}_E(\mu)$ mit $f, g : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu \quad \text{und} \quad \int_E (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu\,.$$

(I7) Aus $f \in \mathcal{L}_E(\mu)$ folgt $\mu\left(E \cap \{|f| = \infty\}\right) = 0$.

Lemma 5.14 (Fatou) *Sind $E \in \mathcal{R}$, $f_n \in \mathcal{M}(\mu)$ und $f_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, so gilt*

$$\int_E \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int_E f_n \, d\mu \,.$$

Satz 5.15 (Lebesgue) *Aus $E \in \mathcal{R}$, $f_n, f \in \mathcal{M}(\mu)$, $f = \lim f_n$ und aus der Existenz einer Funktion $g \in \mathcal{L}_E(\mu)$ mit $|f_n| \leq g \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ folgt $f_n, f \in \mathcal{L}_E(\mu)$ und*

$$\lim \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu \,.$$

Beweis. Aus $|f_n| \leq g$ folgt $|f| \leq g$ und somit nach (I1) $f_n, f \in \mathcal{L}_E(\mu)$. Nach (I7) ist $\mu(A) = 0$ für $A = E \cap \{g = \infty\}$. Wir setzen

$$\widetilde{f}_n(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} f_n(x) & : & x \in E \setminus A \,, \\ 0 & : & x \in \mathbf{X} \setminus (E \setminus A) \,, \end{array} \right\}$$

und analog $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$. Für diese Funktionen bleiben wegen (I2) die Voraussetzungen gültig, und wir haben $\widetilde{g} \pm \widetilde{f}_n \geq 0$. Aus Lemma 5.14 folgt

$$\int_E \widetilde{g} \, d\mu - \int_E \widetilde{f} \, d\mu = \int (\widetilde{g} - \widetilde{f}) \, d\mu \leq \liminf \int_E (\widetilde{g} - \widetilde{f}_n) \, d\mu = \int_E \widetilde{g} \, d\mu - \limsup \int_E \widetilde{f}_n \, d\mu$$

und

$$\int_E \widetilde{g} \, d\mu + \int_E \widetilde{f} \, d\mu = \int (\widetilde{g} + \widetilde{f}) \, d\mu \leq \liminf \int_E (\widetilde{g} + \widetilde{f}_n) \, d\mu = \int_E \widetilde{g} \, d\mu + \liminf \int_E \widetilde{f}_n \, d\mu \,.$$

Unter Verwendung von Folgerung 5.12 erhalten wird

$$\limsup \int_E f_n \, d\mu = \limsup \int_E \widetilde{f}_n \, d\mu \leq \int_E \widetilde{f} \, d\mu \leq \liminf \int \widetilde{f}_n \, d\mu = \liminf \int_E f_n \, d\mu \,.$$

□

5.3 Zerlegung σ-additiver Mengenfunktionen

Es sei wieder $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ ein messbarer Raum. Im Weiteren werden wir von einer σ-additiven Mengenfunktion $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ stets $\nu(\emptyset) = 0$ fordern.

Definition 5.16 *Man nennt eine σ-additive Mengenfunktion ν* **absolut stetig** *bezüglich μ (in Zeichen: $\nu \ll \mu$), wenn aus $E \in \mathcal{R}$ und $\mu(E) = 0$ folgt $\nu(E) = 0$. Man sagt, dass ν auf $A \in \mathcal{R}$* **konzentriert** *ist, wenn $\nu(E) = 0$ für alle $E \in \mathcal{R}$ mit $A \cap E = \emptyset$ gilt. Sind $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ σ-additiv, so nennen wir ν_1 und ν_2* **zueinander singulär** *(in Zeichen: $\nu_1 \perp \nu_2$), wenn Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$ existieren, so dass $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ gilt und ν_1 auf A_1 sowie ν_2 auf A_2 konzentriert sind.*

Offenbar ist eine σ-additive Mengenfunktion $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann auf $A \in \mathbb{R}$ konzentriert, wenn $\nu(E) = \nu(A \cap E)$ für alle $E \in \mathcal{R}$ gilt.

Sind $\nu_1 \perp \nu_2$ und ν_j auf A_j mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ konzentriert, so folgt $\nu_1(A_2) = \nu(A_1 \cap A_2) = 0$ und $\nu_2(A_1) = \nu(A_2 \cap A_1) = 0$.

Folgerung 5.17 *Für σ-additive Mengenfunktionen $\nu, \nu_1, \nu_2 : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gilt:*

(a) $\nu_1 \perp \mu\,,\, \nu_2 \perp \mu \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 \perp \mu$

(b) $\nu_1 \ll \mu\,,\, \nu_2 \ll \mu \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 \ll \mu$

(c) $\nu_1 \ll \mu\,,\, \nu_2 \perp \mu \Rightarrow \nu_1 \perp \nu_2$

(d) $\nu \ll \mu\,,\, \nu \perp \mu \Rightarrow \nu \equiv 0$

Wir nennen μ ein **σ-endliches Maß**, wenn Mengen $A_n \in \mathcal{R}$ existieren, so dass $\mathbf{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\mu(A_n) < \infty\,,\, n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lemma 5.18 *Ist das Maß $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ σ-endlich, so existiert eine Funktion $\omega \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$ mit $0 < \omega(x) < 1\,,\, x \in \mathbf{X}$.*

Beweis. Es seien $A_n \in \mathbb{R}\,,\, \mu(A_n) < \infty\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{X} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Wir setzen

$$\omega_n(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & x \in \mathbf{X} \setminus A_n\,, \\ \dfrac{2^{-n-1}}{1+\mu(A_n)} & : & x \in A_n\,, \end{array} \right\}$$

und $\omega(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \omega_n(x)$. Es folgt $0 < \omega \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1} = \dfrac{1}{2} < 1$ und nach Satz 5.13

$$\int \omega\, d\mu = \lim \sum_{k=1}^{n} \int \omega_k(x)\, d\mu = \lim \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{-k-1}\mu(A_k)}{1+\mu(A_k)} \le \frac{1}{2}\,.$$

□

Satz 5.19 (Lebesgue-Radon-Nikodym) *Es seien das Maß $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ σ-endlich und $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ σ-additiv. Dann existieren eindeutig bestimmte σ-additive Mengenfunktionen $\nu_a : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\nu_s : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$\nu = \nu_a + \nu_s\,, \quad \nu_a \ll \mu \quad \textit{und} \quad \nu_s \perp \mu\,.$$

Es gibt eine μ-f.ü. eindeutig bestimmte Funktion $h \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$, so dass

$$\nu_a(E) = \int_E h\, d\mu \quad \forall\, E \in \mathcal{R}$$

gilt.

Beweis. Erfüllen neben ν_a und ν_s auch $\widetilde{\nu}_a$ und $\widetilde{\nu}_s$ die Aussage des Satzes, so ergibt sich aus Folgerung 5.17,(a),(b),(d) $\nu_a - \widetilde{\nu}_a = \widetilde{\nu}_s - \nu_s = 0$, womit die Eindeutigkeit der Zerlegung gezeigt ist.

Wir beweisen nun die Existenz der Zerlegung: Es seien vorerst ν ein Maß auf $\mathcal{R}$, $\omega \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$ wie in Lemma 5.18 und $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\, A \mapsto \nu(A) + \int_A \omega\, d\mu$. Dann ist $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Maß, und es gilt

$$\int_A f\, d\varphi = \int_A f\, d\nu + \int_A f\omega\, d\mu \quad \forall\, f \in \mathcal{M}(\mu)\,,\ f \ge 0\,.$$

Ist $f \in \mathbf{L}^2_{\mathbf{X}}(\varphi) := \{f \in \mathcal{M}(\mu) : |f|^2 \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\varphi)\}$, so gilt

$$\left|\int f\,d\nu\right| \le \int |f|\,d\nu \le \int |f|\,d\varphi \le \sqrt{\int |f|^2\,d\varphi}\,\sqrt{\varphi(\mathbf{X})}\,.$$

Damit ist das lineare Funktional $\mathbf{L}^2_{\mathbf{X}}(\varphi) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \int f\,d\nu$ beschränkt. Das Riesz'sche Darstellungstheorem besagt, dass dann ein $g \in \mathbf{L}^2_{\mathbf{X}}(\varphi)$ existiert, so dass

$$\int f\,d\nu = \int fg\,d\varphi \quad \forall\, f \in \mathbf{L}^2_{\mathbf{X}}(\varphi) \tag{5.1}$$

gilt. Für $f = \chi_E$ mit $E \in \mathcal{R}$ erhalten wir damit

$$0 \le \nu(E) = \int_E g\,d\varphi \le \varphi(E)\,. \tag{5.2}$$

Wir setzen $E := \{g < 0\} \cup \{g > 1\}$ und nehmen an, dass $\varphi(E) > 0$ gilt. Dann existieren ein $x_0 \in \mathbb{R}$, ein $\varepsilon > 0$ und ein $\alpha > 0$ mit $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \subset (-\infty, -\varepsilon) \cup (1 + \varepsilon, \infty)$ und $\varphi(E_0) > 0$, wobei $E_0 = \{x_0 - \alpha < g < x_0 + \alpha\}$. Es folgt

$$\left|\frac{\int_{E_0} g\,d\varphi}{\varphi(E_0)} - x_0\right| = \frac{1}{\varphi(E_0)}\left|\int_{E_0} (g - x_0)\,d\varphi\right| \le \frac{1}{\varphi(E_0)}\int |g - x_0|\,d\varphi \le \alpha\,,$$

was der Tatsache $\dfrac{\int_{E_0} g\,d\varphi}{\varphi(E_0)} \in [0,1]$ (vgl. (5.2)) widerspricht. Also ist $\varphi(E) = 0$, und wir können o.E.d.A. annehmen, dass $0 \le g(x) \le 1$ für alle $x \in \mathbf{X}$ gilt. Die Beziehung (5.1) ist für alle $f \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $f \ge 0$ erfüllt, weil solche Funktionen als Grenzwert einer isotonen Folge von Treppenfunktionen dargestellt werden können. Es folgt

$$\int (1-g)f\,d\nu = \int fg\,d\varphi - \int fg\,d\nu = \int fg\,d\nu + \int fg\omega\,d\mu - \int fg\,d\nu = \int fg\omega\,d\mu \tag{5.3}$$

für alle $f \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $f \ge 0$. Wir setzen $A := \{0 \le g < 1\}$ und $B := \{g = 1\}$ sowie

$$\nu_a(E) := \nu(A \cap E)\,, \quad \nu_s(E) := \nu(B \cap E)\,, \quad E \in \mathcal{R}\,.$$

Wegen $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = \mathbf{X}$ ist $\nu = \nu_a + \nu_s$. Aus (5.3) folgt für $f = \chi_B$ die Beziehung $0 = \int \chi_B \omega\,d\mu$, also $\mu(B) = 0$, da $\omega(x) > 0$ für alle $x \in \mathbf{X}$. Das bedeutet $\nu_s \perp \mu$.

Für $E \in \mathcal{R}$ und $f = (1 + g + g^2 + \ldots + g^n)\chi_E$ folgt aus (5.3)

$$\int (1 - g^{n+1})\chi_E\,d\nu = \int (g + g^2 + \ldots + g^{n+1})\omega\,\chi_E\,d\mu\,.$$

Da $(1 - g^{n+1}) \uparrow \chi_A$ und $(g + g^2 + \ldots + g^{n+1})\omega \uparrow h \in \mathcal{M}(\mu)$, folgt $\nu(A \cap E) = \int h\chi_E\,d\mu$ für alle $E \in \mathcal{R}$, also

$$\nu_A(E) = \int_E h\,d\mu\,.$$

Der allgemeine Fall, dass $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lediglich σ-additiv ist, kann mit den restlichen Überlegungen dieses Abschnittes behandelt werden. □

Satz 5.20 *Es seien $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ eine σ-Algebra und $\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ σ-additiv mit $\eta(\emptyset) = 0$. Dann ist*

$$\eta^+ : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e\,,\ E \mapsto \sup\{\eta(A) : A \in \mathcal{R},\, A \subset E\}$$

ein Maß auf $\mathcal{R}$. Gilt $\eta(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$, so gilt dies auch für η^+ .

Beweis. Es ist $\eta^+(E) \geq \eta(\emptyset) = 0$ für alle $E \in \mathcal{R}$.

(a) Seien $E_n \in \mathcal{R}$, $E_k \cap E_j = \emptyset$ $(k \neq j)$ und $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Für $A \in \mathcal{R}$, $A \subset E$ und $A_n := A \cap E_n$ gilt $A_k \cap A_j = \emptyset$ $(k \neq j)$ und somit

$$\eta(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta^+(E_n)\,,$$

also $\eta^+(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta^+(E_n)$.

(b) Ist $\eta^+(E) = \infty$, so folgt aus (a) die Gleichung $\eta^+(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^+(E_n)$.

(c) Es sei $\eta^+(E) < \infty$ und es existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\eta^+(E_{n_0}) = \infty$. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $A_k \in \mathcal{R}$ mit $A_k \subset E_{n_0}$ und $\eta(A_k) > k$. Es folgt, da $A_k \subset E$, $\eta^+(E) = \infty$ im Widerspruch zur Annahme.

(d) Es sei $\eta^+(E) < \infty$. Aus (c) folgt $\eta^+(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $A_n \subset E_n$ mit $\eta(A_n) > \eta^+(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$. Für $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gilt dann $A \subset E$ und $\eta(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \eta^+(E_n) - \varepsilon$. Es folgt $\eta^+(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \eta^+(E_n)$.

(e) Sei $\eta(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\eta^+(\mathbf{X}) < \infty$ gilt. Unter der Annahme $\eta^+(E) = \infty$ für ein $E \in \mathcal{R}$ setzen wir $\mathcal{R}_n^E := \{A \in \mathcal{R} : A \subset E,\, \eta(A) > n\}$. Wir nehmen nun zusätzlich an, dass $\eta^+(A) < \infty$ gilt für alle $A \in \mathcal{R}_n^E$. Aus $A_1 \in \mathcal{R}_n^E$ folgt dann $\infty = \eta^+(E) = \eta^+(A_1) + \eta^+(E \setminus A_1)$, also $\eta^+(E \setminus A_1) = \infty$, und somit ist $\mathcal{R}_n^{E \setminus A_1}$ nicht leer. Sei $A_2 \in \mathcal{R}_n^{E \setminus A_1}$. Es folgt $\eta^+((E \setminus A_1) \setminus A_2) = \eta^+(E \setminus (A_1 \cup A_2)) = \infty$, usw. usf. Wir erhalten eine Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ von Mengen $A_n \in \mathcal{R}$ mit den Eigenschaften $A_k \cap A_j = \emptyset$ $(k \neq j)$ und $\eta(A_k) > n$, so dass $\eta\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \infty$ im Widerspruch zur Annahme $\eta(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$ folgt. Also existiert zu dem $n \in \mathbb{N}$ ein $E_n \in \mathcal{R}_n^E$ mit $\eta^+(E_n) = \infty$, falls $\eta^+(E) = \infty$ gilt.

(f) Es sei nun wieder $\eta(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$. Wir nehmen an, dass $\eta^+(\mathbf{X}) = \infty$ gilt. Dann gibt es nach (e) ein $A_1 \in \mathcal{R}$, so dass $\eta(A_1) > 1$ und $\eta^+(A_1) = \infty$ gilt. Wiederum nach (e) existiert ein $A_2 \in \mathcal{R}$, so dass $A_2 \subset A_1$, $\eta(A_2) > 2$ und $\eta^+(A_2) = \infty$, usw. usf. Wir erhalten eine Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ von Mengen $A_n \in \mathcal{R}$ mit den Eigenschaften $A_{n+1} \subset A_n$, $\eta(A_n) > n$ und $\eta^+(A_n) = \infty$. Wir setzen $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ und folgern $\eta(A) = \lim \eta(A_n) = \infty$ im Widerspruch zur Annahme.

$\square$

Im Weiteren sei $\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ σ-additiv. Dann ist auch $\eta^- : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \mapsto \eta^+(E) - \eta(E)$ ein Maß. Man nennt η^+ und η^- die **positive** bzw. **negative Variation** und $\eta = \eta^+ - \eta^-$ die **Jordan-Zerlegung** von η. Das Maß $|\eta| : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \mapsto \eta^+(E) + \eta^-(E)$ heißt **Totalvariation** von η.

Satz 5.21 (Zerlegungssatz von Hahn) *Es sei $\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ σ-additiv. Dann existieren Mengen $\mathbf{X}^\pm \in \mathcal{R}$ mit $\mathbf{X}^+ \cap \mathbf{X}^- = \emptyset$, $\mathbf{X}^+ \cup \mathbf{X}^- = \mathbf{X}$ und*

$$\eta^+(E) = \eta(E \cap \mathbf{X}^+)\,,\ \eta^-(E) = -\eta(E \cap \mathbf{X}^-) \quad \forall\, E \in \mathcal{R}\,.$$

Beweis. Aus Satz 5.20 folgt $\eta^+(\mathbf{X}) < \infty$. Somit existieren $E_k \in \mathcal{R}$ mit $\eta(E_k) > \eta^+(\mathbf{X}) - \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen $A_n := \bigcup_{k=n}^\infty E_k$ und $\mathbf{X}^+ := \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, so dass $A_n \supset A_{n+1}$ und $\eta^+(A_n) \geq \eta^+(E_n) \geq \eta(E_n) > \eta^+(\mathbf{X}) - \frac{1}{2^n}$ folgt. Damit haben wird

$$\eta^+(\mathbf{X}^+) = \lim \eta^+(A_n) \geq \eta^+(\mathbf{X})\,,\ \text{d.h.}\,,\ \eta^+(\mathbf{X}^+) = \eta^+(\mathbf{X})\,.$$

Weiterhin gilt

$$\eta^-(E_k) = \eta^+(E_k) - \eta(E_k) < \eta^+(\mathbf{X}) - \left(\eta^+(\mathbf{X}) - \frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k}$$

und somit

$$0 \leq \eta^-(A_n) \leq \sum_{k=n}^\infty \eta^-(E_k) \leq \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)\,.$$

Es folgt $\eta^-(\mathbf{X}^+) = \lim \eta^-(A_n) = 0$, also $\eta^+(\mathbf{X}) = \eta^+(\mathbf{X}) - \eta^-(\mathbf{X}^+) = \eta(\mathbf{X}^+)$. Für $E \in \mathcal{R}$ gilt nun $\eta(E \cap \mathbf{X}^+) \leq \eta^+(E)$ und $\eta((\mathbf{X} \setminus E) \cap \mathbf{X}^+) \leq \eta^+(\mathbf{X} \setminus E)$. Wir nehmen an, es gibt ein $E \in \mathcal{R}$ mit $\eta(E \cap \mathbf{X}^+) < \eta^+(E)$. Dann folgt der Widerspruch

$$\eta^+(E) + \eta^+(\mathbf{X} \setminus E) > \eta(E \cap \mathbf{X}^+) + \eta((\mathbf{X} \setminus E) \cap \mathbf{X}^+) = \eta(\mathbf{X}^+) = \eta^+(\mathbf{X}) = \eta^+(E) + \eta^+(\mathbf{X} \setminus E)\,.$$

Also gilt $\eta^+(E) = \eta(E \cap \mathbf{X}^+)$ für alle $E \in \mathcal{R}$. Wir setzen $\mathbf{X}^- := \mathbf{X} \setminus \mathbf{X}^+$. Es folgt

$$\begin{aligned} \eta^-(E) &= \eta^+(E) - \eta(E) = \eta(E \cap \mathbf{X}^+) - \eta(E \setminus (E \cap \mathbf{X}^+)) - \eta(E \cap \mathbf{X}^+) \\ &= -\eta(E \cap (\mathbf{X} \setminus \mathbf{X}^+)) = -\eta(E \cap \mathbf{X}^-)\,. \end{aligned}$$

□

5.4 Übungsaufgaben

1. Man zeige, das für ein Prämaß $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty]$ gilt:

$$A_n \in \mathcal{R}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)\,.$$

   (Z) Es seien $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ die Familie aller Mengen, die höchstens abzählbar oder deren Komplemente höchstens abzählbar sind, und $\alpha \in [0, \infty]$. Wir definieren

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & : \quad A \text{ endlich}\,, \\ \alpha & : \quad A \text{ unendlich}\,. \end{cases}$$

   Man zeige, dass nur für $\alpha = 0$ die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß ist.

2. Es seien $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ eine additive Mengenfunktion, d.h.,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{R} : A \cap B = \emptyset\,.$$

   Man zeige, dass $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ genau dann ein Prämaß ist, wenn aus $A_n \in \mathcal{A}$ und $A_n \supset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\lim A_n = \emptyset$ folgt $\lim \mu(A_n) = 0$.

(Z) Unter den Voraussetzungen von Aufgabe 2 zeige man, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ ist ein Prämaß.

(b) $A_n \in \mathcal{R}\,,\ A_n \subset A_{n+1}\,,\ A := \lim A_n \in \mathcal{R} \implies \lim \mu(A_n) = \mu(A)$ (Stet. von unten)

(c) $A_n \in \mathcal{R}\,,\ A_n \supset A_{n+1}\,,\ A := \lim A_n \in \mathcal{R} \implies \lim \mu(A_n) = \mu(A)$ (Stet. von oben)

3. Zeigen Sie, dass für σ-additive Mengenfunktionen $\nu, \nu_1, \nu_2 : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

(a) Ist ν konzentriert auf $A \in \mathcal{R}$, so auch $|\nu|$.

(b) $\nu_1 \perp \nu_2 \Rightarrow |\nu_1| \perp |\nu_2|$

(c) $\nu \ll \mu \Rightarrow |\nu| \ll \mu$

4. Man zeige, dass $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann bezüglich μ absolut stetig ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|\nu|(E) < \varepsilon$ für alle $E \in \mathcal{R}$ mit $\mu(E) < \delta$ gilt.

5. Man zeige: Sind $\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\eta_1, \eta_2 : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ σ-additiv mit $\eta = \eta_1 - \eta_2$, so gilt $\eta_1 \geq \eta^+$ und $\eta_2 \geq \eta^-$.

5.5 Produktmaße. Der Satz von Fubini

Auch ein geordnetes Paar $(\mathbf{X}, \mathcal{R})$ aus einer nichtleeren Menge $\mathbf{X}$ und einer σ-Algebra $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ nennen wir **messbaren Raum**. Das entsprechende System der **messbaren Funktionen** bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\mathcal{R})$, d.h.

$$\mathcal{M}(\mathcal{R}) := \{f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e : \{f > a\} \in \mathcal{R}\ \forall\, a \in \mathbb{R}\}\,.$$

Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R})$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S})$ zwei messbare Räume. Eine Menge $A \times B$ mit $A \in \mathcal{R}$ und $B \in \mathcal{S}$ nennen wir Rechteck. Mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ bezeichnen wir das System der **Elementarmengen**

$$\mathcal{E} := \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} R_k : R_k\text{-Rechteck},\ R_k \cap R_j = \emptyset\,(j \neq k),\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Lemma 5.22 *$\mathcal{E}$ ist eine Algebra.*

Eine Möglichkeit, ausgehend von zwei Maßen μ und λ auf $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{S}$ ein Produktmaß zu konstruieren, besteht nun darin, auf der Algebra $\mathcal{E}$ ein Prämaß mittels $\eta(A \times B) = \mu(a)\lambda(B)$ zu erklären und unter Verwendung der η^*-Messbarkeit nach Caratheodory fortzusetzen (vgl. Definition 5.4 und Satz 5.6). Wir beschreiben im Folgenden ein anderes Vorgehen.

Definition 5.23 *Unter $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ verstehen wir die kleinste σ-Algebra, die das System $\mathcal{R} \times \mathcal{S} = \{A \times B : A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{S}\}$ umfasst. Für $E \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ und $x \in \mathbf{X}$ bzw. $y \in \mathbf{Y}$ definieren wir den x-Schnitt E_x bzw. den y-Schnitt E^y durch*

$$E_x := \{y \in \mathbf{Y} : (x, y) \in E\} \quad \text{bzw.} \quad E^y := \{x \in \mathbf{X} : (x, y) \in E\}\,.$$

Lemma 5.24 *Aus $E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ folgt $E_x \in \mathcal{S}\ \forall\, x \in \mathbf{X}$ und $E^y \in \mathcal{R}\ \forall\, y \in \mathbf{Y}$.*

Beweis. Wir definieren $\mathcal{F} := \{E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S} : E_x \in \mathcal{S} \ \forall\, x \in \mathbf{X}\}$. Für $E = A \times B \in \mathcal{R} \times \mathcal{S}$ gilt

$$E_x = \left\{ \begin{array}{ccc} B & : & x \in A \\ \emptyset & : & x \notin A \end{array} \right\} \in \mathcal{S} \quad \forall\, x \in \mathbf{X} ,$$

d.h., $E \in \mathcal{F}$, und somit ist $\mathcal{R} \times \mathcal{S} \subset \mathcal{F}$. Also ist auch $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} \in \mathcal{F}$. Aus

$$y \in (\mathbf{X} \times \mathbf{Y} \setminus E)_x \iff (x,y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \setminus E \iff (x,y) \notin E \iff y \notin E_x \iff y \in \mathbf{Y} \setminus E_x$$

folgt $(\mathbf{X} \times \mathbf{Y} \setminus E)_x = \mathbf{Y} \setminus E_x$, d.h., aus $E \in \mathcal{F}$ folgt $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} \setminus E \in \mathcal{F}$. Sind nun $E_n \in \mathcal{F}$ und $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, so gilt

$$\begin{aligned} y \in E_x \iff (x,y) \in E \iff \exists\, k \in \mathbb{N} : (x,y) \in E_k \iff \exists\, k \in \mathbb{N} : y \in (E_k)_x \\ \iff y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x . \end{aligned}$$

Also gilt $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x \in \mathcal{S}$, d.h. $E \in \mathcal{F}$. Somit ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, woraus $\mathcal{F} = \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ folgt. □

Sind $f : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ eine numerische Funktion und $x \in \mathbf{X}$ bzw. $y \in \mathbf{Y}$, so bezeichnen wir mit f_x bzw. f^y die Funktionen

$$f_x : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}^e,\ y \mapsto f(x,y) \quad \text{und} \quad f^y : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e,\ x \mapsto f(x,y) .$$

Lemma 5.25 *Aus $f \in \mathcal{M}(\mathcal{R} \otimes \mathcal{S})$ folgt*

$$f_x \in \mathcal{M}(\mathcal{S}) \ \ \forall\, x \in \mathbf{X} \quad \textit{und} \quad f^y \in \mathcal{M}(\mathcal{R}) \ \ \forall\, y \in \mathbf{Y} .$$

Beweis. Aus Lemma 5.24 folgt

$$\{f_x > a\} = \{y \in \mathbf{Y} : f(x,y) > a\} = \{f > a\}_x \in \mathcal{S} .$$

□

Definition 5.26 *Eine Mengensystem $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ nennt man* **monoton abgeschlossen**, *wenn aus $A_n, B_n \in \mathcal{F}$ und $A_n \subset A_{n+1}, B_n \supset B_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, folgt*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \quad \textit{und} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F} .$$

Lemma 5.27 *Die σ-Algebra $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ ist das kleinste monoton abgeschlossene Mengensystem, welches das System $\mathcal{E}$ der Elementarmengen umfasst.*

Beweis. Es sei $\mathcal{F}$ das kleinste monoton abgeschlossene Mengensystem, welches $\mathcal{E}$ umfasst. Dann ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$. Für $E \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ definieren wird

$$\Omega(E) := \{F \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y} : E \setminus F, F \setminus E, F \cup E \in \mathcal{F}\} .$$

Es gilt dann:

(1) $F \in \Omega(E) \iff E \in \Omega(F)$

(2) $\Omega(E)$ ist monoton abgeschlossen für jedes $E \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, weil $\mathcal{F}$ monoton abgeschlossen ist.

(3) Aus $E \in \mathcal{E}$ folgt mit Lemma 5.22 $\mathcal{E} \subset \Omega(E)$, also wegen (2) $\mathcal{F} \subset \Omega(E)$.

(4) $F \in \mathcal{F}$, $E \in \mathcal{E} \overset{(3)}{\Longrightarrow} F \in \Omega(E) \overset{(1)}{\Longrightarrow} E \in \Omega(F)$,
d.h., $F \in \mathcal{F} \implies \mathcal{E} \subset \Omega(F)$, also $\mathcal{F} \subset \Omega(F)$

(5) Aus (4) folgt, dass mit $E, F \in \mathcal{F}$ auch $E \setminus F, E \cup F \in \mathcal{F}$ gilt.

(6) Seien $E_n \in \mathcal{F}$ und $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Wir setzen $E_n := F_1 \cup \ldots \cup F_n$. Aus (5) folgt $E_n \in \mathcal{F}$. Wegen $E_n \subset E_{n+1}$ folgt $F \in \mathcal{F}$.

Da außerdem $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} \in \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ gilt, ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, so dass $\mathcal{F} = \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ folgt. □

Satz 5.28 *Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S}, \lambda)$ messbare Räume mit σ-endlichen Maßen μ und λ. Definieren wir für $E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$*

$$\varphi_E : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e,\ x \mapsto \lambda(E_x) \quad \textit{und} \quad \psi_E : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}^e,\ y \mapsto \mu(E^y),$$

so gilt $\varphi_E \in \mathcal{M}(\mu)$, $\psi_E \in \mathcal{M}(\lambda)$ und

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi_E \, d\mu = \int_{\mathbf{Y}} \psi_E \, d\lambda .$$

Beweis. Mit Ω bezeichnen wir die Familie aller $E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$, für die die Aussage des Satzes gilt.

(a) Sei $E = A \times B \in \mathcal{E}$. Dann sind $\varphi_E(x) = \lambda(B)\chi_A(x)$ und $\psi_E(y) = \mu(A)\chi_B(y)$, so dass

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi_E \, d\mu = \lambda(B)\mu(A) = \int_{\mathbf{Y}} \psi_E \, d\lambda .$$

Es folgt $\mathcal{R} \times \mathcal{S} \subset \Omega$.

(b) Sind $E_n \in \Omega$, $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ und $\varphi_n := \varphi_{E_n}$, $\psi_n := \psi_{E_n}$, so folgt $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$, $\psi_n \le \psi_{n+1}$ und $\varphi_n \uparrow \varphi_E$, $\psi_n \uparrow \psi_E$ mit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, weil $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$. Satz 5.13 liefert

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi_E \, d\mu = \lim \int_{\mathbf{X}} \varphi_n \, d\mu = \lim \int_{\mathbf{Y}} \psi_n \, d\lambda = \int_{\mathbf{Y}} \psi_E \, d\lambda ,$$

also $E \in \Omega$.

(c) Sind die $E_n \in \Omega$ paarweise disjunkt, $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ und $F_n := E_1 \cup \ldots \cup E_n$, so folgt

$$\varphi_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda((E_k)_x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{E_k}(x) , \quad \psi_{F_n}(y) = \sum_{k=1}^{n} \mu((E_k)^y) = \sum_{k=1}^{n} \psi_{E_k}(y) ,$$

und somit $F_n \in \Omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus (b) folgt $E \in \Omega$.

(d) Sind $A \times B \in \mathcal{E}$ und $\mu(A) < \infty$, $\lambda(B) < \infty$ sowie $A \times B \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, $E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \in \Omega$, so folgt

$$A \times B \in \Omega\,, \quad \varphi_{A\times B} \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)\,, \quad \psi_{A\times B} \in \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}(\lambda)\,,$$

so dass unter Verwendung von Satz 5.15 $E \in \Omega$ folgt. Beachte: $E_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$.

(e) Es existieren paarweise disjunkte $X_n \in \mathcal{R}$ und paarweise disjunkte $Y_n \in \mathcal{S}$ mit $\mu(X_n) < \infty$, $\lambda(Y_n) < \infty$ und $\mathbf{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $\mathbf{Y} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Wir setzen

$$E_{mn} := E \cap (X_m \times Y_n) \quad \text{und} \quad \Omega_0 := \{E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S} : E_{mn} \in \Omega \ \forall\, m,n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Aus (b) und (d) folgt, dass Ω_0 ein monoton abgeschlossenes Mengensystem ist. Aus (a) und (c) ergibt sich $\mathcal{E} \subset \Omega_0$. Lemma 5.27 liefert $\Omega_0 = \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$.

(f) Ist nun $E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ beliebig, so folgt aus (e) und (c) $E = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} E_{mn} \in \Omega$.

□

Definition 5.29 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 5.28 definieren wir für $E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ das Maß*

$$(\mu \otimes \lambda)(E) := \int_{\mathbf{X}} \lambda(E_x)\, d\mu = \int_{\mathbf{Y}} \mu(E^y)\, d\lambda\,.$$

Durch Definition 5.29 wird tatsächlich ein Maß erklärt. Dieses ist auch σ-endlich.

Satz 5.30 *Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S}, \lambda)$ messbare Räume mit σ-endlichen Maßen μ und λ sowie $f \in \mathcal{M}(\mu \otimes \lambda) = \mathcal{M}(\mathcal{R} \otimes \mathcal{S})$ mit $f \geq 0$. Definieren wir*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbf{Y}} f_x\, d\lambda\,,\ x \in \mathbf{X} \quad \textit{und} \quad \psi(y) = \int_{\mathbf{X}} f^y\, d\mu\,,\ y \in \mathbf{Y}\,, \tag{5.4}$$

so gilt $\varphi \in \mathcal{M}(\mu)$, $\psi \in \mathcal{M}(\lambda)$ und

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi\, d\mu = \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} f\, d(\mu \otimes \lambda) = \int_{\mathbf{Y}} \psi\, d\lambda\,. \tag{5.5}$$

Beweis. Nach Lemma 5.25 sind die Definitionen von φ und ψ korrekt. Im Fall $f = \chi_E$ mit $E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ sind $\varphi(x) = \lambda(E_x)$ und $\psi(y) = \mu(E^y)$, so dass nach Satz 5.28 und Definition 5.29 gilt

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi\, d\mu = (\mu \otimes \lambda)(E) = \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} \chi_E\, d(\mu \otimes \lambda) = \int_{\mathbf{Y}} \psi\, d\lambda\,.$$

Damit gilt der Satz für alle messbaren Treppenfunktionen, d.h., für alle $f \in \mathcal{M}_e(\mu \otimes \lambda)$, mit $f \geq 0$. Ist nun $f \in \mathcal{M}(\mu \otimes \lambda)$, $f \geq 0$, so existieren $s_n \in \mathcal{M}_e(\mu \otimes \lambda)$ mit $0 \leq s_n$ und $s_n \uparrow f$. Für $\varphi_n(x) := \int_{\mathbf{Y}} (s_n)_x\, d\lambda$ folgt

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi_n\, d\mu = \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} s_n\, d(\mu \otimes \lambda)$$

und nach Satz5.13

$$\varphi_n(x) \uparrow \varphi(x) = \int_{\mathbf{Y}} f_x \, d\lambda \, .$$

Wiederum Satz 5.13 liefert

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi_n \, d\mu \longrightarrow \int_{\mathbf{X}} \varphi \, d\mu \quad \text{und} \quad \int_{\mathbf{X}} \varphi_n \, d\mu = \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} s_n \, d(\mu \otimes \lambda) \longrightarrow \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} f \, d(\mu \otimes \lambda) \, .$$

□

Satz 5.31 (Fubini) *Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S}, \lambda)$ messbare Räume mit σ-endlichen Maßen μ und λ sowie $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}}(\mu \otimes \lambda)$. Dann gilt $f_x \in \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}(\lambda)$ für fast alle $x \in \mathbf{X}$ und $f^y \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$ für fast alle $y \in \mathbf{Y}$. Damit sind $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ aus (5.4) f.ü. erklärt und können zu messbaren Funktionen $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\psi : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Dabei gilt (unabhängig von dieser Fortsetzung) $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$ und $\psi \in \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}(\lambda)$ sowie (5.5).*

Beweis. Wir definieren

$$\varphi_1(x) := \int_{\mathbf{Y}} (f^+)_x \, d\lambda \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) := \int_{\mathbf{Y}} (f^-)_x \, d\lambda \, .$$

Es folgt aus Satz 5.30

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi_1 \, d\mu = \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} f^+ \, d(\mu \otimes \lambda) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbf{X}} \varphi_2 \, d\mu = \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} f^- \, d(\mu \otimes \lambda) \, .$$

Somit gehören φ_1 und φ_2 zu $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$, und die Eigenschaft (I7) zeigt, dass $\mu(\{\varphi_1 = \infty\}) = \mu(\{\varphi_2 = \infty\}) = 0$ gilt. Es folgt $(f^{\pm})_x \in \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}(\lambda)$ für μ-fast alle $x \in \mathbf{X}$. Für diese $x \in \mathbf{X}$ gilt

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = \int_{\mathbf{Y}} \left[(f^+)_x - (f^-)_x \right] \, d\lambda = \int_{\mathbf{Y}} f_x \, d\lambda = \varphi(x) \, .$$

Es folgt, unabhängig von der Fortsetzung der Funktion $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ zu einer messbaren Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi \, d\mu = \int_{\mathbf{X}} \varphi_1 \, d\mu - \int_{\mathbf{X}} \varphi_2 \, d\mu = \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} f^+ \, d(\mu \otimes \lambda) - \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} f^- \, d(\mu \otimes \lambda) = \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} f \, d(\mu \otimes \lambda) \, .$$

□

Folgerung 5.32 *Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S}, \lambda)$ messbare Räume mit σ-endlichen Maßen μ und λ sowie $f \in \mathcal{M}(\mu \otimes \lambda)$.*

(a) *Ist $\int_{\mathbf{X}} \varphi_0 \, d\mu < \infty$, wobei $\varphi_0(x) = \int_{\mathbf{Y}} (|f|)_x \, d\lambda$, so folgt aus Satz 5.30*

$$\int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} |f| \, d(\mu \otimes \lambda) = \int_{\mathbf{X}} \varphi_0 \, d\mu < \infty$$

und somit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}}(\mu \otimes \lambda)$.

(b) *Ist also eines der iterierten Integrale*

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\int_{\mathbf{Y}} |f(x,y)| \, d\lambda(y) \right) d\mu(x) \quad \textit{oder} \quad \int_{\mathbf{Y}} \left(\int_{\mathbf{X}} |f(x,y)| \, d\mu(x) \right) d\lambda(y)$$

endlich, so gilt

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\int_{\mathbf{Y}} f(x,y) \, d\lambda(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} f \, d(\mu \otimes \lambda) = \int_{\mathbf{Y}} \left(\int_{\mathbf{X}} f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\lambda(y) \, .$$

Beispiel 5.33 *Auf* $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = [0,1]$ *betrachten wir das Lebesgue-Maß* $\mu = \lambda$ *und*

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} [g_k(x) - g_{k+1}(x)] g_k(y)\,,$$

wobei $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig sowie, für* $\delta_n = 1 - \frac{1}{n}$ *,*

$$g_n \geq 0\,, \quad g_n(x) = 0 \text{ für } 0 \leq x \leq \delta_n \text{ und } \delta_{n+1} \leq x \leq 1\,, \quad \int_0^1 g_n(x)\,dx = 1\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Es gilt

$$f(x,y) = g_1(x)g_1(y) + \sum_{k=2}^{\infty} g_k(x)[g_k(y) - g_{k-1}(y)]\,.$$

Somit folgt einerseits

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 [g_k(x) - g_{k+1}(x)] g_k(y)\,dy = \sum_{k=1}^{\infty} [g_k(x) - g_{k+1}(x)] = g_1(x)\,,$$

also

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx = 1\,,$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x,y)\,dx &= \int_0^1 g_1(x)g_1(y)\,dx + \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^1 g_k(x)[g_k(y) - g_{k-1}(y)]\,dx \\ &= g_1(y) + \sum_{k=2}^{\infty} [g_k(y) - g_{k-1}(y)] = 0\,, \end{aligned}$$

also

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy = 0\,.$$

Der Satz 5.31 ist hier nicht anwendbar, weil für $(x,y) \in [\delta_m, \delta_{m+1} \times [\delta_n, \delta_{n+1}]$ *gilt*

$$f(x,y) = [g_m(x) - g_{m+1}(x)]] g_n(y) = \left\{ \begin{array}{ccc} g_n(x)g_n(y) & : & m = n \\ -g_{n+1}(x)g_n(y) & : & m = n-1 \\ 0 & : & \text{sonst} \end{array} \right\}$$

und somit

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|\,d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \iint_{[\delta_m, \delta_{m+1} \times [\delta_n, \delta_{n+1}]} |f(x,y)|\,d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n-1}^{n} 1 = \infty\,.$$

5.6 Die $\mathbf{L}^p$-Räume (Fortsetzung)

Wir gehen hier nochmal auf die in Kapitel 2 eingeführten Begriffe ein und vertiefen diese. Insbesondere geht es uns darum, die Vollständigkeit der $\mathbf{L}^p$-Räume zu zeigen, d.h., dass jede $\mathbf{L}^p$-Cauchyfolge einen Grenzwert in $\mathbf{L}^p$ besitzt. Im Weiteren seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ ein messbarer Raum und $1 \leq p < \infty$.

- Ist $f \in \mathcal{M}(\mu)$, so folgt für $a \in \mathbb{R}$

$$\{|f|^p > a\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{X} & : & a < 0 \\ \left\{|f| > a^{\frac{1}{p}}\right\} & : & a \geq 0 \end{array} \right\} \in \mathcal{R}\,,$$

also $|f|^p \in \mathcal{M}(\mu)$ (vgl. Bedingung (p) in Kapitel 2). Für $f \in \mathcal{M}(\mu)$ setzen wir

$$N_p(f) := \left(\int_{\mathbf{X}} |f|\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Die Menge der zur p-ten Potenz summierbaren Funktionen wird dann definiert also

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \{f \in \mathcal{M}(\mu) : N_p(f) < \infty\}\,.$$

Aus der Eigenschaft (I7) folgt, dass für $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^{p_2}(\mu)$ die Summe $f+g$ und das Produkt fg μ-f.ü. erklärt und endlich sind und zu messbaren Funktionen $f+g : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $fg : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden können. Im Weiteren verstehen wir $f+g$ und fg in diesem Sinne.

- Aus Aufgabe 2, 2. Übung ergeben sich (**Minkowski'sche Ungleichung**)

$$N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g) \quad \forall\, f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) \tag{5.6}$$

und (**Hölder'sche Ungleichung**)

$$N_1(fg) \leq N_p(f)N_q(g) \quad \forall\, f \in \mathcal{L}^p(\mu)\,,\ g \in \mathcal{L}^q(\mu\,,\ 1 < p < \infty\,,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,. \tag{5.7}$$

- Eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{L}^p(\mu)$ nennt man **im p-ten Mittel konvergent** gegen $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$ gilt. Im fall $p = 1$ spricht man von Konvergenz im Mittel, im Fall $p = 2$ von Konvergenz im quadratischen Mittel.

- Wir bemerken, dass aus (5.6) die Ungleichung

$$|N_p(f) - N_p(g)| \leq N_p(f \pm g) \quad \forall\, f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) \tag{5.8}$$

folgt.

Satz 5.34 (F. Riesz) *Sind $f_n, f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $f_n \longrightarrow f$ μ-f.ü., so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n) = N_p(f)$.*

Beweis. Die Notwendigkeit folgt uas (5.8). Wir beweisen die Hinlänglichkeit: Für $\alpha, \beta \geq 0$ ist $(\alpha+\beta)^p \leq (2\max\{\alpha,\beta\})^p = 2^p\,(\max\{\alpha,\beta\})^p \leq 2^p\,(\alpha^p + \beta^p)$, so dass $|\alpha-\beta|^p \leq 2^p\,(|\alpha|^p + |\beta|^p)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt. Wir setzen $g_n := 2^p\,(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$. Es folgt

$$g_n \geq 0\,,\ g_n \in \mathcal{L}^p(\mu) \quad \text{und} \quad g_n \longrightarrow 2^{p+1}|f|^p\ \mu\text{f.ü.}$$

Das Lemma von Fatou liefert

$$2^{p+1}\int_{\mathbf{X}} |f|^p\, d\mu = \int_{\mathbf{X}} \liminf g_n\, d\mu \leq \liminf \int_{\mathbf{X}} g_n\, d\mu = 2^{p+1}\int_{\mathbf{X}} |f|^p\, d\mu - \limsup \int_{\mathbf{X}} |f_n - f|^p\, d\mu\,,$$

also $\limsup \int_{\mathbf{X}} |f_n - f|^p\, d\mu \leq 0$, woraus das Gewünschte folgt. □

Lemma 5.35 *Für $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $f_n \ge 0$ gilt*

$$N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n)\,.$$

Beweis. Wir setzen $s_n := f_1 + \ldots + f_n$, Es folgt $N_p(s_n) \le \sum_{j=1}^{n} N_p(f_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} N_p(f_j)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus $s_n \uparrow \sum_{j=1}^{\infty} f_j$ und dem Satz von Beppo Levi folgt $\lim_{n\to\infty} N_p(s_n) = N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)$, woraus sich die Behauptung ergibt. □

Satz 5.36 (Lebesgue) *Es seien $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $f_n \longrightarrow f_0$ μ-f.ü. sowie $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $|f_n| \le g$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Funktion $f^* \in \mathcal{M}(\mu)$, so dass $f_n \longrightarrow f^*$ μ-f.ü. Ferner gilt $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $N_p(f_n - f) \longrightarrow 0$ für jedes $f \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $f_n \longrightarrow f$ μ-f.ü.*

Beweis. Es exsistiert eine Menge $A \in \mathcal{N}(\mu)$ (System der Mengen vom Maße Null) mit $f_n(x) \longrightarrow f_0(x)$ $\forall\, x \in \mathbf{X} \setminus A$, und es existiert eine Menge $B \in \mathcal{N}(\mu)$ mit $g(x) < \infty$ $\forall\, x \in \mathbf{X} \setminus B$. Wir setzen

$$f^*(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & : \quad x \in \mathbf{X} \setminus (A \cup B)\,, \\ 0 & : \quad x \in A \cup B\,. \end{cases}$$

Es folgt $f_n \longrightarrow f^* = \chi_{\mathbf{X}\setminus(A\cup B)} f_0 \in \mathcal{M}(\mu)$. Es seien nun $f_n \longrightarrow f$ μ-f.ü. unf $f \in \mathcal{M}(\mu)$. Es folgt $|f| \le g$ μ-f.ü. und somit $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Wir setzen $g_n := |f_n - f|^p$. Es ist dann $0 \le g_n \le (|f_n| + |f|)^p \le (g + |f|)^p =: h$, also $g_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Das Lemma von Fatou liefert

$$\int_{\mathbf{X}} \liminf (h - g_n)\, d\mu \le \liminf \int_{\mathbf{X}} (h - g_n)\, d\mu = \int_{\mathbf{X}} h\, d\mu - \limsup \in_{\mathbf{X}} g_n\, d\mu\,.$$

Aus $f_n \longrightarrow f$ μ-f.ü. folgt $g_n \longrightarrow 0$ μ-f.ü., also $h - g_n \longrightarrow h$ μ-f.ü. Damit ergibt sich

$$\int_{\mathbf{X}} h\, d\mu \le \int_{\mathbf{X}} h\, d\mu - \limsup \int_{\mathbf{X}} g_n\, d\mu$$

und somit $\limsup \int_{\mathbf{X}} g_n\, d\mu \le 0$, d.h., $\lim \int_{\mathbf{X}} g_n\, d\mu = 0$. □

Wir nennen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ eine **Cauchyfolge** in $\mathcal{L}^p(\mu)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $N_p(f_m - f_n) < \varepsilon$ für alle $m, n \ge n_0$ gilt.

Satz 5.37 *Ist $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p(\mu)$, so existiert eine Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $\lim_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$. Ferner existiert eine Teilfolge von $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, die μ-f.ü. gegen f konvergiert.*

Beweis. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n_k \in \mathbb{N} : n_k > n_{k-1}$ $(n_0 := 0)$ und $N_p(f_n - f_{n_k}) < 2^{-k}$ $\forall\, n \ge n_k$. Es folgt $N_p\left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right) < 2^{-k}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Wir setzen $g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ und $g := \sum_{k=1}^{n} |g_k|$. Damit gilt

$$N_p(g) \le \sum_{k=1}^{\infty} N_p(g_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} = 1\,,$$

also $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Somit ist $g(x) \in \mathbb{R}$ für μ-fast alle $x \in \mathbf{X}$, so dass $\sum_{k=1} infty$ μ-f.ü. konvergiert. Da $\sum_{j=1}^{k} g_j = f_{n_{k+1}} - f_{n_1}$, konvergiert auch f_{n_k} μ-f.ü. Außerdem gilt $\left|F_{n_{k+1}}\right| = |g_1 + \ldots + g_k + f_{n_1}| \le g + |f_{n-1}| \in \mathcal{L}^p(\mu)$, so dass nach Satz 5.36 $\lim\limits_{k\to\infty} N_p\left(f_{n_k} - f\right) = 0$ für ein $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $f_{n_k} \longrightarrow f$ μ-f.ü. gilt. Da $(f_n)_{n=1}^\infty$ Cauchyfolge ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$. □

Beispiel 5.38 *Wir betrachten auf $\mathbf{X} = \mathbb{R}$ das Lebesgue-Maß μ und definieren $f_n = \chi_{A_n}$ mit $A_{2^\ell+k} = \left[k2^{-\ell}, (k+1)2^{-\ell}\right)$, $\ell \in \mathbb{N}_0$, $k \in \left\{0, 1, \ldots, 2^\ell - 1\right\}$. Es folgt $\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \, d\mu = 2^{-\ell} \longrightarrow 0$ für $n = 2^\ell + k \longrightarrow \infty$, also $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $N_p(f_n) = N_p(f_n - 0) \longrightarrow 0$. Ist nun $x \in [0,1)$, so existiert für jedes $\ell \in \mathbb{N}_0$ genau ein $k \in \left\{0, 1, \ldots, 2^\ell - 1\right\}$ mit $x \in \left[k2^\ell, (k+1)2^\ell\right)$, d.h., $x \in A_{2^\ell+k}$, also $f_{2^\ell+k}(x) = 1$, aber*

$$\begin{cases} f_{2^\ell+k+1}(x) = 0 & : \quad k \in \left\{0, 1, \ldots, 2^\ell - 2\right\} , \\ f_{2^{\ell+1}}(x) = 0 & : \qquad k = 2^\ell - 1 , \end{cases}$$

so dass $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ für **kein** *$x \in [0,1)$ konvergiert. Man kann i. Allg. also nur auf die Konvergenz f.ü. einer Teilfolge schließen (vgl. Satz 5.37).*

Folgerung 5.39 *Sind $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ eine Cauchyfolge und $f_n \longrightarrow f$ μ-f.ü., so folgt $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $N_p(f_n - f) \longrightarrow 0$.*

Folgerung 5.40 *Aus $f_n, f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g_n, g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = \lim\limits_{n\to\infty} N_q(g_n - g) = 0$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} N_1(f_n g_n - fg) = 0$.*

Bemerkung 5.41 *Definiert man*

$$\mathbf{L}^p(\mu) := \{[f]_p := \{g \in \mathcal{L}^p(\mu) : g = f \ \ \mu\text{-f.ü.}\} : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\} ,$$

$\|[f]_p\|_{\mathbf{L}^p} := N_p(f)$ und $[f]_p + [g]_p := [f+g]_p$, $\alpha[f]_p := [\alpha f]_p$, so wird $\left(\mathbf{L}^p(\mu), \|.\|_p\right)$ zu einem normierten Raum. Satz 5.37 besagt nun, dass dieser Raum vollständig ist (jede Cauchyfolge ist konvergent), also ein sog. **Banachraum***.*

Es sei noch bemerkt, dass man auch für $p = \infty$ einen entsprechenden Raum betrachten kann, wenn man

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f \in \mathcal{M}(\mu) : \exists\, A \in \mathcal{N}(\mu) : \sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{X} \setminus A\} < \infty\}$$

und

$$N_\infty(f) := \inf\{\sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{X} \setminus A\} : A \in \mathcal{N}(\mu)\}$$

definiert.

5.7 Parameterintegrale

Im Weiteren seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ ein messbarer Raum und $(\mathbf{E}, d)$ ein metrischer Raum.

Satz 5.42 *Es sei* $f : \mathbf{X} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $f_p \in \mathcal{L}(\mu)\ \forall\, p \in \mathbf{E}$, *wobei* $f_p : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,p)$,

(b) $f_x : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto f(x,p)$ *ist stetig in* $p_0 \in \mathbf{E}\ \forall\, x \in \mathbf{X}$,

(c) $\exists\, h \in \mathcal{L}(\mu) : |f(x,p)| \le h(x)\ \forall\, (x,p) \in \mathbf{X} \times \mathbf{E}$.

Dann ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \int_{\mathbf{X}} f(x,p)\, d\mu(x)$$

stetig in p_0.

Beweis. Es sei $p_n \in \mathbf{E}$ mit $p_n \longrightarrow p_0$, d.h., $\lim_{n\to\infty} d(p_n,p_0) = 0$. Wir haben zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \varphi(p_n) = \varphi(p_0)$ gilt. Dazu setzen wir $f_n(x) := f(x,p_n)$. Es folgt aus (a) und (c) $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$, $|f_n| \le h$ und nach (b) $f_n \longrightarrow f_0$, wobei $f_0(x) = f(x,p_0)$. Aus dem Satz von Lebesgue folgt

$$\varphi(p_n) = \int_{\mathbf{X}} f(x,p_n)\, d\mu(x) = \int_{\mathbf{X}} f_n\, d\mu \longrightarrow \int_{\mathbf{X}} f_0\, d\mu = \varphi(p_0)\,.$$

□

Satz 5.43 *Es seien* $-\infty \le a < b \le \infty$ *und* $f : \mathbf{X} \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $f_p \in \mathcal{L}(\mu)\ \forall\, p \in (a,b)$,

(b) $f_x : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist differenzierbar,*

(c) $\exists\, h \in \mathcal{L}(\mu) : |f_x'(p)| = \left| \dfrac{\partial f(x,p)}{\partial p} \right| \le h(x)\ \forall (x,p) \in \mathbf{X} \times (a,b)$.

Dann ist die Funktion

$$\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \int_{\mathbf{X}} f(x,p)\, d\mu(x)$$

differenzierbar, und es gilt

$$\varphi'(p) = \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\, d\mu(x)\,.$$

Beweis. Es seien $p_0 \in (a,b)$ und $p_n \in (a,b)$ mit $p_n \ne p_0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $p_n \longrightarrow p_0$. Wir setzen

$$g_n(x) = \frac{f(x,p_n) - f(x,p_o)}{p_n - p_0}\,, \quad x \in \mathbf{X}\,.$$

Es folgt aus (a) $g_n \in \mathcal{L}(\mu)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und aus (b)

$$g_n(x) \longrightarrow \frac{\partial f(x,p_0)}{\partial p} =: g_0(x)\,, \quad x \in \mathbf{X}\,.$$

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$|g_n(x)| = \left| \frac{\partial f(x,\xi_n)}{\partial p} \right| \le h(x)\,, \quad x \in \mathbf{X}\,.$$

Der Satz von Lebesgue liefert $g_0 \in \mathcal{L}(\mu)$ und

$$\frac{\varphi(p_n) - \varphi(p_0)}{p_n - p_0} = \int_{\mathbf{X}} g_n\, d\mu \longrightarrow \int_{\mathbf{X}} g_0\, d\mu = \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial f(x,p_0)}{\partial p_0}\, d\mu(x)\,.$$

□

Index