Skript zur Vorlesung

Maßtheorie

WS 2017/2018

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] H. Belkner, S. Brehmer, *Lebesguesche Integrale*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1984.

[2] P. Junghanns, Analysis I/II, Vorlesungsskript 2013/14, www-user.tu-chemnitz.de/˜peju

[3] H. Michel, *Maß- und Integrationstheorie I*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[4] M. M. Rao, *Measure Theory and Integration*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2004.

[5] W. Rudin, *Reelle und komplexe Analysis*, Oldenburg Verlag, München, 1999.

Kapitel 1

Lebesgue-Integrale

Bezeichnungen:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ - Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ - Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
- $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ - Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$ - Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ - Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{C}$ - Menge der komplexen Zahlen

Wir erinnern an den Begriff der Riemann-integrierbaren Funktion und bezeichnen mit $\mathbf{R}[a,b]$ die Menge der über dem Intervall $[a,b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ (reellwertigen) Riemann-integrierbaren Funktionen (vgl. auch [2, Abschnitt 5.5]).

- Mit $f, g \in \mathbf{R}[a,b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gehören auch $\alpha f + \beta g$ und fg zu $\mathbf{R}[a,b]$. Insbesondere sind $\mathbf{R}[a,b]$ ein linearer Raum und das Riemann-Integral auf diesem Raum ein lineares Funktional.
- Ist $f \in \mathbf{R}[a,b]$ mit $f(x) \geq 0 \; \forall \, x \in [a,b]$, so gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- Aus $f \in \mathbf{R}[a,b]$ folgt auch $|f| \in \mathbf{R}[a,b]$ und
$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$
- Die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ der rationalen Zahlen, auch Dirichlet-Funktion genannt, gehört nicht zu $\mathbf{R}[a,b]$.
- Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ von Funktionen $f_n \in \mathbf{R}[a,b]$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen die Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, so folgt $f \in \mathbf{R}[a,b]$ und
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Wir erinnern auch an die Definition uneigentlicher Integrale, z.B.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} := \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2} \quad \text{oder} \quad \int_0^1 \ln x\,dx := \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \ln x\,dx\,.$$

1.1 Numerische Funktionen

Definition 1.1 *Die Menge* $\mathbb{R}^e = [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *heißt* **erweiterter Bereich der reellen Zahlen**. *Durch die Relationen* $-\infty < x < \infty \;\forall\, x \in \mathbb{R}$ *wird die Ordnungsrelation von* $\mathbb{R}$ *auf* $\mathbb{R}^e$ *fortgesetzt. Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gelten bzgl. Addition und Multiplikation folgende Regeln:*

(a) $x + \infty = \infty + x = \infty + \infty = \infty\,,\; x + (-\infty) = (-\infty) + x = (-\infty) + (-\infty) = -\infty\,,$

(b) $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \left\{ \begin{array}{ccc} \infty & : & x > 0 \\ 0 & : & x = 0 \\ -\infty & : & x < 0 \end{array} \right\},$

(c) $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty\,,\; \infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty\,,$

(d) $-(-\infty) = \infty\,,\; x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -(x \cdot \infty)\,,$

(e) $x - \infty := x + (-\infty)$ *und* $|\infty| = |-\infty| = \infty\,.$

Damit ist die Multiplikation auf $\mathbb{R}^e$ uneingeschränkt ausführbar, die Addition bis auf $x + y$ mit $x = -y = \infty$ und $x = -y = -\infty$. Im Weiteren sei $\mathbf{X}$ eine beliebige nichtleere Menge. Funktionen $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ nennen wir **numerische Funktionen**. Wir definieren die Funktion $|f|$ durch $|f|(x) := |f(x)|$ und, für zwei numerische Funktionen f, g,

$$(f \cup g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \quad (f \cap g)(x) := \min\{f(x), g(x)\}\,.$$

Der positive Teil f^+ und der negative Teil f^- von f sind dann gegeben durch $f^+ := f \cup 0$ und $f^- := -(f \cap 0) = (-f) \cup 0$. Offenbar gilt $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$. Wir schreiben $f \geq 0$, wenn $f = f^+$ gilt, und $f \leq g$, wenn $f(x) \leq g(x) \;\forall\, x \in \mathbf{X}$ gilt. (Ist $g - f$ erklärt, so ist $f \leq g$ äquivalent zu $g - f \geq 0$.)

1.2 Der Begriff des Integrals

Definition 1.2 *Eine Menge* $\mathcal{X}$ *reellwertiger Funktionen* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* **Vektorverband**, *wenn aus* $f, g \in \mathcal{X}$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *folgt* $\alpha f, f + g, |f| \in \mathcal{X}$.

Folgerung 1.3 *Ist* $\mathcal{X}$ *ein Vektorverband, so gilt mit* $f, g \in \mathcal{X}$ *auch* $f \cup g, f \cap g, f^+, f^- \in \mathcal{X}$.

Beispiel 1.4 *Die Menge* $\mathcal{X}^{(1)} := \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ *der stetigen Funktionen* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit kompaktem Träger bilden einen Vektorverband. (Man sagt, dass* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *einen kompakten Träger hat, wenn Zahlen* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *existieren, so dass* $x_1 = x_1(f) < x_2 = x_2(f)$ *und* $f(x) = 0$ $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus [x_1, x_2]$ *gilt.)*

Beispiel 1.5 *Die Menge* $\mathbf{R}_0(\mathbb{R})$ *der Riemann-integrierbaren Funktionen mit kompaktem Träger ist ein Vektorverband.*

Definition 1.6 *Ein auf einem Vektorverband* $\mathcal{X}$ *definiertes lineares Funktional* $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *nennen wir* **Integral** *auf* $\mathcal{X}$, *wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

(I1) $f \in \mathcal{X}\,,\; f \geq 0 \Rightarrow \mathcal{J}(f) \geq 0$ *(Positivität von* $\mathcal{J}$*),* (I2) $f, f_n \in \mathcal{X}$, $f_n \uparrow f \Rightarrow \mathcal{J}(f_n) \uparrow \mathcal{J}(f)$ (*Stetigkeit von unten*).

Dabei bedeutet $f_n \uparrow f$, *dass* $f_n \leq f_{n+1}\ \forall\, n$ (*isotone Folge*) *und* $\lim f_n(x) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbf{X}$ *gilt.*

Wegen der Linearität von $\mathcal{J}$ ist die Stetigkeit von unten äquivalent zur Stetigkeit von oben, ja sogar zur Nullstetigkeit von oben (d.h., $f_n \downarrow 0 \Rightarrow \mathcal{J}(f_n) \downarrow 0$).

Beispiel 1.7 *Als Funktional* $\mathcal{J}^{(1)} : \mathcal{X}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ (*vgl. Bsp. 1.4*) *wählen wir das Riemann-Integral. Dann ist dieses Funktional ein Integral gemäß Definition 1.6.*

Die im Folgenden zu betrachtenden Grenzwerte können aus $\mathbb{R}^e$ sein.

Satz 1.8 *Es seien* $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ein Integral,* $f, g \in \mathcal{X}$ *und* $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ *isotone Folgen von Funktionen aus* $\mathcal{X}$. *Dann gilt*

(a) $f \leq g \Rightarrow \mathcal{J}(f) \leq \mathcal{J}(g)$ (*Isotonie des Integrals*),

(b) $|\mathcal{J}(f)| \leq \mathcal{J}(|f|)\ \forall\, f \in \mathcal{X}$,

(c) $\lim f_n \geq 0 \Rightarrow \lim \mathcal{J}(f_n) \geq 0$,

(d) $\lim f_n \leq \lim g_n \Rightarrow \lim \mathcal{J}(f_n) \leq \lim \mathcal{J}(g_n)$,

(e) $\lim f_n = \lim g_n \Rightarrow \lim \mathcal{J}(f_n) = \lim \mathcal{J}(g_n)$.

1.3 Fortsetzung eines Integrals auf die isotone Hülle

Definition 1.9 *Man nennt*

$$\mathcal{X}^{\sigma} := \{F : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e : \exists\ (f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X} \text{ mit } f_n \uparrow F\}$$

die **isotone Hülle** *des Vektorverbandes* $\mathcal{X}$.

Beachte: $\mathcal{X}^{\sigma}$ ist i. Allg. kein Vektorverband.

Satz 1.10 *Aus* $(F_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}^{\sigma}$ *und* $F_n \uparrow F$ *folgt* $F \in \mathcal{X}^{\sigma}$.

Definition 1.11 *Für* $F \in \mathcal{X}^{\sigma}$, $f_n \in \mathcal{X}$ *und* $f_n \uparrow F$ *nennen wir* $\mathcal{J}^*(F) := \lim \mathcal{J}(f_n)$ **verallgemeinertes Integral** *von* F .

Nach Satz 1.8,(e) ist $\mathcal{J}^*(F)$ unabhängig von der Wahl der Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $f_n \uparrow F$. Für $f \in \mathcal{X}$ kann man $f_n = f\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $\mathcal{J}^*(f) = \mathcal{J}(f)\ \forall\, f \in \mathcal{X}$ gilt. Außerdem hat das verallgemeinerte Integral folgende Eigenschaften:

(V1) $\mathcal{J}^*(\alpha F) = \alpha \mathcal{J}^*(F)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, $F \in \mathcal{X}^{\sigma}$

(V2) $\mathcal{J}^*(F + G) = \mathcal{J}^*(F) + \mathcal{J}^*(G)$, $F, G \in \mathcal{X}^{\sigma}$

(V3) $\mathcal{J}^*(F \pm g) = \mathcal{J}^*(F) \pm \mathcal{J}^*(g)$, $F \in \mathcal{X}^{\sigma}$, $g \in \mathcal{X}$

(V4) $F \leq G \Rightarrow \mathcal{J}^*(F) \leq \mathcal{J}^*(G)$

Satz 1.12 *$\mathcal{J}^*$ ist auf $\mathcal{X}^\sigma$ stetig von unten.*

Beispiel 1.13 *Wir wählen $\mathbf{X}^{(2)} = \mathbb{N}_0$ und*

$$\mathcal{X}^{(2)} = \{f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : |\{k \in \mathbb{N}_0 : f(k) \neq 0\}| < \infty\} , \quad \mathcal{J}^{(2)}(f) := \sum_{k=0}^{\infty} f(k) .$$

Dann ist $\mathcal{J}^{(2)}$ ein Integral auf dem Vektorverband $\mathcal{X}^{(2)}$, und gilt

$$\mathcal{X}^{(2)\sigma} = \{F : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} : \exists\, k_0 \text{ mit } F(k) \geq 0 \ \forall\, k \geq k_0\} , \quad \mathcal{J}^{(2)*}(F) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) .$$

1.4 Lebesgue-Integrale

Definition 1.14 *Die Funktionen der Menge $\mathcal{X}_0^\sigma := \{F \in \mathcal{X}^\sigma : \mathcal{J}^*(F) < \infty\}$ nennt man* **Levi-Funktionen***. Das Integral $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt* **Lebesgue-Integral** *(kurz* **L-Integral***), wenn*

$$\{G : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}\} \cap \mathcal{X}_0^\sigma \subset \mathcal{X}$$

gilt. Man nennt dann das Tripel $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ einen **Integrationsraum***. Mit $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ bezeichnen wir die Menge von Funktionen*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{J}} := \{\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R} : \exists\, F \in \mathcal{X}_0^\sigma \text{ mit } \varphi(x) \neq F(x) \iff F(x) = \infty\} .$$

Wir nennen das Lebesgue-Integral $\mathcal{J}$ ein **vollständiges L-Integral***, wenn $\mathcal{M}_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{X}$ gilt.*

Wir betrachten die Beispiele 1.4 und 1.7 und bezeichnen für $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ mit $g_{ab} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion aus $\mathcal{X}^{(1)}$, die auf $[a-b, a]$ und $[a, a+b]$ linear ist und für die $g_{ab}(a) = 1$ sowie $g_{ab}(x) = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus [a-b, a+b]$ gilt. Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige Folge paarweise verschiedener reeller Zahlen, so setzen wir

$$f_n := \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{a_k, 2^{-j-k}} , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ ist isoton, so dass $F = \lim f_n$ wohldefiniert ist. Dabei gilt

$$\mathcal{J}^{(1)}(f_n) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{j+k}} = \sum_{j=1}^{n} 2^{-j} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} < 1 .$$

Also gilt $F \in \mathcal{X}_0^{(1)\sigma}$. Außerdem haben wir für $n \geq m$

$$f_n(a_m) \geq \sum_{j=1}^{n} 1 = n ,$$

so dass $F(a_m) = \infty \ \forall\, m \in \mathbb{N}$. Die Funktionen aus $\mathcal{M}_{\mathcal{J}^{(1)}}$ können in den Punkten a_m also beliebige Werte annehmen.

Fragestellung: Kann ein Integral $\mathcal{J}$ zu einem L-Integral bzw. zu einem vollständigen L-Integral $\widetilde{\mathcal{J}}$ auf einen Vektorverband $\widetilde{\mathcal{X}} \supset \mathcal{X}$ fortgesetzt werden?

Theorem 1.15 *Jedes Integral besitzt genau eine* **minimale** *Fortsetzung zu einem vollständigen L-Integral.*

Zum Beweis dieses Theorems benötigen wir die folgenden Lemmata 1.16-1.21.

Lemma 1.16 *Ist* $\widetilde{\mathcal{J}} : \widetilde{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine vollständige Fortsetzung des Integrals* $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, *so gilt*

$$L(\mathcal{J}) := \{\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R} : \exists\, F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma \text{ mit } \varphi + G = F\} \subset \widetilde{\mathcal{X}}\,.$$

Lemma 1.17 *Die in Lemma 1.16 definierte Menge* $L(\mathcal{J})$ *ist ein Vektorverband.*

Lemma 1.18 *Es existiert höchstens eine Fortsetzung* $\widetilde{\mathcal{J}}$ *von* $\mathcal{J}$ *zu einem Integral auf einen Vektorverband* $\widetilde{\mathcal{X}} \subset L(\mathcal{J})$.

Ausgehend von Lemma 1.18 und dessen Beweis definieren wir für $\varphi \in L(\mathcal{J})$

$$\mathcal{J}_L(\varphi) := \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G)\,,$$

wobei $\varphi + G = F$ und $F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$.

Lemma 1.19 *Die Definition von* $\mathcal{J}_L(\varphi)$ *ist korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl der* $F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$ *mit* $\varphi + G = F$.

Lemma 1.20 *Für jedes* $\varphi \in L(\mathcal{J})$ *und jedes* $\varepsilon > 0$ *existieren* $F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$ *mit* $\varphi + G = F$, $G \ge 0$ *und* $\mathcal{J}^*(G) < \varepsilon$.

Lemma 1.21 *Es sei* $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset L(\mathcal{J})$ *eine isotone Folge. Dann existieren für jedes* $\varepsilon > 0$ *solche* $F, G \in \mathcal{X}^\sigma$, *so dass* $G \ge 0$, $\mathcal{J}^*(G) < \varepsilon$ *sowie*

$$\lim_{n\to\infty} (\varphi_n + G) = F \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_L(\varphi_n) = \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G)$$

gilt.

Beweis von Theorem 1.15. Wir zeigen, dass $\mathcal{J}_L : L(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ein vollständiges L-Integral ist. Nach Lemma 1.18 ist diese Fortsetzung eindeutig und nach Lemma 1.16 minimal. Es seien $\varphi, \psi \in L(\mathcal{J})$ und $\varphi + G = F$, $\psi + E = D$ mit $D, E, F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$, sowie $\alpha \ge 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_L(-\varphi) = \mathcal{J}^*(G) - \mathcal{J}^*(F) = -\mathcal{J}_L(\varphi)\,,\\
&\mathcal{J}_L(\alpha\varphi) = \mathcal{J}^*(\alpha F) - \mathcal{J}^*(\alpha G) \overset{(V1)}{=} \alpha[\mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G)] = \alpha\mathcal{J}_L(\varphi)\,,\\
&\mathcal{J}_L(\varphi + \psi) \overset{(V2)}{=} \ldots = \mathcal{J}_L(\varphi) + \mathcal{J}_L(\psi)\,.
\end{aligned}$$

Außerdem folgt aus $\varphi \ge 0$ auch $F \ge G$ und somit nach (V4) $\mathcal{J}_L(\varphi) = \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G) \ge 0$. Somit ist $\mathcal{J}_L : L(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Integral, falls wir noch die Stetigkeit von unten zeigen können: Dazu seien $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset L(\mathcal{J})$ und $\varphi_n \uparrow \varphi \in L(\mathcal{J})$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig. Es folgt $\mathcal{J}_L(\varphi_n) \le \mathcal{J}_L(\varphi) < \infty$. Nach Lemma 1.21 existieren Funktionen $F, G \in \mathcal{X}^\sigma$ mit $G \ge 0$, $\mathcal{J}^*(G) < \varepsilon$, $\varphi + G = \lim \varphi_n + G = F$ und $\mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G) = \lim \mathcal{J}_L(\varphi_n) \in \mathbb{R}$. Also gilt $F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$ und somit

$$\mathcal{J}_L(\varphi) = \mathcal{J}^*(F) - \mathcal{J}^*(G) = \lim \mathcal{J}_L(\varphi_n)\,.$$

Es bleibt noch die Vollständigkeit von $\mathcal{J}_L$ zu zeigen, d.h. $\mathcal{M}_{\mathcal{J}_L} \subset L(\mathcal{J})$: Es sei $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{J}_L}$. Dann existiert ein $E \in L(\mathcal{J})_0^\sigma$, so dass $\varphi(x) \neq E(x)$ genau dann, wenn $E(x) = \infty$. Es gibt also eine Folge $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset L(\mathcal{J})$ mit $\varphi_n \uparrow E$, wobei $\lim \mathcal{J}_L(\varphi_n) < \infty$ gilt. Wie im vorhergehenden Schritt finden wir $F, G \in \mathcal{X}_0^\sigma$ mit $E + G = \lim \varphi_n + G = F$. Wegen $\varphi + E = 2E$ folgt daraus $\varphi + F + G = \varphi + E + 2G = 2(E + G) = 2F$, also $\varphi \in L(\mathcal{J})$. □

Wir betrachten Beispiel 1.13. Offenbar ist

$$\mathcal{X}_0^{(2)\sigma} = \left\{ f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=0}^\infty f(n) < \infty,\ f(n) \geq 0\ \forall\, n \geq n_0(f) \right\}.$$

Man kann zeigen, dass

$$L(\mathcal{J}^{(2)}) = \left\{ f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=0}^\infty |f(n)| < \infty \right\} =: \ell^1_{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_L^{(2)}(f) = \sum_{n=0}^\infty f(n)$$

gilt.

1.5 Grenzwertsätze. Mengen vom Maße Null

Im Weiteren sei $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum.

Satz 1.22 (Beppo Levi) *Seien $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X}$, $\varphi_n \uparrow \varphi$ oder $\varphi_n \downarrow \varphi$ und $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$. Ferner sei $(\mathcal{J}(\varphi_n))_{n=1}^\infty$ beschränkt. Dann gilt $\varphi \in \mathcal{X}$ und $\lim \mathcal{J}(\varphi_n) = \mathcal{J}(\varphi)$.*

Definition 1.23 *Unter dem System der* **messbaren Funktionen** *versteht man das kleinste Funktionensystem $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ numerischer Funktionen $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$, welches folgenden Bedingungen genügt:*

(m1) $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

(m2) $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *und, falls definiert,* $\varphi + \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

(m3) $(\varphi_n)_{n=0}^\infty \subset \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{n=0}^\infty \varphi_n := \sup\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\} \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

Das System $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ der messbaren Funktionen hat folgende Eigenschaften:

($\mathcal{M}$1) $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi^\pm, |\varphi| \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

($\mathcal{M}$2) $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi \cap \psi, \varphi \cup \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

($\mathcal{M}$3) $(\varphi_n)_{n=0}^\infty \subset \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \displaystyle\bigcap_{n=0}^\infty \varphi_n := \inf\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\}, \liminf \varphi_n, \limsup \varphi_n \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,

($\mathcal{M}$4) $\mathcal{M}(\mathcal{X}) = \{\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e : \exists\, (\varphi_n) \subset \mathcal{X} \text{ mit } \varphi_n \longrightarrow \varphi\}$.

Aus dem Beweisschritt (a) zur Eigenschaft ($\mathcal{M}$4) erhalten wir folgendes Lemma.

Lemma 1.24 *Für jedes $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ mit $\varphi \geq 0$ existiert eine Folge $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$ mit $\varphi_n \geq 0$ und $\varphi_n \uparrow \varphi$.*

Dieses Lemma besagt, dass besagt $\mathcal{M}(\mathcal{X}) \cap \{\varphi \geq 0\} \subset \mathcal{X}^\sigma$ gilt. Nach ($\mathcal{M}1$) sind mit φ auch $\varphi^\pm$ Elemente von $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ und somit von $\mathcal{X}^\sigma$, so dass $\mathcal{J}^*(\varphi^\pm)$ erklärt sind und wir folgende Definition geben können.

Definition 1.25 *Wir sagen, dass das* **Integral** *von $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$* **existiert** *bzw. dass φ* **integrierbar** *ist, wenn wenigstens eines der verallgemeinerten Integrale $\mathcal{J}^*(\varphi^\pm)$ endlich ist, und schreiben dann*

$$\int \varphi(x)\,dx := \mathcal{J}^*(\varphi^+) - \mathcal{J}^*(\varphi^-)\,.$$

Bemerkung Ist $\varphi \in \mathcal{X}^\sigma$, so ist φ integrierbar, und es gilt $\displaystyle\int \varphi(x)\,dx = \mathcal{J}^*(\varphi)$, denn aus $\varphi_n \in \mathcal{X}$ und $\varphi_n \uparrow \varphi$ folgt $\varphi_n^- \downarrow \varphi^-$ und $0 \leq \mathcal{J}(\varphi_n^-) \leq \mathcal{J}(\varphi_0^-) < \infty$, so dass $\varphi^- \in \mathcal{X}$ nach Satz 1.22. Es folgt $\displaystyle\int \varphi(x) = \mathcal{J}^*(\varphi^+) - \mathcal{J}^*(\varphi^-) \overset{\text{(V3)}}{=} \mathcal{J}^*(\varphi^+ - \varphi^-) = \mathcal{J}^*(\varphi)$. Außerdem haben wir $\displaystyle\int |\varphi(x)|\,dx = \mathcal{J}^*(\varphi^+) + \mathcal{J}^*(\varphi^-)$ für alle $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

Lemma 1.26 *Aus $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\displaystyle\int |\varphi(x)|\,dx < \infty$ folgt $\varphi \in \mathcal{X}$.*

Satz 1.27 (Lemma von Fatou) *Sind $(\varphi_n) \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $\varphi_n \geq 0$, so gilt*

$$\int \liminf \varphi_n(x)\,dx \leq \liminf \int \varphi_n(x)\,dx\,.$$

Der folgende Satz ist bekannt unter dem Namen **Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz**.

Satz 1.28 *Es seien $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$, $\varphi_n \longrightarrow \varphi$, $|\varphi_n| \leq \psi$ und $\psi \in \mathcal{X}$. Dann gilt $\varphi \in \mathcal{X}$ und*

$$\mathcal{J}(\varphi) = \lim \mathcal{J}(\varphi_n)\,.$$

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ bezeichnen wir mit $\chi_A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ die **charakteristische Funktion** (erster Art)

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & : \quad x \in A\,, \\ 0 & : \quad x \in \mathbf{X} \setminus A\,, \end{cases}$$

der Menge A. Dagegen wird

$$\omega_A(x) := \begin{cases} \infty & : \quad x \in A\,, \\ 0 & : \quad x \in \mathbf{X} \setminus A\,, \end{cases}$$

die **charakteristische Funktion zweiter Art** der Menge A genannt.

Eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ heißt vom **Maße Null**, wenn $\omega_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $\displaystyle\int \omega_A(x)\,dx = 0$ gilt. Das System der Mengen vom Maße Null bezeichnen wir mit $\mathcal{N}(\mathcal{J})$.

Definition 1.29 *Ist eine Aussage $P(x)$ für $x \in \mathbf{X} \setminus A$ mit $A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ wahr, so sagt man „$P(x)$ gilt fast überall (f.ü.) auf $\mathbf{X}$“.*

Lemma 1.30 *Aus $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\varphi \geq 0$ und $\displaystyle\int \varphi(x)\,dx = 0$ folgt $\varphi = 0$ f.ü.*

Lemma 1.31 *Für* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *mit* $\left|\int \varphi(x)\,dx\right| < \infty$ *gilt* $|\varphi| < \infty$ *f.ü.*

Im Weiteren besitze der Integrationsraum $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ die folgende Eigenschaft:

(E) Für alle $A \subset \mathbf{X}$ folgt aus $\omega_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ auch $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

In diesem Fall ist $A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ äquivalent dazu, dass $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $\mathcal{J}^*(\chi_A) = 0$ gilt. Aus Letzterem folgt nämlich $n\chi_A \uparrow \omega_A$ und $\mathcal{J}^*(\omega_A) = \lim n\mathcal{J}^*(\chi_A) = 0$.

Die folgenden zwei Sätze liefern je eine Variante des **Satzes von Beppo Levi** (Satz 1.22) und des **Satzes von Lebesgue** (Satz 1.28)

Satz 1.32 *Es seien* $(\varphi_n) \subset \mathcal{X}$, $\varphi_n \uparrow \varphi$ *oder* $\varphi_n \downarrow \varphi$ *f.ü. und* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. *Dann folgt*

$$\int \varphi(x)\,dx = \lim \int \varphi_n(x)\,dx\,.$$

Satz 1.33 *Sind* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $(\varphi_n) \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\varphi, \varphi_n : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $|\varphi_n| \le \psi$ *f.ü,* $\psi \in \mathcal{X}$ *und* $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ *f.ü., so gilt auch* $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{X}$ *und* $\mathcal{J}(\varphi) = \lim \mathcal{J}(\varphi_n)$.

1.6 Übungsaufgaben

1. Man zeige, dass $\mathcal{X}$ genau dann ein Vektorverband ist, wenn aus $f, g \in \mathcal{X}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt $\alpha f, f+g, f \cap 0 \in \mathcal{X}$.

2. Man beweise, dass die Menge $\mathcal{X}^{(3)}$ der stetigen und stückweise linearen Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit kompakten Träger einen Vektorverband bilden.

3. Mit $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge der Zerlegungen der reellen Achse,

$$\mathcal{Z}(\mathbb{R}) := \left\{\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} : -\infty < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \infty,\, n \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

   Eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{Z}(\mathbb{R})$ nennen wir **zulässig** für $f \in \mathcal{X}^{(3)}$, wenn $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [x_0, x_n]$ gilt und wenn f auf jedem Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$ linear ist. Wir definieren auf $\mathcal{X}^{(3)}$ das Funktional $\mathcal{J}^{(3)}$ wie folgt. Sind $f \in \mathcal{X}^{(3)}$ und $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ zulässig für f, so setzen wir

$$\mathcal{J}^{(3)}(f) := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\left[f(x_{j-1}) + f(x_j)\right](x_j - x_{j-1})\,.$$

   Man zeige, dass $\mathcal{J}^{(3)} : \mathcal{X}^{(3)} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Integral ist.

4. Man beweise:

   (a) $F, G \in \mathcal{X}^\sigma$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \ge 0 \Rightarrow F+G, F \cup G, F \cap G, \alpha F \in \mathcal{X}^\sigma$

   (b) $F \in \mathcal{X}^\sigma$, $F \ge 0 \Rightarrow \exists\ (f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X} : f_n \ge 0,\ f_n \uparrow F$

5. Man zeige, dass das verallgemeinerte Integral $\mathcal{J}^* : \mathcal{X}^\sigma \longrightarrow \mathbb{R}^e$ (vgl. Def. 1.11) die Eigenschaften (V1) – (V4) besitzt.

6. Man beweise, dass für $F_k \in \mathcal{X}^\sigma$ mit $F_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\mathcal{J}^*\left(\sum_{k=0}^{\infty} F_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{J}^*(F_k)\,.$$
Hinweis: Man verwende Satz 1.12.

7. Man zeige:
   (a) $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi^+, \varphi^-, |\varphi| \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,
   (b) $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \varphi \cup \psi, \varphi \cap \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$,
   (c) $(\varphi_n)_{n=0}^\infty \subset \mathcal{M}(\mathcal{X}) \Rightarrow \bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi_n := \inf\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, $\liminf \varphi_n$, $\limsup \varphi_n \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

8. Man zeige, dass eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ genau dann zu $\mathcal{N}(\mathcal{J})$ gehört, wenn ein $F \in \mathcal{X}_0^\sigma$ mit $A = \{x \in \mathbf{X} : F(x) = \infty\}$ existiert.

9. Der Integrationsraum $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ besitze die Eigenschaft (E). Man zeige, dass $\mathcal{N}(\mathcal{J})$ ein σ-Ring ist, d.h., dass aus $A, B \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ und $A_n \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$, $n \in \mathbb{N}$ folgt $A \setminus B \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$.

10. Der Integrationsraum $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ besitze die Eigenschaft (E). Man zeige, aus $A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ und $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt $\int \varphi(x)\chi_A(x)\,dx = 0$ und, falls $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, auch $\varphi\chi_A \in \mathcal{X}$.

    Zusatz: Man zeige, dass auch $\varphi(1-\chi_A) \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ gilt und dass, falls $\int \varphi(x)\,dx$ existiert,
$$\int \varphi(x)\,dx = \int \varphi(x)[1-\chi_A(x)]\,dx\,.$$

Kapitel 2

Die Räume $\mathbf{L}^p(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$

Es sei im Weiteren $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum mit der Eigenschaft (E) und der folgenden Eigenschaft:

(p) Für $1 \le p < \infty$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt $\varphi\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $|\varphi|^p \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

2.1 Definitionen und einfachste Eigenschaften

Auf $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$\varphi \sim \psi \iff \exists\, A \in \mathcal{N}(\mathcal{J}) : \{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) \neq \psi(x)\} \subset A\,, \tag{2.1}$$

was natürlich äquivalent zu $\varphi = \psi$ f.ü. ist. Ferner erklären wir auf der Menge $\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) = \{[\varphi]_\sim : \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})\}$ der entsprechenden Äquivalenzklassen

$$\big|[\varphi]_\sim\big|^p := [|\varphi|^p]_\sim\ ,\ \lambda[\varphi]_\sim := [\lambda\varphi]_\sim\,,\ [\varphi]_\sim \cdot [\psi]_\sim := [\varphi\psi]_\sim \tag{2.2}$$

und, falls Repräsentanten φ und ψ existieren, für die $\varphi + \psi$ f.ü. definiert ist,

$$[\varphi]_\sim + [\psi]_\sim := [(\varphi(1-\chi_A) + \psi(1-\chi_A)]_\sim\,, \tag{2.3}$$

wobei $\{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) + \psi(x)$ ist nicht definiert$\} \subset A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$. Man beachte dabei, dass unter Verwendung von Aufgabe 10, Abschnitt 1.6 folgt $\varphi(1-\chi_A), \psi(1-\chi_A) \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. Ferner seien

$$[\varphi]_\sim \le [\psi]_\sim \iff \exists\, A \in \mathcal{N}(\mathcal{J}) : \{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) > \psi(x)\} \subset A \tag{2.4}$$

und

$$\int [\varphi]_\sim\, dx := \int \varphi(x)\, dx\,, \tag{2.5}$$

falls dieses Integral existiert. Mit $\mathbf{L}^p = \mathbf{L}^p(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$, $1 \le p < \infty$ bezeichnen wir die Menge

$$\mathbf{L}^p = \left\{ [\varphi]_\sim \in \widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{X}) : \int \big|[\varphi]_\sim\big|^p dx < \infty \right\}.$$

Wir beschränken uns im Weiteren auf den Fall $p = 2$ und schreiben für $[\varphi]_\sim \in \mathbf{L}^2$ einfach $\varphi \in \mathbf{L}^2$.

Satz 2.1 $\mathbf{L}^2$ *ist ein linearer Raum, und auf* $\mathbf{L}^2$ *kann man das* **innere Produkt** (*auch* **Skalarprodukt** *genannt*)

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int \varphi(x)\psi(x)\, dx$$

erklären, d.h., es gilt für alle $\varphi, \psi, \zeta \in \mathbf{L}^2$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$

(S1) $\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$ *und* $(\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0)$,

(S2) $\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle$,

(S3) $\langle \lambda\varphi, \psi \rangle = \lambda \langle \varphi, \psi \rangle$,

(S4) $\langle \varphi + \psi, \zeta \rangle = \langle \varphi, \zeta \rangle + \langle \psi, \zeta \rangle$.

Folgerung 2.2 *Der Raum* $\left(\mathbf{L}^2, \|.\|\right)$ *mit*

$$\|\varphi\| := \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle} = \sqrt{\int |\varphi(x)|^2 \, dx}$$

ist ein **normierter Raum**, *d.h., folgende Axiome sind erfüllt:*

(N1) $\|\varphi\| \geq 0 \quad \forall \, \varphi \in \mathbf{L}^2$ *und* $\|\varphi\| = 0 \iff \varphi = 0$,

(N2) $\|\lambda\varphi\| = |\lambda| \, \|\varphi\| \quad \forall \, \varphi \in \mathbf{L}^2, \, \forall \, \lambda \in \mathbb{R}$,

(N3) $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\| \quad \forall \, \varphi, \psi \in \mathbf{L}^2$ (*Dreiecksungleichung*).

Außerdem gilt die **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$| \langle \varphi, \psi \rangle | \leq \|\varphi\| \, \|\psi\| \quad \forall \, \varphi, \psi \in \mathbf{L}^2 . \tag{2.6}$$

Bemerkung 2.3 *Die Räume* $\left(\mathbf{L}^p, \|.\|_p\right)$ *mit*

$$\|\varphi\|_p := \left(\int |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

sind für $1 \leq p < \infty$ *normierte Räume. Dabei gewinnt man die entsprechende Dreiecksungleichung* (N3) *aus der* **Hölder'schen Ungleichung**

$$\left| \int \varphi(x)\psi(x) \, dx \right| \leq \left(\int |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |\psi(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} , \tag{2.7}$$

die für alle $\varphi \in \mathbf{L}^p$ *und* $\psi \in \mathbf{L}^q$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt und die im Fall* $p = q = 2$ *die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung* (2.6) *liefert.*

2.2 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass durch (2.1) eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}(\mathcal{X})$ definiert wird.

2. Zeigen Sie, dass die Definitionen (2.2), (2.3), (2.4) und (2.5) korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten aus den Äquivalenzklassen, sind.

3. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Es seien a_{kn} $(k, n \in \mathbb{N}_0)$ reelle Zahlen mit den Eigenschaften

   $$\sup \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |a_{kn}| : k \in \mathbb{N}_0 \right\} < \infty \quad \text{und} \quad a_{kn} \uparrow b_n \ (k \to \infty) \ \forall \, n \in \mathbb{N}_0 .$$

   Dann gilt

   $$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n .$$

(b) Es seien a_{kn} $(k, n \in \mathbb{N}_0)$ reelle Zahlen mit den Eigenschaften

$$\lim_{k\to\infty} a_{kn} = b_n \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0\,, \quad |a_{kn}| \le c_n \;\forall\, k, n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty\,.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,.$$

4. Wir betrachten den Integrationsraum $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ mit $\mathbf{X} = \mathbb{N}_0$,

$$\mathcal{X} = L\left(\mathcal{J}^{(2)}\right) = \left\{ f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < \infty \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{J}(f) = \mathcal{J}_L^{(2)}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

(vgl. Abschnitt 1.4). Beschreiben Sie die zugehörigen Räume $\mathbf{L}^p$, $1 \le p < \infty$.

5. Es seien $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ die Ungleichung

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\,.$$

gilt und leiten Sie daraus die Hölder'sche Ungleichung (2.7) ab.

(b) Zeigen Sie, dass $\left(\mathbf{L}^p, \|.\|_p\right)$ ein normierter Raum ist (vgl. Bem. 2.3).

Kapitel 3

Das System der messbaren Mengen

3.1 Definitionen und Eigenschaften

Es sei $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum. Eine Menge $A \subset \mathbf{X}$ nennen wir **Integrationsbereich**, wenn aus $\varphi \in \mathcal{X}$ stets $\varphi\chi_A \in \mathcal{X}$ folgt. Die Menge aller Integrationsbereiche in $\mathbf{X}$ bezeichnen wir mit $\mathbf{I}(\mathcal{J})$. Wegen $\varphi\chi_A = \varphi^+\chi_A - \varphi^-\chi_A$ ist $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ offenbar äquivalent dazu, dass aus $\varphi \in \mathcal{X}$ und $\varphi \geq 0$ folgt $\varphi\chi_A \in \mathcal{X}$. Für $\varphi \in \mathcal{X}$ und $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ definieren wir

$$\int_A \varphi(x)\, dx := \mathcal{J}(\varphi\chi_A)\,.$$

Lemma 3.1 *Aus $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ und $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt $\varphi\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$.*

Damit können wir für $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ das Integral

$$\int_A \varphi(x)\, dx := \int \varphi^+(x)\chi_A(x)\, dx - \int \varphi^-(x)\chi_A(x)\, dx$$

erklären, falls wenigstens eines der Integrale auf der echten Seite endlich ist.

Ein System $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ von Teilmengen der Menge $\mathbf{X}$ heißt **Ring**, wenn die Axiome

(R1) $\emptyset \in \mathcal{R}$,

(R2) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$

erfüllt sind. Der Ring $\mathcal{R}$ wird **Algebra** genannt, wenn zusätzlich $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$ gilt. Ein Ring (eine Algebra) $\mathcal{R}$ heißt **σ-Ring** (**σ-Algebra**), wenn

(R3) $A_n \in \mathcal{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$

zutrifft.

Satz 3.2 *Das System $\mathbf{I}(\mathcal{J})$ ist eine σ-Algebra.*

Im Weiteren schreiben wir z.B. für $\{x \in \mathbf{X} : \varphi(x) > \psi(x)\}$ kurz $\{\varphi > \psi\}$.

Satz 3.3 *Aus $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt $\{\varphi > \psi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$.*

Folgerung 3.4 *Unter Verwendung der Sätze 3.2 und 3.3 folgt, dass auch die Mengen* $\{\varphi \geq \psi\} = \mathbf{X} \setminus \{\psi > \varphi\}$, $\{\varphi \neq \psi\} = \{\varphi > \psi\} \cup \{\psi > \varphi\}$ *und* $\{\varphi = \psi\} = \mathbf{X} \setminus \{\varphi \neq \psi\})$ *zu* $\mathbf{I}(\mathcal{J})$ *gehören, falls* $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *vorausgesetzt wird.*

Eine Menge $A \subset \mathbf{X}$ nennen wir Grenzwert der Folge $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ (in Zeichen: $A = \lim A_n$), wenn

$$\liminf A_n := \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty A_k = \limsup A_n := \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty A_k = A$$

gilt. Man beachte, dass aus $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{I}(\mathcal{J})$ und $A = \lim A_n$ folgt $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ (vgl. Satz 3.2). Der folgende Satz zeigt, dass das Integral stetig bezüglich des Integrationsbereiches ist.

Satz 3.5 *Aus* $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{I}(\mathcal{J})$, $\lim A_n = A$ *und* $\varphi \in \mathcal{X}$ *folgt*

$$\int_A \varphi(x)\, dx = \lim \int_{A_n} \varphi(x)\, dx\,.$$

Satz 3.6 (σ-Additivität des Integrals) *Es seien* $A_n \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$, $A_n \cap A_k = \emptyset$ *für* $n \neq k$, $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ *und* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *integrierbar. Dann gilt*

$$\int_A \varphi(x)\, dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} \varphi(x)\, dx\,.$$

Definition 3.7 *Eine Menge* $A \subset \mathbf{X}$ *heißt* ($\mathcal{X}$-)**messbar**, *wenn* $\chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ *gilt. Die Menge aller messbaren Mengen* $A \subset \mathbf{X}$ *bezeichnen wir mit* $\mathbf{M}(\mathcal{J})$. *Unter dem* ($\mathcal{J}$-)**Maß** *einer Menge* $A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ *verstehen wir die Zahl*

$$\mu(A) := \int \chi_A(x)\, dx\,.$$

Die Eigenschaft (E) aus Abschnitt 1.5 besagt, dass $\mathcal{N}(\mathcal{J}) \subset \mathbf{M}(\mathcal{J})$ gilt.

Satz 3.8 $\mathbf{M}(\mathcal{J})$ *ist ein* σ*-Ring.*

Lemma 3.9 *Es gilt* $\mathbf{M}(\mathcal{J}) \subset \mathbf{I}(\mathcal{J})$.

Satz 3.10 (σ-Additivität des Maßes μ) *Sind* $A_n \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ *paarweise durchschnittsfremde Mengen, so gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)\,.$$

3.2 Konvergenz dem Maße nach

Satz 3.11 (Tschebyscheff'sche Ungleichung) *Es seien* $A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$, $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $\varphi \geq 0$ *und* $\varepsilon > 0$. *Dann gilt*

$$\mu\left(\{\varphi \geq \varepsilon\} \cap A\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_A \varphi(x)\, dx\,.$$

Bemerkungen

1. Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$, so folgt

$$\{\varphi \geq \psi\} \cap A\,,\ \{\varphi > \psi\} \cap A\,,\ \{\varphi \neq \psi\} \cap A\,,\ \{\varphi = \psi\} \cap A \in \mathbf{M}(\mathcal{J})\,,$$

denn nach Folgerung 3.4 gilt $\{\varphi \geq \psi\} \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$, so dass nach Lemma 3.1 $\chi_{\{\varphi \geq \psi\} \cap A} = \chi_A \cdot \chi_{\{\varphi \geq \psi\}} \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ folgt. Diese Überlegung wurde bereits im Beweis von Satz 3.11 verwendet und wird auch in den folgenden Betrachtungen genutzt.

2. Im Fall $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ ist die Bedingung (E) erfüllt, denn $\chi_A = \omega_A \cap \chi_{\mathbf{X}}$. Außerdem gilt $\mathbf{M}(\mathcal{J}) = \mathbf{I}(\mathcal{J})$, denn aus $A \in \mathbf{I}(\mathcal{J})$ folgt mit Lemma 3.1 $\chi_A = \chi_{\mathbf{X}} \cdot \chi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$. Man beachte zusätzlich Lemma 3.9.

3. Im Fall $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ ist also jede Menge $\{\varphi > a\}$ messbar, falls $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $a \in \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt für eine Funktion $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ sogar Folgendes:

$$\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X}) \iff \{\varphi > a\} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})\ \forall\, a \in \mathbb{R}$$

Definition 3.12 *Es sei $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$. Eine Folge $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(\mathcal{X})$ nennen wir* **konvergent dem Maße nach** *gegen $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, wenn $\varphi_n - \varphi$ für alle hinreichend großen n erklärt ist und*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{|\varphi_n - \varphi| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

gilt.

Folgerung 3.13 *Es gelte $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$. Aus $\varphi_n \in \mathbf{L}^1$ und $\|\varphi_n\|_1 \longrightarrow 0$ folgt dann unter Verwendung der Tschebyscheff'schen Ungleichung die Konvergenz von φ_n gegen Null dem Maße nach.*

Satz 3.14 (Egorov) *Es seien $\mathbf{X} \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$, $\mu(\mathbf{X}) < \infty$, $\varphi_n \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$, $|\varphi_n| < \infty$ f.ü. und $\varphi_n \longrightarrow 0$ f.ü. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\mathbf{X}_0 \in \mathbf{M}(\mathcal{J})$ mit*

$$\mu(\mathbf{X}_0) \leq \varepsilon \quad \textit{und} \quad \sup_{x \in \mathbf{X}\setminus\mathbf{X}_0} |\varphi_n(x)| \longrightarrow 0\,.$$

3.3 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass ein Ring bezüglich des Durchschnitts endlich vieler Mengen und ein σ-Ring bezüglich des Durchschnitts abzählbar vieler Mengen abgeschlossen sind.

2. Es seien $\mathbf{X}$ eine unendliche Menge und $\mathcal{R}_0$ die Familie aller endlichen Teilmengen von $\mathbf{X}$. Man beschreibe den kleinsten σ-Ring $\mathcal{R}$, der $\mathcal{R}_0$ umfasst.

3. Es sei $\{\mathcal{R}_k : k \in \mathbb{I}\}$ eine Familie von σ-Ringen $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$. Man zeige:

   (a) $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{I}} \mathcal{R}_k$ ist ein σ-Ring.

   (b) $\mathcal{R}_{k_1} \cup \mathcal{R}_{k_2}$ ist i.Allg. kein Ring.

   (c) Sind $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ und $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}_k$ ein Ring, aber i.Allg. kein σ-Ring.

4. Es seien A_n , B_n , Teilmengen einer Menge $\mathbf{X}$. Man beweise:
   (a) Es gilt $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
   (b) Gilt $A_n \subset A_{n+1}$, $B_{n+1} \subset B_n$, $n \in \mathbb{N}$, so existieren $A = \lim A_n$ bzw. $B = \lim B_n$ und sind gleich $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bzw. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.
   (**Z**) Unter den Voraussetzungen von (b) seien $C_{2n-1} := A_n$ und $C_{2n} := B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass dann $\liminf C_n = A \cap B$ gilt und dass der Grenzwert $\lim C_n$ genau dann existiert, wenn $A = B$ ist.

5. Wir gehen von den Beispielen 1.4 und 1.7 mit dem Vektorverband $\mathcal{X}^{(1)} = \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ und dem Riemann-Integral $\mathcal{J}^{(1)} : \mathcal{X}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ aus und erweitern dieses Integral zu dem vollständigen Lebesgue-Integral $\mathcal{J}_L^{(1)} : L(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $L(\mathbb{R}) := L\left(\mathcal{J}^{(1)}\right)$ (vgl. Abschnitt 1.4). Für $\varphi \in L(\mathbb{R})$ schreiben wir
$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx \quad \text{statt} \quad \mathcal{J}_L^{(1)}(\varphi) \,.$$
Diese Schreibweise verwenden wir auch für integrierbare Funktionen $\varphi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}))$. Im Weiteren betrachten wir also den Integrationsraum $\left(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}}\right)$. Beweisen Sie:
   (a) Jedes Intervall der reellen Achse ist messbar, und das Maß eines Intervalls ist gleich dessen Länge, z.B. $\mu([a,b)) = b - a$, $-\infty < a < b \leq \infty$.
   (b) Für $-\infty < a < b < \infty$ und jede stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt
$$(R)\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[a,b]}(x)\, dx \,,$$
   wobei $(R)\int_a^b$ das Riemann-Integral bezeichnet.
   (c) Wir betrachten den Integrationsraum $\left([0,1], L([0,1]), \int_0^1\right)$ als Einschränkung des Integrationsraumes $\left(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}}\right)$ auf das Intervall $[0,1]$. Man zeige, dass die Funktionen $f_n \in L([0,1])$ genau dann dem Maße nach gegen $g \in L([0,1])$ konvergieren, wenn
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{|f_n(x) - g(x)|}{1 + |f_n(x) - g(x)|}\, dx = 0$$
   gilt.

Kapitel 4

Das Lebesgue-Integral im $\mathbb{R}^n$

4.1 Erster Zugang

Wie in Übungsaufgabe 5, Abschnitt 3.3 gehen wir auch hier von den Beispielen 1.4 und 1.7 mit dem Vektorverband $\mathcal{X}^{(1)} = \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ und dem Riemann-Integral $\mathcal{J}^{(1)} : \mathcal{X}^{(1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ aus und erweitern dieses Integral zu dem vollständigen Lebesgue-Integral $\mathcal{J}_L^{(1)} : L(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $L(\mathbb{R}) := L\left(\mathcal{J}^{(1)}\right)$ (vgl. Abschnitt 1.4). Für $\varphi \in L(\mathbb{R})$ schreiben wir

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx \quad \text{statt} \quad \mathcal{J}_L^{(1)}(\varphi)\,.$$

Diese Schreibweise verwenden wir auch für integrierbare Funktionen $\varphi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}))$. Damit ist uns der Integrationsraum $\left(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}}\right)$ gegeben.

Mit $\mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir die Menge der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Für einen Vektor $x = \left[\ \xi_k\ \right]_{k=1}^n$ sei mit $|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2}$ seine Euklidische Norm bezeichnet.

Satz 4.1 *Sind $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})$ und*

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t,x)\, dt\,,$$

so folgt $g \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

Die Aussage des Satzes 4.1 können wir iterieren und erhalten, dass für $f \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$ das Funktional

$$\mathcal{J}^{(n)}(f) := \int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} f(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n \tag{4.1}$$

wohldefiniert ist. Das Funktional $\mathcal{J}^{(n)} : \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ erweist sich als Integral.

Definition 4.2 *Das von $\mathcal{J}^{(n)} : \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ erzeugte vollständige L-Integral nennen wir* **Lebesgue'sches Integral** *über $\mathbb{R}^n$ (vgl. Abschnitt 1.4). Den zugehörigen Vektorverband bezeichnen wir mit $L(\mathbb{R}^n)$ und das Integral mit $\int_{\mathbb{R}^n}$. Für $\varphi \in L(\mathbb{R}^n)$ schreiben wir*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d(\xi_1, \ldots, \xi_n)\,.$$

Diese Schreibweise verwenden wir auch für integrierbare Funktionen $\varphi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$.

Damit ist uns also der Integrationsraum $\left(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n}\right)$ gegeben.

Satz 4.3 *Seien $\varphi \in L(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in L(\mathbb{R}^m)$ und $\rho(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$. Dann gilt $\rho \in L(\mathbb{R}^{n+m})$ und*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} \rho(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^m} \psi(y)\, dy\,.$$

Für die bzgl. $\int_{\mathbb{R}^n}$ messbaren Mengen verwenden wir statt $\mathbf{M}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\right)$ die Bezeichnung $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$.

Folgerung 4.4 *Mit $A \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$ und $B \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^m)$ folgt $A \times B \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^{n+m})$.*

Diese Folgerung zeigt zusammen mit Übungsaufgabe 5, Abschnitt 3.3, dass z.B. jedes Parallelepiped $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ wie auch $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ messbar und sein Maß gleich $(b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$ ist.

Folgerung 4.5 *Es gilt $\mathbb{R}^n \in \mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$, so dass nach den Bemerkungen im Abschnitt 3.2 der Integrationsraum $\left(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n), \int_{\mathbb{R}^n}\right)$ die Eigenschaft* (E) *besitzt. Außerdem ist $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n) = \mathbf{I}(\mathbb{R}^n) := \mathbf{I}(\int_{\mathbb{R}^n})$, und eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^e$ ist genau dann messbar, wenn jede Menge $\{\varphi > a\}$, $a \in \mathbb{R}$ messbar ist.*

Da jede offene Menge als Vereinigung höchstens abzählbar vieler Würfel darstellbar ist, folgt aus Satz 3.2 die Messbarkeit jeder offenen und auch jeder abgeschlossenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Der folgende Satz 4.8 charakterisiert die Messbarkeit einer Menge mittels offener und abgeschlossener Mengen. Zur Vorbereitung seines Beweises dienen das folgende Lemma und seine Folgerung.

Lemma 4.6 *Es sei $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum. Das Integral $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann vollständig, wenn aus $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $|\varphi| \le \psi$ und $\int \psi(x)\, dx = 0$ folgt $\varphi \in \mathcal{X}$.*

Folgerung 4.7 *Ist $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ ein Integrationsraum mit vollständigem Integral, so folgt aus $B \subset A \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$ stets $B \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$.*

Satz 4.8 *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gehört genau dann zu $\mathbf{M}(\mathbb{R}^n)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $A_o \subset \mathbb{R}^n$ und eine abgeschlossene Menge $A_c \subset \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $A_c \subset A \subset A_o$ und $\mu(A_o \setminus A_c) < \varepsilon$ gilt.*

Der folgende Satz zeigt, dass in der vorliegenden Situation die Voraussetzung (p) aus Kapitel 2 erfüllt ist.

Satz 4.9 *Aus $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$ und $1 \le p < \infty$ folgt $\varphi\psi \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$ und $|\varphi|^p \in \mathcal{M}(L(\mathbb{R}^n))$.*

4.2 Zweiter Zugang

Ausgehend von den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnittes beschreiben wir hier einen anderen Zugang zur Maß- und Integrationstheorie über dem $\mathbb{R}^n$ im Lebesgue'schen Sinne:

(a) Für ein n-dimensionales "Intervall" $I = I^1 \times \ldots \times I^n$, wobei I^j ein beliebiges Intervall (offen, abgeschlossen oder halboffen) der reellen Achse $\mathbb{R}$ ist, setzen wir

$$\mu(I) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)\,.$$

(b) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, so lässt sich diese als Vereinigung höchstens abzählbar vieler paarweise disjunkter Intervalle $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ darstellen. Wir definieren $\mu(A) := \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k)$. Dabei ist $\mu(A)$ unabhängig von der gewählten Darstellung.

(c) Wir nennen eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $A_0 \subset \mathbb{R}^n$ und eine abgeschlossene Menge $A_c \subset \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $A_c \subset A \subset A_o$ und $\mu(A_o \setminus A_c) < \varepsilon$ gilt, und setzen $\mu(A) := \inf\{\mu(A_o) : A \subset A_o \subset \mathbb{R}^n,\ A_o\text{ - offen}\}$.

(d) Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^e$ nennen wir messbar, wenn die Menge $\{\varphi > a\}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ messbar ist.

(e) Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem Beweis der letzten Bemerkung im Abschnitt 3.2:

$$m \in \mathbb{N}, \quad A_{km} = \left\{ \frac{k-1}{2^m} < \varphi \le \frac{k}{2^m} \right\}, \ k = 1, \ldots, m2^m, \quad A_m = \{\varphi > m\}.$$

Ist $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^e$ messbar, wobei $\varphi \ge 0$, so definieren wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx := \lim_{m\to\infty} \left[m \cdot \mu(A_m) + \sum_{k=1}^{m2^m} \frac{k-1}{2^m}\, \mu(A_{km}) \right].$$

(f) Sind $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^e$ messbar und eines der Integrale $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^+(x)\, dx$ oder $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^-(x)\, dx$ endlich, so setzen wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^+(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^-(x)\, dx.$$

4.3 Iterierte Integrale

Ist $A \subset \mathbb{R}$ eine nicht Lebesgue-messbare Menge, so ist nach Folgerung 4.7 $B = A \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge vom ($\mathbb{R}^2$)-Lebesgue-Maß Null. Man kann aber nicht einfach

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_B(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A(x)\chi_{\{0\}}(y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{0\}}(y) \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x)\, dx\, dy$$

schreiben, weil das Integral $\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x)\, dx$ nicht erklärt ist. Wir formulieren dazu den Satz 4.10 und machen folgende Annahmen:

1. Es seien $(\mathbf{X}_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{J}_1)$ und $(\mathbf{X}_2, \mathcal{X}_2, \mathcal{J}_2)$ zwei Integrationsräume mit vollständigem Integral.
2. Es existiere ein Vektorverband $\mathcal{X}$ von Funktionen $\varphi : \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, für die

$$\mathcal{J}(\varphi) := \int_{\mathbf{X}_2} \left(\int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2 \in \mathbb{R}$$

existiert, wobei $\int_{\mathbf{X}_k} \psi(x_k)\, dx_k := \mathcal{J}_k(\psi)$, d.h. insbesondere, dass $\int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1, .)\, dx_1 \in \mathcal{X}_2$ $\forall\, \varphi \in \mathcal{X}$ gilt. Dann ist $\mathcal{J} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Integral, welches zu einem vollständigen L-Integral

$\mathcal{J}_L$ auf dem Vektorverband $L(\mathcal{J})$ fortgesetzt werden kann. Also ist $(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2, L(\mathcal{J}), \mathcal{J}_L)$ ein Integrationsraum mit vollständigem Integral, welches wir auch in der Form

$$\int \varphi(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2)$$

schreiben.

Satz 4.10 *Sei* $\varphi \in \mathcal{M}(L(\mathcal{J}))$ *, und es existiere* $\int \varphi(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2)$ *. Dann gilt:*

(a) *Für* $\mathcal{J}_2$*-fast alle* $x_2 \in \mathbf{X}_2$ *existiert* $\varphi^*(x_2) := \int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1, x_2)\, dx_1$.

(b) *Man kann* φ^* *zu einer* $\mathcal{J}_2$*-messbaren Funktion* $\varphi^* : \mathbf{X}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^e$ *fortsetzen. Wir haben also* $\varphi^* \in \mathcal{M}(\mathcal{X}_2)$.

(c) *Es ist*

$$\int \varphi(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2) = \int_{\mathbf{X}_2} \int_{\mathbf{X}_1} \varphi(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 := \int_{\mathbf{X}_2} \varphi^*(x_2)\, dx_2$$

unabhängig von der in (b) *gewählten Fortsetzung.*

4.4 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass das in Abschnitt 4.3, Punkt 2 mit $\mathcal{J}$ bezeichnete Funktional ein Integral auf $\mathcal{X}$ ist.

2. Zeigen Sie, dass $\mathbf{C}_0(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorverband ist und durch (4.1) ein Integral definiert wird.

3. Zeigen Sie, dass jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ als Vereinigung höchstens abzählbar vieler abgeschlossener Quadrate darstellbar ist.

Kapitel 5

Maßräume

5.1 Maße und Prämaße

Definition 5.1 *Es seien* $\mathbf{X}$ *eine beliebige nichtleere Menge und* $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ *ein* σ*-Ring. Eine nichtnegative* σ*-additive Mengenfunktion* $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ *mit* $\mu(\emptyset) = 0$ *heißt* **Maß** *und* $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ *wird* **Maßraum** *genannt. Den* σ*-Ring* $\mathcal{R}$ *nennt man dann das* **System der** μ**-messbaren Mengen**. *Man sagt, dass der Maßraum* $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ *ein* **messbarer Raum** *ist, wenn* $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$ *gilt.*

Im Kapitel 3 haben wir gesehen, dass man mittels eines Integrationsraumes $(\mathbf{X}, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ einen Maßraum $(\mathbf{X}, \mathbf{M}(\mathcal{J}), \mu)$ erzeugen kann. Im Weiteren lernen wir die Möglichkeit kennen, aus einem sogenannten Prämaß ein Maß zu konstruieren.

Definition 5.2 *Eine nichtnegative Mengenfunktion* $\mu : \mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^e$ *auf einem Ring* $\mathcal{R}_0$ *heißt* **Prämaß**, *wenn* $\mu(\emptyset) = 0$ *gilt und wenn aus* $A, A_n \in \mathcal{R}_0$, $A_n \cap A_k = \emptyset$ *für* $n \neq k$ *und* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *die Gleichung* $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *folgt (bedingte* σ*-Additivität).*

Ist $\mu : \mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^e$ ein Prämaß, so definieren wir für alle $A \subset \mathbf{X}$ mittels

$$\mu^*(A) := \left\{ \begin{array}{c} \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{R}_0,\, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}, \\ \infty, \text{ falls keine solche Überdeckung von } A \text{ existiert,} \end{array} \right\}$$

das sogenannte **äußere Maß**. Eigenschaften des äußeren Maßes sind

(A1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(A2) $B \subset A \subset \mathbf{X} \Rightarrow \mu^*(B) \le \mu^*(A)$,

(A3) $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \subset \mathbf{X} \Rightarrow \mu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$,

(A4) $\mu^*(A) = \mu(A) \;\; \forall\, A \in \mathcal{R}_0$.

Lemma 5.3 *Für alle* $A \in \mathcal{R}_0$ *gilt*

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A) \quad \forall\, M \subset \mathbf{X}.$$

Definition 5.4 *Eine Menge $A \subset \mathbf{X}$ heißt* μ^***-messbar** *(nach Caratheodory), wenn*

$$\mu^*(M) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \setminus A) \quad \forall\, M \subset \mathbf{X}$$

gilt.

Das System aller μ^*-messbaren Mengen $A \subset \mathbf{X}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}_0^*$.

Lemma 5.5 *Aus $A \subset \mathbf{X}$ und $\mu^*(A) = 0$ folgt $A \in \mathcal{R}_0^*$.*

Satz 5.6 *Die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{R}_0^* \longrightarrow \mathbb{R}^e$, $A \mapsto \mu^*(A)$ ist ein Maß.*

Definition 5.7 *Sind $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ ein messbarer Raum und $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ eine numerische Funktion, so heißt diese Funktion* μ**-messbar**, *wenn $\{f > a\} \in \mathcal{R}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. Das System aller μ-messbaren Funktionen $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\mu)$.*

Die Bedingung $\{f > a\} \in \mathcal{R}\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ in Definition 5.7 ist äquivalent zu $\{f \geq a\} \in \mathcal{R}\ \forall\, a \in \mathbb{R}$, zu $\{f < a\} \in \mathcal{R}\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ und auch zu $\{f \leq a\} \in \mathcal{R}\ \forall\, a \in \mathbb{R}$ (vgl. Bemerkungen im Abschnitt 3.2).

Satz 5.8 *Für einen messbaren Raum $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ gilt:*

(a) *Aus $f \in \mathcal{M}(\mu)$ folgt $|f| \in \mathcal{M}(\mu)$.*

(b) *Aus $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}(\mu)$ folgt $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n \in \mathcal{M}(\mu)$.*

(c) *Sind $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f, g \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbf{X}$, so folgt $h \in \mathcal{M}(\mu)$, wobei $h(x) := F(f(x), g(x))$.*

Aus den Aussagen (a) und (c) des Satzes 5.8 ergibt sich, dass $\mathcal{X} := \{f \in \mathcal{M}(\mu) : f(\mathbf{X}) \subset \mathbb{R}\}$ ein Vektorverband ist.

Definition 5.9 *Eine Funktion $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt* **einfache Funktion** *oder* **Treppenfunktion**, *wenn $f(\mathbf{X})$ endlich ist. Die Menge aller messbaren einfachen Funktionen $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_e(\mu)$.*

Offenbar lässt sich jede Funktion $f \in \mathcal{M}_e(\mu)$ auf eindeutige Weise in der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^m \gamma_k \chi_{E_k}(x)$$

schreiben, wobei $m = m(f) \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \in \mathbb{R}$, $\gamma_k \neq \gamma_j$ für $j \neq k$ und $E_k \in \mathcal{R}$ mit $E_k \cap E_j = \emptyset$ für $j \neq k$ und $\displaystyle\bigcup_{k=1}^m E_k = \mathbf{X}$. Diese Darstellung einer μ-messbaren und einfachen Funktion werden wir im Weiteren immer wieder benutzen.

Definition 5.10 *Für $f = \displaystyle\sum_{k=1}^m \gamma_k \chi_{E_k} \in \mathcal{M}_e(\mu)$, $f \geq 0$ und $E \in \mathcal{R}$ definieren wir*

$$\int_E f\, d\mu := \sum_{k=1}^m \gamma_k \mu(E \cap E_k) \quad \forall\, E \in \mathcal{R}.$$

Sind $f \in \mathcal{M}(\mu)$, $f \geq 0$ und $E \in \mathcal{R}$, so definieren wir

$$\int_E f\,d\mu := \sup\left\{\int_E s\,d\mu : s \in \mathcal{M}_e(\mu),\, 0 \leq s \leq f\right\}.$$

Sind $f \in \mathcal{M}(\mu)$ und eines der beiden Integrale $\displaystyle\int_E f^{\pm}\,d\mu$ endlich, so setzen wir

$$\int_E f\,d\mu := \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu\,.$$

Unter der Menge $\mathcal{L}_E(\mu)$ der bezüglich μ auf E **summierbaren Funktionen** *verstehen wir*

$$\mathcal{L}_E(\mu) := \left\{f \in \mathcal{M}(\mu) : \left|\int_E f\,d\mu\right| < \infty\right\}.$$

Eigenschaften dieses Integralbegriffes:

(I1) $f, g \in \mathcal{M}(\mu)$, $0 \leq f \leq g$, $E \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; \int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$
Dabei genügt es $f(x) \leq g(x)$ für $x \in E$ vorauszusetzen!

(I2) $A, E \in \mathcal{R}$, $A \subset E$, $f \in \mathcal{M}(\mu)$, $f \geq 0 \;\Rightarrow\; \int_A f\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu$

(I3) $f \in \mathcal{M}(\mu)$, $m \leq f(x) \leq M \;\forall x \in E \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; m\,\mu(E) \leq \int_E f\,d\mu \leq M\,\mu(E)$

(I4) $f \in \mathcal{M}(\mu)$, $f \geq 0$, $E \in \mathcal{R}$:

$$\int_E f\,d\mu = 0 \iff \mu\left(E \cap \{f > 0\}\right) = 0 \qquad \text{(vgl. Lemma 1.30)}$$

Satz 5.11 *Es sei $f \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $f \geq 0$. Für $A \in \mathcal{R}$ definieren wir $\Phi(A) := \int_A f\,d\mu$. Dann ist $\Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ ein Maß (vgl. auch Satz 3.6).*

Folgerung 5.12 *Für $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$ ist die in Satz 5.11 definierte Mengenfunktion $\Phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ σ-additiv.*

5.2 Grenzwertsätze

Satz 5.13 (Beppo Levi) *Es seien $f_n \in \mathcal{M}(\mu)$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$, $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ und $E \in \mathcal{R}$. Dann gilt*

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu\,.$$

(I5) Für $f, g \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $f \geq 0$, $g \geq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{R}$ gilt

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu \quad \text{und} \quad \int_E (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu\,.$$

(I6) Aus $f, g \in \mathcal{L}_E(\mu)$ mit $f, g : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu \quad \text{und} \quad \int_E (\alpha f)\,d\mu = \alpha \int_E f\,d\mu\,.$$

(I7) Aus $f \in \mathcal{L}_E(\mu)$ folgt $\mu\left(E \cap \{|f| = \infty\}\right) = 0$.

Lemma 5.14 (Fatou) *Sind $E \in \mathcal{R}$, $f_n \in \mathcal{M}(\mu)$ und $f_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, so gilt*

$$\int_E \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int_E f_n \, d\mu .$$

Satz 5.15 (Lebesgue) *Aus $E \in \mathcal{R}$, $f_n, f \in \mathcal{M}(\mu)$, $f = \lim f_n$ und aus der Existenz einer Funktion $g \in \mathcal{L}_E(\mu)$ mit $|f_n| \leq g \; \forall\, n \in \mathbb{N}$ folgt $f_n, f \in \mathcal{L}_E(\mu)$ und*

$$\lim \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu .$$

5.3 Zerlegung σ-additiver Mengenfunktionen

Es sei wieder $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ ein messbarer Raum. Im Weiteren werden wir von einer σ-additiven Mengenfunktion $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ stets $\nu(\emptyset) = 0$ fordern.

Definition 5.16 *Man nennt eine σ-additive Mengenfunktion ν* **absolut stetig** *bezüglich μ (in Zeichen: $\nu \ll \mu$), wenn aus $E \in \mathcal{R}$ und $\mu(E) = 0$ folgt $\nu(E) = 0$. Man sagt, dass ν auf $A \in \mathcal{R}$* **konzentriert** *ist, wenn $\nu(E) = 0$ für alle $E \in \mathcal{R}$ mit $A \cap E = \emptyset$ gilt. Sind $\nu_1, \nu_2 : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ σ-additiv, so nennen wir ν_1 und ν_2* **zueinander singulär** *(in Zeichen: $\nu_1 \perp \nu_2$), wenn Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$ existieren, so dass $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ gilt und ν_1 auf A_1 sowie ν_2 auf A_2 konzentriert sind.*

Offenbar ist eine σ-additive Mengenfunktion $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann auf $A \in \mathbb{R}$ konzentriert, wenn $\nu(E) = \nu(A \cap E)$ für alle $E \in \mathcal{R}$ gilt.

Sind $\nu_1 \perp \nu_2$ und ν_j auf A_j mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ konzentriert, so folgt $\nu_1(A_2) = \nu(A_1 \cap A_2) = 0$ und $\nu_2(A_1) = \nu(A_2 \cap A_1) = 0$.

Folgerung 5.17 *Für σ-additive Mengenfunktionen $\nu, \nu_1, \nu_2 : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gilt:*

(a) $\nu_1 \perp \mu$, $\nu_2 \perp \mu \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 \perp \mu$

(b) $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_2 \ll \mu \Rightarrow \nu_1 + \nu_2 \ll \mu$

(c) $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_2 \perp \mu \Rightarrow \nu_1 \perp \nu_2$

(d) $\nu \ll \mu$, $\nu \perp \mu \Rightarrow \nu \equiv 0$

Wir nennen μ ein **σ-endliches Maß**, wenn Mengen $A_n \in \mathcal{R}$ existieren, so dass $\mathbf{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lemma 5.18 *Ist das Maß $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ σ-endlich, so existiert eine Funktion $\omega \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$ mit $0 < \omega(x) < 1$, $x \in \mathbf{X}$.*

Satz 5.19 (Lebesgue-Radon-Nikodym) *Es seien das Maß $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ σ-endlich und $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ σ-additiv. Dann existieren eindeutig bestimmte σ-additive Mengenfunktionen $\nu_a : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\nu_s : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$\nu = \nu_a + \nu_s , \quad \nu_a \ll \mu \quad \text{und} \quad \nu_s \perp \mu .$$

Es gibt eine μ-f.ü. eindeutig bestimmte Funktion $h \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$, so dass

$$\nu_a(E) = \int_E h\, d\mu \quad \forall\, E \in \mathcal{R}$$

gilt.

Satz 5.20 *Es seien $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ eine σ-Algebra und $\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ σ-additiv mit $\eta(\emptyset) = 0$. Dann ist*

$$\eta^+ : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^e\,,\ E \mapsto \sup\{\eta(A) : A \in \mathcal{R},\, A \subset E\}$$

ein Maß auf $\mathcal{R}$. Gilt $\eta(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$, so gilt dies auch für η^+.

Im Weiteren sei $\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ σ-additiv. Dann ist auch $\eta^- : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \mapsto \eta^+(E) - \eta(E)$ ein Maß. Man nennt η^+ und η^- die **positive** bzw. **negative Variation** und $\eta = \eta^+ - \eta^-$ die **Jordan-Zerlegung** von η. Das Maß $|\eta| : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \mapsto \eta^+(E) + \eta^-(E)$ heißt **Totalvariation** von η.

Satz 5.21 (Zerlegungssatz von Hahn) *Es sei $\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ σ-additiv. Dann existieren Mengen $\mathbf{X}^\pm \in \mathcal{R}$ mit $\mathbf{X}^+ \cap \mathbf{X}^- = \emptyset$, $\mathbf{X}^+ \cup \mathbf{X}^- = \mathbf{X}$ und*

$$\eta^+(E) = \eta(E \cap \mathbf{X}^+)\,,\ \eta^-(E) = -\eta(E \cap \mathbf{X}^-) \quad \forall\, E \in \mathcal{R}\,.$$

5.4 Übungsaufgaben

1. Man zeige, das für ein Prämaß $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty]$ gilt:

$$A_n \in \mathcal{R}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

   (Z) Es seien $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ die Familie aller Mengen, die höchstens abzählbar oder deren Komplemente höchstens abzählbar sind, und $\alpha \in [0, \infty]$. Wir definieren

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & : \quad A \text{ endlich}\,, \\ \alpha & : \quad A \text{ unendlich}\,. \end{cases}$$

   Man zeige, dass nur für $\alpha = 0$ die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß ist.

2. Es seien $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ eine additive Mengenfunktion, d.h.,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{R} : A \cap B = \emptyset\,.$$

   Man zeige, dass $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ genau dann ein Prämaß ist, wenn aus $A_n \in \mathcal{A}$ und $A_n \supset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\lim A_n = \emptyset$ folgt $\lim \mu(A_n) = 0$.

(Z) Unter den Voraussetzungen von Aufgabe 2 zeige man, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ ist ein Prämaß.

   (b) $A_n \in \mathcal{R}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $A := \lim A_n \in \mathcal{R} \implies \lim \mu(A_n) = \mu(A)$ (Stet. von unten)

   (c) $A_n \in \mathcal{R}$, $A_n \supset A_{n+1}$, $A := \lim A_n \in \mathcal{R} \implies \lim \mu(A_n) = \mu(A)$ (Stet. von oben)

3. Zeigen Sie, dass für σ-additive Mengenfunktionen $\nu, \nu_1, \nu_2 : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:
   (a) Ist ν konzentriert auf $A \in \mathcal{R}$, so auch $|\nu|$.
   (b) $\nu_1 \perp \nu_2 \Rightarrow |\nu_1| \perp |\nu_2|$
   (c) $\nu \ll \mu \Rightarrow |\nu| \ll \mu$
4. Man zeige, dass $\nu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann bezüglich μ absolut stetig ist, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|\nu|(E) < \varepsilon$ für alle $E \in \mathcal{R}$ mit $\mu(E) < \delta$ gilt.
5. Man zeige: Sind $\eta : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\eta_1, \eta_2 : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ σ-additiv mit $\eta = \eta_1 - \eta_2$, so gilt $\eta_1 \geq \eta^+$ und $\eta_2 \geq \eta^-$.

5.5 Produktmaße. Der Satz von Fubini

Auch ein geordnetes Paar $(\mathbf{X}, \mathcal{R})$ aus einer nichtleeren Menge $\mathbf{X}$ und einer σ-Algebra $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ nennen wir **messbaren Raum**. Das entsprechende System der **messbaren Funktionen** bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\mathcal{R})$, d.h.

$$\mathcal{M}(\mathcal{R}) := \{f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e : \{f > a\} \in \mathcal{R} \ \forall\, a \in \mathbb{R}\} \,.$$

Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R})$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S})$ zwei messbare Räume. Eine Menge $A \times B$ mit $A \in \mathcal{R}$ und $B \in \mathcal{S}$ nennen wir Rechteck. Mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ bezeichnen wir das System der **Elementarmengen**

$$\mathcal{E} := \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} R_k : R_k\text{-Rechteck},\ R_k \cap R_j = \emptyset\, (j \neq k),\ n \in \mathbb{N} \right\} .$$

Lemma 5.22 *$\mathcal{E}$ ist eine Algebra.*

Eine Möglichkeit, ausgehend von zwei Maßen μ und λ auf $\mathcal{R}$ bzw. $\mathcal{S}$ ein Produktmaß zu konstruieren, besteht nun darin, auf der Algebra $\mathcal{E}$ ein Prämaß mittels $\eta(A \times B) = \mu(a)\lambda(B)$ zu erklären und unter Verwendung der η^*-Messbarkeit nach Caratheodory fortzusetzen (vgl. Definition 5.4 und Satz 5.6). Wir beschreiben im Folgenden ein anderes Vorgehen.

Definition 5.23 *Unter $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ verstehen wir die kleinste σ-Algebra, die das System $\mathcal{R} \times \mathcal{S} = \{A \times B : A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{S}\}$ umfasst. Für $E \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ und $x \in \mathbf{X}$ bzw. $y \in \mathbf{Y}$ definieren wir den x-Schnitt E_x bzw. den y-Schnitt E^y durch*

$$E_x := \{y \in \mathbf{Y} : (x, y) \in E\} \quad \text{bzw.} \quad E^y := \{x \in \mathbf{X} : (x, y) \in E\} \,.$$

Lemma 5.24 *Aus $E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ folgt $E_x \in \mathcal{S}\ \forall\, x \in \mathbf{X}$ und $E^y \in \mathcal{R}\ \forall\, y \in \mathbf{Y}$.*

Sind $f : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}^e$ eine numerische Funktion und $x \in \mathbf{X}$ bzw. $y \in \mathbf{Y}$, so bezeichnen wir mit f_x bzw. f^y die Funktionen

$$f_x : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}^e,\ y \mapsto f(x, y) \quad \text{und} \quad f^y : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e,\ x \mapsto f(x, y) \,.$$

Lemma 5.25 *Aus $f \in \mathcal{M}(\mathcal{R} \otimes \mathcal{S})$ folgt*

$$f_x \in \mathcal{M}(\mathcal{S})\ \ \forall\, x \in \mathbf{X} \quad \textit{und} \quad f^y \in \mathcal{M}(\mathcal{R})\ \ \forall\, y \in \mathbf{Y} \,.$$

Definition 5.26 *Eine Mengensystem $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ nennt man* **monoton abgeschlossen***, wenn aus $A_n, B_n \in \mathcal{F}$ und $A_n \subset A_{n+1}, B_n \supset B_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, folgt*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \quad \textit{und} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F} \,.$$

Lemma 5.27 *Die σ-Algebra $\mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ ist das kleinste monoton abgeschlossene Mengensystem, welches das System $\mathcal{E}$ der Elementarmengen umfasst.*

Satz 5.28 *Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S}, \lambda)$ messbare Räume mit σ-endlichen Maßen μ und λ . Definieren wir für $E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$*

$$\varphi_E : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}^e,\ x \mapsto \lambda(E_x) \quad \textit{und} \quad \psi_E : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}^e,\ y \mapsto \mu(E^y)\,,$$

so gilt $\varphi_E \in \mathcal{M}(\mu)$, $\psi_E \in \mathcal{M}(\lambda)$ und

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi_E \, d\mu = \int_{\mathbf{Y}} \psi_E \, d\lambda \,.$$

Definition 5.29 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 5.28 definieren wir für $E \in \mathcal{R} \otimes \mathcal{S}$ das Maß*

$$(\mu \otimes \lambda)(E) := \int_{\mathbf{X}} \lambda(E_x) \, d\mu = \int_{\mathbf{Y}} \mu(E^y) \, d\lambda \,.$$

Durch Definition 5.29 wird tatsächlich ein Maß erklärt. Dieses ist auch σ-endlich.

Satz 5.30 *Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S}, \lambda)$ messbare Räume mit σ-endlichen Maßen μ und λ sowie $f \in \mathcal{M}(\mu \otimes \lambda) = \mathcal{M}(\mathcal{R} \otimes \mathcal{S})$ mit $f \geq 0$. Definieren wir*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbf{Y}} f_x \, d\lambda\,,\ x \in \mathbf{X} \quad \textit{und} \quad \psi(y) = \int_{\mathbf{X}} f^y \, d\mu\,,\ y \in \mathbf{Y}\,, \tag{5.1}$$

so gilt $\varphi \in \mathcal{M}(\mu)$, $\psi \in \mathcal{M}(\lambda)$ und

$$\int_{\mathbf{X}} \varphi \, d\mu = \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} f \, d(\mu \otimes \lambda) = \int_{\mathbf{Y}} \psi \, d\lambda \,. \tag{5.2}$$

Satz 5.31 (Fubini) *Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S}, \lambda)$ messbare Räume mit σ-endlichen Maßen μ und λ sowie $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}}(\mu \otimes \lambda)$. Dann gilt $f_x \in \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}(\lambda)$ für fast alle $x \in \mathbf{X}$ und $f^y \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$ für fast alle $y \in \mathbf{Y}$. Damit sind $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ aus (5.1) f.ü. erklärt und können zu messbaren Funktionen $\varphi : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\psi : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Dabei gilt (unabhängig von dieser Fortsetzung) $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mu)$ und $\psi \in \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}(\lambda)$ sowie (5.2).*

Folgerung 5.32 *Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{S}, \lambda)$ messbare Räume mit σ-endlichen Maßen μ und λ sowie $f \in \mathcal{M}(\mu \otimes \lambda)$.*

(a) *Ist $\int_{\mathbf{X}} \varphi_0 \, d\mu < \infty$, wobei $\varphi_0(x) = \int_{\mathbf{Y}} (|f|)_x \, d\lambda$, so folgt aus Satz 5.30*

$$\int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} |f| \, d(\mu \otimes \lambda) = \int_{\mathbf{X}} \varphi_0 \, d\mu < \infty$$

und somit $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}}(\mu \otimes \lambda)$.

(b) *Ist also eines der iterierten Integrale*

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\int_{\mathbf{Y}} |f(x,y)| \, d\lambda(y) \right) d\mu(x) \quad \text{oder} \quad \int_{\mathbf{Y}} \left(\int_{\mathbf{X}} |f(x,y)| \, d\mu(x) \right) d\lambda(y)$$

endlich, so gilt

$$\int_{\mathbf{X}} \left(\int_{\mathbf{Y}} f(x,y) \, d\lambda(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbf{X}\times\mathbf{Y}} f \, d(\mu \otimes \lambda) = \int_{\mathbf{Y}} \left(\int_{\mathbf{X}} f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\lambda(y) \, .$$

Beispiel 5.33 *Auf* $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = [0,1]$ *betrachten wir das Lebesgue-Maß* $\mu = \lambda$ *und*

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} [g_k(x) - g_{k+1}(x)] g_k(y) \, ,$$

wobei $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig sowie, für* $\delta_n = 1 - \frac{1}{n}$,

$$g_n \ge 0 \, , \quad g_n(x) = 0 \text{ für } 0 \le x \le \delta_n \text{ und } \delta_{n+1} \le x \le 1 \, , \quad \int_0^1 g_n(x) \, dx = 1 \, , \; n \in \mathbb{N} \, .$$

Es gilt

$$f(x,y) = g_1(x) g_1(y) + \sum_{k=2}^{\infty} g_k(x) [g_k(y) - g_{k-1}(y)] \, .$$

Somit folgt einerseits

$$\int_0^1 f(x,y) \, dy = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 [g_k(x) - g_{k+1}(x)] g_k(y) \, dy = \sum_{k=1}^{\infty} [g_k(x) - g_{k+1}(x)] = g_1(x) \, ,$$

also

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) \, dy \right) dx = 1 \, ,$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x,y) \, dx &= \int_0^1 g_1(x) g_1(y) \, dx + \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^1 g_k(x) [g_k(y) - g_{k-1}(y)] \, dx \\ &= g_1(y) + \sum_{k=2}^{\infty} [g_k(y) - g_{k-1}(y)] = 0 \, , \end{aligned}$$

also

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) \, dx \right) dy = 0 \, .$$

Der Satz 5.31 ist hier nicht anwendbar, weil für $(x,y) \in [\delta_m, \delta_{m+1} \times [\delta_n, \delta_{n+1}]$ *gilt*

$$f(x,y) = [g_m(x) - g_{m+1}(x)]] g_n(y) = \left\{ \begin{array}{ccc} g_n(x) g_n(y) & : & m = n \\ -g_{n+1}(x) g_n(y) & : & m = n-1 \\ 0 & : & \text{sonst} \end{array} \right\}$$

und somit

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)| \, d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \iint_{[\delta_m, \delta_{m+1} \times [\delta_n, \delta_{n+1}]} |f(x,y)| \, d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n-1}^{n} 1 = \infty \, .$$

5.6 Die $\mathbf{L}^p$-Räume (Fortsetzung)

Wir gehen hier nochmal auf die in Kapitel 2 eingeführten Begriffe ein und vertiefen diese. Insbesondere geht es uns darum, die Vollständigkeit der $\mathbf{L}^p$-Räume zu zeigen, d.h., dass jede $\mathbf{L}^p$-Cauchyfolge einen Grenzwert in $\mathbf{L}^p$ besitzt. Im Weiteren seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ ein messbarer Raum und $1 \le p < \infty$.

- Ist $f \in \mathcal{M}(\mu)$, so folgt für $a \in \mathbb{R}$
$$\{|f|^p > a\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{X} & : & a < 0 \\ \left\{|f| > a^{\frac{1}{p}}\right\} & : & a \ge 0 \end{array} \right\} \in \mathcal{R},$$
also $|f|^p \in \mathcal{M}(\mu)$ (vgl. Bedingung (p) in Kapitel 2). Für $f \in \mathcal{M}(\mu)$ setzen wir
$$N_p(f) := \left(\int_{\mathbf{X}} |f| \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$
Die Menge der zur p-ten Potenz summierbaren Funktionen wird dann definiert also
$$\mathcal{L}^p(\mu) := \{f \in \mathcal{M}(\mu) : N_p(f) < \infty\}.$$
Aus der Eigenschaft (I7) folgt, dass für $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^{p_2}(\mu)$ die Summe $f+g$ und das Produkt fg μ-f.ü. erklärt und endlich sind und zu messbaren Funktionen $f+g : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $fg : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden können. Im Weiteren verstehen wir $f+g$ und fg in diesem Sinne.

- Aus Aufgabe 2, 2. Übung ergeben sich (**Minkowski'sche Ungleichung**)
$$N_p(f+g) \le N_p(f) + N_p(g) \quad \forall\, f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) \tag{5.3}$$
und (**Hölder'sche Ungleichung**)
$$N_1(fg) \le N_p(f) N_q(g) \quad \forall\, f \in \mathcal{L}^p(\mu),\ g \in \mathcal{L}^q(\mu,\ 1 < p < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{5.4}$$

- Eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{L}^p(\mu)$ nennt man **im p-ten Mittel konvergent** gegen $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$ gilt. Im fall $p = 1$ spricht man von Konvergenz im Mittel, im Fall $p = 2$ von Konvergenz im quadratischen Mittel.

- Wir bemerken, dass aus (5.3) die Ungleichung
$$|N_p(f) - N_p(g)| \le N_p(f \pm g) \quad \forall\, f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) \tag{5.5}$$
folgt.

Satz 5.34 (F. Riesz) *Sind $f_n, f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $f_n \longrightarrow f$ μ-f.ü., so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n) = N_p(f)$.*

Lemma 5.35 *Für $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $f_n \ge 0$ gilt*
$$N_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} N_p(f_n).$$

Satz 5.36 (Lebesgue) *Es seien $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $f_n \longrightarrow f_0$ μ-f.ü. sowie $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $|f_n| \le g$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Funktion $f^* \in \mathcal{M}(\mu)$, so dass $f_n \longrightarrow f^*$ μ-f.ü. Ferner gilt $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $N_p(f_n - f) \longrightarrow 0$ für jedes $f \in \mathcal{M}(\mu)$ mit $f_n \longrightarrow f$ μ-f.ü.*

Wir nennen $(f_n)_{n=1}^\infty$ mit $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ eine **Cauchyfolge** in $\mathcal{L}^p(\mu)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $N_p(f_m - f_n) < \varepsilon$ für alle $m, n \ge n_0$ gilt.

Satz 5.37 *Ist $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p(\mu)$, so existiert eine Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$. Ferner existiert eine Teilfolge von $(f_n)_{n=1}^\infty$, die μ-f.ü. gegen f konvergiert.*

Beispiel 5.38 *Wir betrachten auf $\mathbf{X} = \mathbb{R}$ das Lebesgue-Maß μ und definieren $f_n = \chi_{A_n}$ mit $A_{2^\ell + k} = \left[k2^{-\ell}, (k+1)2^{-\ell}\right)$, $\ell \in \mathbb{N}_0$, $k \in \left\{0, 1, \dots, 2^\ell - 1\right\}$. Es folgt $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p \, d\mu = 2^{-\ell} \longrightarrow 0$ für $n = 2^\ell + k \longrightarrow \infty$, also $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $N_p(f_n) = N_p(f_n - 0) \longrightarrow 0$. Ist nun $x \in [0,1)$, so existiert für jedes $\ell \in \mathbb{N}_0$ genau ein $k \in \left\{0, 1, \dots, 2^\ell - 1\right\}$ mit $x \in \left[k2^\ell, (k+1)2^\ell\right)$, d.h., $x \in A_{2^\ell + k}$, also $f_{2^\ell + k}(x) = 1$, aber*

$$\begin{cases} f_{2^\ell + k + 1}(x) = 0 & : \quad k \in \left\{0, 1, \dots, 2^\ell - 2\right\}, \\ f_{2^{\ell+1}}(x) = 0 & : \quad k = 2^\ell - 1, \end{cases}$$

so dass $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ für **kein** *$x \in [0,1)$ konvergiert. Man kann i. Allg. also nur auf die Konvergenz f.ü. einer Teilfolge schließen (vgl. Satz 5.37).*

Folgerung 5.39 *Sind $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ eine Cauchyfolge und $f_n \longrightarrow f$ μ-f.ü., so folgt $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $N_p(f_n - f) \longrightarrow 0$.*

Folgerung 5.40 *Aus $f_n, f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g_n, g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = \lim\limits_{n\to\infty} N_q(g_n - g) = 0$, $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} N_1(f_n g_n - fg) = 0$.*

Bemerkung 5.41 *Definiert man*

$$\mathbf{L}^p(\mu) := \{[f]_p := \{g \in \mathcal{L}^p(\mu) : g = f \ \ \mu\text{-f.ü.}\} : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\},$$

$\|[f]_p\|_{\mathbf{L}^p} := N_p(f)$ und $[f]_p + [g]_p := [f+g]_p$, $\alpha[f]_p := [\alpha f]_p$, so wird $\left(\mathbf{L}^p(\mu), \|.\|_p\right)$ zu einem normierten Raum. Satz 5.37 besagt nun, dass dieser Raum vollständig ist (jede Cauchyfolge ist konvergent), also ein sog. **Banachraum**.

Es sei noch bemerkt, dass man auch für $p = \infty$ einen entsprechenden Raum betrachten kann, wenn man

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f \in \mathcal{M}(\mu) : \exists\, A \in \mathcal{N}(\mu) : \sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{X} \setminus A\} < \infty\}$$

und

$$N_\infty(f) := \inf\{\sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{X} \setminus A\} : A \in \mathcal{N}(\mu)\}$$

definiert.

5.7 Parameterintegrale

Im Weiteren seien $(\mathbf{X}, \mathcal{R}, \mu)$ ein messbarer Raum und $(\mathbf{E}, d)$ ein metrischer Raum.

Satz 5.42 *Es sei* $f : \mathbf{X} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $f_p \in \mathcal{L}(\mu)\ \forall\, p \in \mathbf{E}$, *wobei* $f_p : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,p)$,

(b) $f_x : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto f(x,p)$ *ist stetig in* $p_0 \in \mathbf{E}\ \forall\, x \in \mathbf{X}$,

(c) $\exists\, h \in \mathcal{L}(\mu) : |f(x,p)| \le h(x)\ \forall\, (x,p) \in \mathbf{X} \times \mathbf{E}$.

Dann ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \int_{\mathbf{X}} f(x,p)\, d\mu(x)$$

stetig in p_0.

Satz 5.43 *Es seien* $-\infty \le a < b \le \infty$ *und* $f : \mathbf{X} \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $f_p \in \mathcal{L}(\mu)\ \forall\, p \in (a,b)$,

(b) $f_x : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist differenzierbar,*

(c) $\exists\, h \in \mathcal{L}(\mu) : |f_x'(p)| = \left| \dfrac{\partial f(x,p)}{\partial p} \right| \le h(x)\ \forall (x,p) \in \mathbf{X} \times (a,b)$.

Dann ist die Funktion

$$\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \int_{\mathbf{X}} f(x,p)\, d\mu(x)$$

differenzierbar, und es gilt

$$\varphi'(p) = \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}\, d\mu(x).$$

Index