Skript zur Vorlesung

Analysis und Numerik für Integralgleichungen

Sommersemester 2017

Peter Junghanns

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] H. W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[2] D. Berthold, W. Hoppe, B. Silbermann, A fast algorithm for solving the generalized airfoil equation, *J. Comp. Appl. Math.*, 43 (1992), 185-219.

[3] M. R. Capobianco, G. Mastroianni, Uniform boundedness of Lagrange operators in some weighted Sobolev-type spaces, *Math. Nachr.*, 187 (1997), 61-77.

[4] B. Choudhary, S. Nanda, *Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New Delhi.

[5] M. Dobrowolski, *Angewandte Funktionalanalysis- Funktionalanalysis, Sobolev-Räume und elliptische Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[6] R. Estrada, R. P. Kanwal, *Singular Integral equations*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[7] I. M. Gelfand, D. A. Raikov, G. E. Schilow, *Kommutative normierte Algebren*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.

[8] I. Z. Gochberg, I. A. Feldman, *Faltungsgleichungen und Projektionsverfahren zu ihrer Lösung*, Birkhäuser Verlag, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

[9] A. Göpfert, T. Riedrich, C. Tammer, *Angewandte Funktionalanalysis - Motivationen und Methoden für Mathematiker und Wirtschaftswissenschaftler*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.

[10] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, San Diego, 1994.

[11] H. Heuser, *Funktionalanalysis, Theorie und Anwendung*, Teubner, Stuttgart.

[12] F. Hirzebruch, W. Scharlau, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Spektrum, Akademie Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford.

[13] P. Junghanns, Skript zur Vorlesung *Vertiefende Kapitel zur Funktionalanalysis*
http://www-user.tu-chemnitz.de/∼peju/lehre

[14] P. Junghanns, Skript zur Vorlesung *Orthogonale Polynome*,
http://www-user.tu-chemnitz.de/∼peju/lehre

[15] P. Junghanns, Skript zur Vorlesung *Randintegralmethoden*,
http://www-user.tu-chemnitz.de/∼peju/lehre

[16] P. Junghanns, EAGLE-GUIDE *Orthogonale Polynome*, Edition am Gutenbergplatz, Leipzig, 2009.

[17] P. Junghanns, G. Monegato, A. Strozzi, On the integral equation formulations of some 2D contact problems, *J. Comp. Appl. Math.*, 234 (2010), 2808-2825.

[18] P. Junghanns, M. Seidel, On the stability of collocation methods for Cauchy singular integral equations in weighted $\mathbf{L}^p$ spaces, *Math. Nachr.*, 283 (2010), 1-27.

[19] R. P. Kanwal, *Linear Integral Equations, Theory & Technique*, Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, 1997.

[20] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer Verlag, New York, 1999.

[21] L. A. Ljusternik, W. I. Sobolew, *Elemente der Funktionalanalysis*, Akademie-Verlag, Berlin.

[22] G. Mastroianni, M. G. Russo, Lagrange interpolation in weighted Besov spaces, *Constr. Appr.*, 15 (1999), 257-289.

[23] S. G. Michlin, *Lehrgang der mathematischen Physik*, Akademie-Verlag, Berlin, 1975.

[24] N. K. Nikol'skij, *Functional Analysis I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[25] D. Potts, G. Steidl, M. Tasche, Fast algorithms for discrete polynomial transforms, *Math. Comp.*, 67 (1998), 1577-1590.

[26] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and Series, Vol.I: Elementary Functions*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1986.

[27] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[28] M. Schechter, *Principles of Functional Analysis*, Academic Press, New York.

[29] I. H. Sloan, W. E. Smith, Product-integration with the Clenshaw-Curtis and related points, *Numer. Math.*, 30 (1978), 415-428.

[30] I. H. Sloan, Analysis of general quadrature methods for integral equations of the second kind, *Numer. Math.*, 38 (1981), 263-278.

[31] C. Swartz, Measure, Integration and Function Spaces, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

[32] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

Kapitel 1

Fredholm'sche Integralgleichungen

Als Beispiel einer **Fredholm'schen Integralgleichung zweiter Art** betrachten wir

$$u(x) - \int_{-1}^{1} k(x,y)u(y)\,dy = f(x)\,, \quad -1 \le x \le 1\,. \tag{1.1}$$

Dabei nehmen wir an, dass $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ und $k : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ gegebene stetige Funktionen sind. Gesucht ist eine stetige Funktion $u : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, die (1.1) genügt. Mit $\mathbf{C}[-1,1] = (\mathbf{C}[-1,1], \|.\|_\infty)$ bezeichnen wir den Banachraum der auf $[-1,1]$ stetigen und komplexwertigen Funktionen, versehen mit der Norm

$$\|f\|_\infty := \max\left\{|f(x)| : -1 \le x \le 1\right\}\,.$$

Wir definieren $\mathbf{X} := \mathbf{C}[-1,1]$, $I : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, $u \mapsto u$ und $K : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, $u \mapsto \int_{-1}^{1} k(.,y)u(y)\,dy$. Man nennt $k(x,y)$ auch **Kern** des Integraloperators K. Damit können wir die Integralgleichung (1.1) als Operatorgleichung

$$Au := (I - K)u = f$$

schreiben. Bekanntlich gehört der Operator K zur Menge $\mathcal{K}(\mathbf{X})$ der kompakten Operatoren, wobei seine Norm gleich

$$\|K\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{X}} = \max\left\{\int_{-1}^{1} |k(x,y)|\,dy : -1 \le x \le 1\right\}$$

ist. Aus $K \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ folgt insbesondere, dass das Bild $R(A) = A(\mathbf{X}) = \{Au : u \in \mathbf{X}\}$ des Operators A abgeschlossen ist und dass für seinen Nullraum $N(A) = \{u \in \mathbf{X} : Au = \Theta\}$ die Beziehung

$$\dim N(A) = \dim N(A^*) < \infty$$

erfüllt ist. Außerdem gilt die **Fredholm'sche Alternative**:

$$R(A) = \mathbf{X} \iff \dim N(A) = 0$$

(vgl. auch [13, Kapitel 1]). Die Gleichung $Au = f$ ist also genau dann für jedes $f \in \mathbf{X}$ lösbar, wenn sie (für ein $f \in \mathbf{X}$) eindeutig lösbar ist.

1.1 Separierte Kerne

Wir betrachten hier einen sogenannten **separierten Kern**

$$k(x,y) = \sum_{j=1}^{m} a_j(x)b_j(y)\,,$$

wobei wir voraussetzen, dass beide Systeme $\{a_1, \dots, a_m\}$ und $\{b_1, \dots, b_m\}$ stetiger Funktionen linear unabhängig sind. Gleichung (1.1) schreibt sich dann als

$$u(x) - \sum_{j=1}^{m} a_j(x) \int_{-1}^{1} b_j(y) u(y)\, dy = f(x)\,, \quad -1 \le x \le 1\,. \tag{1.2}$$

Setzen wir $\gamma_j := \displaystyle\int_{-1}^{1} b_j(y) u(y)\, dy$, so folgt aus (1.2)

$$u(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j a_j(x)\,.$$

Einsetzen in (1.2) liefert

$$\sum_{j=1}^{m} a_j(x) \left(\gamma_j - \int_{-1}^{1} b_j(y) \left[f(y) + \sum_{r=1}^{m} \gamma_r a_r(y) \right] dy \right) = 0\,,$$

so dass wegen der linearen Unabhängigkeit der a_j folgt

$$\gamma_j - \int_{-1}^{1} b_j(y) \left[f(y) + \sum_{r=1}^{m} \gamma_r a_r(y) \right] dy = 0\,, \quad j = 1, \dots, m\,.$$

Mit den Bezeichnungen $\varphi_j := \displaystyle\int_{-1}^{1} b_j(y) f(y)\, dy$ und $\kappa_{jr} := \displaystyle\int_{-1}^{1} a_r(y) b_j(y)\, dy$ erhalten wir, dass die Integralgleichung (1.2) äquivalent ist zu dem linearen Gleichungssystem

$$\gamma_j - \sum_{r=1}^{m} \kappa_{jr} \gamma_r = \varphi_j\,, \quad j = 1, \dots, m\,. \tag{1.3}$$

Also: Die Integralgleichung (1.2) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Matrix

$$\mathbb{A} = \mathbb{I} - \mathbb{K} := \left[\ \delta_{jr}\ \right]_{j,r=1}^{m} - \left[\ \kappa_{jr}\ \right]_{j,r=1}^{m}$$

regulär ist, wobei $\delta_{jr} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & : & j = r \\ 0 & : & j \neq r \end{array} \right\}$.

Dabei gilt $\dim N(A) = \dim N(\mathbb{A})$.

Beweis. Es sei $\gamma^s := \left[\ \gamma_j^s\ \right]_{j=1}^{m}$, $s = 1, \dots, d$ eine Basis in $N(\mathbb{A})$. Wir setzen $u_s(x) = \displaystyle\sum_{r=1}^{m} \gamma_r^s a_r(x)$.

Es folgt (vgl. (1.2))

$$(A u_s)(x) = \sum_{r=1}^{m} \gamma_r^s a_r(x) - \sum_{j=1}^{m} a_j(x) \kappa_{jr} \gamma_r^s = \sum_{j=1}^{m} \left(\gamma_j^s - \sum_{r=1}^{m} \kappa_{jr} \gamma_r^s \right) a_j(x) = 0$$

für alle $x \in [-1, 1]$, d.h., $u_s \in N(A)$. Ferner folgt aus

$$0 = \sum_{s=1}^{d} \beta_s u_s(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{d} \beta_s \gamma_j^s a_j(x)\,, \quad x \in [-1, 1]\,,$$

wegen der linearen Unabhängigkeit der $a_j(x)$

$$\sum_{s=1}^{d} \beta_s \gamma_j^s = 0\,, \quad j = 1, \dots, m\,,$$

also $\sum_{s=1}^{d} \beta_s \gamma^s = \Theta$ und somit $\beta_s = 0$, $s = 1, \ldots, d$. Damit ist $\dim N(\mathbb{A}) \le \dim N(A)$ gezeigt.

Ist umgekehrt $v_s(x) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j^s a_j(x)$, $s = 1, \ldots, d$ eine Basis in $N(A)$, so folgt aus

$$\sum_{s=1}^{d} \beta_s \left[\ \delta_j^s \ \right]_{j=1}^{m} = \Theta$$

auch $\sum_{s=1}^{d} \beta_s v_s(x) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$, also $\beta_s = 0$, $s = 1, \ldots, d$. Da $\left[\ \delta_j^s \ \right]_{j=1}^{m} \in N(\mathbb{A})$, $s = 1, \ldots, d$ gilt, folgt $\dim N(A) \le \dim N(\mathbb{A})$. $\square$

Dabei hat es keine Rolle gespielt, ob wir die Integralgleichung in $\mathbf{X} = \mathbf{C}[-1,1]$ oder in $\mathbf{Y} := \mathbf{L}^2(-1,1)$ betrachten. Hier wird mit $\mathbf{L}^2(-1,1)$ der Hilbertraum der quadratisch integrierbaren (Klassen von) Funktionen $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{C}$, versehen mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(-1,1)} = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

bezeichnet.

Auch allgemein (d.h., ohne die Voraussetzung, dass ein separierter Kern vorliegt) gilt folgendes Lemma.

Lemma 1.1 *Ist $k : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, so ist die Integralgleichung* (1.1) *genau dann für jedes $f \in \mathbf{Y}$ (eindeutig) in $\mathbf{Y}$ lösbar, wenn dies für jedes $f \in \mathbf{X}$ in $\mathbf{X}$ gilt.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $K : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ kompakt ist, was wegen der stetigen Einbettung $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ (d.h., $\|f\|_{\mathbf{Y}} \le c\|f\|_{\mathbf{X}}\ \forall\, f \in \mathbf{X}$) auch die Kompaktheit von $K : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Y}$ zur Folge hat. Für $x_1, x_2 \in [-1,1]$ und $u \in \mathbf{Y}$ mit $\|u\|_{\mathbf{Y}} \le 1$ gilt

$$|(Ku)(x_1) - (Ku)(x_2)| \le \sqrt{\int_{-1}^{1} |k(x_1,y) - k(x_2,y)|^2\, dy}\,.$$

Diese Abschätzung zeigt unter Verwendung der gleichmaßigen Stetigkeit von $k : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, dass die Menge $\{Ku : u \in \mathbf{Y}, \|u\|_{\mathbf{Y}} \le 1\}$ eine Familie gleichgradig stetiger Funktionen ist. Es ist leicht zu sehen, dass sie auch gleichmäßig beschränkt ist. Nach dem Theorem von Arzela-Ascoli ist somit $K : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ kompakt.

Damit gilt die Fredholm'sche Alternative sowohl für $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ als auch für $A : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Y}$, so dass nur noch zu zeigen ist, dass $\dim N(A : \mathbf{X} \to \mathbf{X}) = 0$ äquivalent zu $\dim N(A : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}) = 0$ ist. Wegen $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ folgt sofort $N(A : \mathbf{X} \to \mathbf{X}) \subset N(A : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y})$. Ist umgekehrt $u \in \mathbf{Y}$ mit $Au = \Theta$, so folgt $u = Ku \in \mathbf{X}$, was zeigt, dass auch $N(A : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}) \subset N(A : \mathbf{X} \to \mathbf{X})$ gilt. $\square$

Wir wenden uns wieder (1.2) und (1.3) zu. Falls $D := \det \mathbb{A} \ne 0$, so gilt nach der Cramer'schen Regel für die Lösung von (1.3) die Formel

$$\gamma_j = \frac{1}{D} \sum_{r=1}^{m} D_{rj} \varphi_r\,, \quad j = 1, \ldots, m\,,$$

wobei $D_{jr} = (-1)^{j+r} \det \mathbb{A}_{jr}$ und $\mathbb{A}_{jr}$ der Minor von $\mathbb{A}$ zum Eintrag $\delta_{jr} - \kappa_{jr}$ sind. Es folgt für die Lösung der Integralgleichung (1.2)

$$u(x) = f(x) + \int_{-1}^{1} \gamma(x,y) f(y)\, dy$$

mit

$$\gamma(x,y) = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} D_{rj} a_j(x) b_r(y) .$$

Nach obigen Überlegungen ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ genau dann Eigenwert des Operators K, wenn λ Eigenwert von $\mathbb{K}$ ist. Dazu braucht man nur $I - K$ durch $\lambda I - K$ und $\mathbb{I} - \mathbb{K}$ durch $\lambda \mathbb{I} - \mathbb{K}$ zu ersetzen und zu berücksichtigen, dass $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann Eigenwrt von K ist, wenn $N(\lambda I - K)$ nicht trivial ist.

Die Dimension des Eigenunterraumes von K zum Eigenwert $\lambda \neq 0$ ist dabei gleich der geometrischen Vielfachheit des Eigenwertes λ von $\mathbb{A}$. Außerdem ist $\lambda = 0$ stets Eigenwert von $K : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Y}$ mit unendlichdimensionalem Eigenunterraum. Es ist nämlich

$$(Ku)(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j(x) \int_{-1}^{1} b_j(y) u(y)\, dy = 0 \quad \forall\, x \in [-1,1] ,$$

äquivalent zu $\displaystyle\int_{-1}^{1} b_j(y) u(y)\, dy = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Also gilt $N(K) = \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_m\}^{\perp}$.

1.2 Die Methode der sukzessiven Approximation

Wir schreiben jetzt die Integralgleichung (1.1) in der Form

$$u(x) = f(x) + \int_{-1}^{1} k(x,y) u(y)\, dy , \quad -1 \leq x \leq 1$$

bzw. $u = f + Ku$. Wir betrachten sie als Fixpunktgleichung und wenden die Methode der sukzessiven Approximation an,

$$u_0 = f , \quad u_{n+1} = f + K u_n , \ n \in \mathbb{N}_0 .$$

Zur Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes genügt es $\|K\| < 1$ vorauszusetzen. Dieser liefert uns dann

$$u_n = \sum_{j=0}^{n} K^j f \longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} K^j f \quad (n \longrightarrow \infty) ,$$

also $(I - K)^{-1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} K^j$, was wir bereits aus Satz 0.19 (Grundlagen) wissen. Wir bemerken, dass

$$\left(K^j f \right)(x) = \int_{-1}^{1} k_j(x,y) f(y)\, dy$$

mit $k_1(x,y) = k(x,y)$ und

$$k_j(x,y) = \int_{-1}^{1} k(x,z) k_{j-1}(z,y)\, dz$$

sowie

$$\|Kf\|_{\mathbf{Y}} \leq \sqrt{\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |k(x,y)|^2\, d(x,y)}\ \|f\|_{\mathbf{Y}}$$

gilt.

1.3 Die Nyström-Methode

Auch hier betrachten wir im Raum $\mathbf{X} = \mathbf{C}[-1,1]$ die Integralgleichung

$$u(x) - \int_{-1}^{1} k(x,y)u(y)\,dy = f(x)\,, \quad -1 \le x \le 1 \tag{1.4}$$

mit gegebenen stetigen Funktionen $k : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ und $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, die wir auch wieder kurz in der Form

$$(I-K)u = f \tag{1.5}$$

schreiben. Es sei uns eine Quadraturformel

$$Q_n(g) := \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} g(x_{nr})$$

mit $\lambda_{nr} \in \mathbb{C}$, $-1 \le x_{nn} < x_{n,n-1} < \ldots < x_{n1} \le 1$ und

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(g) = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx \quad \forall\, g \in \mathbf{X} \tag{1.6}$$

gegeben. Eine Näherung $u_n(x)$ für $u(x)$ erhoffen wir durch Lösen der Gleichung

$$u_n(x) - \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} k(x, x_{nr}) u_n(x_{nr}) = f(x)\,, \quad -1 \le x \le 1 \tag{1.7}$$

zu finden. Ist $u_n^* \in \mathbf{X}$ Lösung von (1.7), so ist der Vektor $\xi_n^* = \left[\ \xi_{nr}^*\ \right]_{r=1}^{n} := \left[\ u_n^*(x_{nr})\ \right]_{r=1}^{n}$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\xi_{nj}^* - \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} k(x_{nj}, x_{nr}) \xi_{nr}^* = f(x_{nj})\,, \quad j = 1, \ldots, n\,. \tag{1.8}$$

Ist umgekehrt ξ_n^* Lösung von (1.8), so ist die sogenannte **Nyström-Interpolante**

$$u_n^*(x) = f(x) + \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} k(x, x_{nr}) \xi_{nr}^*$$

Lösung von (1.7). Besitzt (1.7) nur eine Lösung, so gilt dies offenbar auch für (1.8). Besitzt umgekehrt (1.8) genau eine Lösung $\left[\ \xi_{nr}^*\ \right]_{r=1}^{n}$, so folgt für jede Lösung $u_n^*(x)$ von (1.7), dass $u_n^*(x_{nr}) = \xi_{nr}^*$, $r = 1, \ldots, n$ gilt, d.h.,

$$u_n^*(x) = f(x) + \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} k(x, x_{nr}) \xi_{nr}^*\,.$$

Die beiden Gleichungen (1.7) und (1.8) sind also gleichzeitig eindeutig lösbar oder nicht. Definieren wir

$$K_n : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}\,, \quad u \mapsto \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} k(.\,, x_{nr}) u(x_{nr})\,,$$

so ist (1.7) äquivalent zu

$$(I - K_n)u_n = f\,. \tag{1.9}$$

Nun ergeben sich folgende Fragen:

(F1) Existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass (1.9) für alle $n \geq n_0$ eine eindeutige Lösung besitzt?

(F2) Wenn (F1) mit **ja** beantwortet werden kann, gilt dann $\|u_n^* - u^*\|_\infty \longrightarrow 0$, wobei $u^* \in \mathbf{X}$ eine Lösung von (1.5) ist?

Zur Beantwortung dieser Fragen führen wir den Begriff einer Folge kollektiv kompakter Operatoren ein. Im Weiteren bezeichnen wir mit $L(\mathbf{X})$ (bzw. $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$) die Menge der linearen Operatoren von $\mathbf{X}$ nach $\mathbf{X}$ (bzw. von $\mathbf{X}$ nach $\mathbf{Y}$), mit $\mathcal{L}(\mathbf{X}) \subset L(\mathbf{X})$ (bzw. $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \subset L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$) die Teilmenge der beschränkten linearen Operatoren und mit $\mathcal{K}(\mathbf{X}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{X})$ (bzw. $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$) die Teilmenge der kompakten Operatoren, wobei wir voraussetzen, dass $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume sind. Mit $K_n \longrightarrow K$ bezeichnen wir die **starke Konvergenz** von Operatorfolgen, d.h.,

$$K_n \longrightarrow K \iff \lim_{n\to\infty} \|K_n g - Kg\| = 0 \; \forall\, g \in \mathbf{X}\,.$$

Eine Folge $(K_n)_{n=1}^\infty$ von Operatoren $K_n \in L(\mathbf{X})$ nennt man **kollektiv kompakt**, wenn die Menge

$$\{K_n g : g \in \mathbf{X},\ \|g\| \leq 1,\ n \in \mathbb{N}\}$$

relativ kompakt in $\mathbf{X}$ ist. Es folgt sofort $K_n \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ und $\|K_n\| \leq M < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und eine gewisse Konstante M.

Satz 1.2 *Es seien $\mathbf{X}$ ein Banachraum, $K, K_n \in L(\mathbf{X})$, $f \in \mathbf{X}$, die Folge $(K_n)_{n=1}^\infty$ kollektiv kompakt und $K_n \longrightarrow K$. Dann gilt:*

(a) $\lim_{n\to\infty} \|(K_n - K)K_n\| = 0$.

(b) *Ist $\dim N(I-K) = 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass die Gleichung (1.9) für alle $n \geq n_0$ eine eindeutige Lösung $u_n^* \in \mathbf{X}$ besitzt. Dabei gilt*

$$\|u_n^* - u^*\| \leq c\, \|K_n u^* - K u^*\|\,, \quad n \geq n_0$$

mit einer von n und f unabhängigen Konstanten $c \in (0,\infty)$, wobei $u^* \in \mathbf{X}$ die eindeutige Lösung der Gleichung (1.5) ist.

Beweis. Wir setzen $\mathbf{A}_n := \{K_n f : f \in \mathbf{X},\ \|f\| \leq 1\}$. Es folgt

$$\|(K_n - K)K_n\| = \sup\{\|K_n - K)g\| : g \in \mathbf{A}_n\}\,.$$

Aus $K_n \longrightarrow K$ und dem Theorem von Banach-Steinhaus (siehe Grundlagen, Satz 0.16) folgt $\sup\{\|K_n - K\| : n \in \mathbb{N}\} =: M < \infty$. Wir nehmen nun an, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $n_0 := 0 < n_1 < n_2 < \ldots$ natürlicher Zahlen sowie $g_k \in \mathbf{A}_{n_k}$ gibt, so dass $\|(K_{n_k} - K)g_k\| \geq \varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$ gilt, wobei wir wegen der relativen Kompaktheit von $\bigcup_{n=1}^\infty \mathbf{A}_n$ annehmen können, dass $g_k \longrightarrow g$ in $\mathbf{X}$ für ein $g \in \mathbf{X}$ erfüllt ist. Es folgt der Widerspruch

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon &\leq \|(K_{n_k} - K)(g_k - g)\| + \|(K_{n_k} - K)g\| \\ &\leq M\,\|g_k - g\| + \|(K_{n_k} - K)g\| \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)\,, \end{aligned}$$

so dass die Aussage (a) bewiesen ist.

Aus $K_n \longrightarrow K$ folgt $\{Kg : g \in \mathbf{X},\ \|g\| \leq 1\} \subset \overline{\{K_n g : g \in \mathbf{X},\ \|g\| \leq 1,\ n \in \mathbb{N}\}}$ und somit $K \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$. Die Voraussetzung $N(I-K) = \{\Theta\}$ liefert zusammen mit der Fredholm'schen Alternative (siehe [13, Satz 1.1]) und dem Satz von Banach (siehe Grundlagen, Satz 0.21) die

Existenz des inversen Operators $(I-K)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$. Wir setzen $\alpha := \left\|(I-K)^{-1}\right\|$. Nach dem bereits Bewiesenen existiert ein $n_* \in \mathbb{N}$, so dass $\alpha \|(K_n - K)K_n\| \le \gamma < 1 \ \forall\, n \ge n_*$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\left[I + (I-K)^{-1}K_n\right](I-K_n) &= (I-K)^{-1}(I-K+K_n)(I-K_n) \\ &= (I-K)^{-1}\left[I-K+K_n-K_n+(K-K_n)K_n\right] \\ &= I + (I-K)^{-1}(K-K_n)K_n =: I - E_n\end{aligned}$$

mit $\|E_n\| \le \gamma < 1 \ \forall\, n \ge n_*$. Es folgt für $n \ge n_*$

$$(I-E_n)^{-1}\left[I + (I-K)^{-1}K_n\right](I-K_n) = I$$

und somit $N(I-K_n) = \{\Theta\}$. Nochmalige Anwendung der Fredholm'schen Alternative zeigt damit die Existenz des inversen Operators $(I-K_n)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ für $n \ge n_*$, wobei

$$(I-K_n)^{-1} = (I-E_n)^{-1}\left[I + (I-K)^{-1}K_n\right]$$

gilt. Aus $u^* - Ku^* = f = u_n^* - K_n u_n^*$ folgt nun $u^* - u_n^* - (Ku^* - K_n u_n^*) = \Theta$, also

$$u^* - u_n^* - K_n(u^* - u_n^*) = (K - K_n)u^* .$$

Das ergibt $u^* - u_n^* = (I-K_n)^{-1}(K-K_n)u^*$ und

$$\|u^* - u_n^*\| \le \frac{\left\|I + (I-K)^{-1}K_n\right\|}{1-\gamma} \left\|(K-K_n)u^*\right\| ,$$

was wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Normen der K_n den Beweis der Aussage (b) komplettiert. □

Wir zeigen nun, dass Satz 1.2 auf die Gleichung (1.4) im Raum $\mathbf{X} = \mathbf{C}[-1,1]$ zusammen mit der Nyström-Methode (1.7) anwendbar ist:

1. Aus $\|Q_n\|_{\mathbf{X}^*} = \sum_{r=1}^{n} |\lambda_{nr}|$ und der Voraussetzung (1.6) sowie dem Theorem von Banach-Steinhaus folgt die Existenz einer Konstanten $\gamma \in (0,\infty)$, so dass
$$\sum_{r=1}^{n} |\lambda_{nr}| \le \gamma\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

2. Aus $|(K_n g)(x)| \le \sum_{r=1}^{n} |\lambda_{nr}||k(x,x_{nr})||g(x_{nr})| \le \gamma \,\|k\|_\infty \|g\|_\infty$ folgt
$$\|K_n\| \le \gamma_0 := \gamma \,\|k\|_\infty\,, \quad \|k\|_\infty := \sup\left\{|k(x,y)| : (x,y) \in [-1,1]^2\right\} .$$

3. Die Menge $\{K_n g : g \in \mathbf{X},\, \|g\|_\infty \le 1,\, n \in \mathbb{N}\}$ ist somit gleichmäßig beschränkt und auch gleichgradig stetig, denn für $x_1, x_2 \in [-1,1]$ gilt
$$|(K_n g)(x_1) - (K_n g)(x_2)| = \left|\sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr}\big[k(x_1,x_{nr}) - k(x_2,x_{nr})\big]g(x_{nr})\right| < \varepsilon\,\gamma\,\|g\|_\infty\,,$$
falls $|x_1 - x_2| < \delta = \delta(\varepsilon)$. Somit ist die Folge $(K_n)_{n=1}^\infty$ kollektiv kompakt.

4. Nach Voraussetzung gilt für $g \in \mathbf{X}$
$$(K_n g)(x) = Q_n\big(k(x,.)g\big) \longrightarrow (Kg)(x) \quad \forall\, x \in [-1,1]\,.$$
Wir nehmen an, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k > n_{k-1}$ ($n_0 :=$ 0) mit der Eigenschaft existiert, dass $\|K_{n_k} g - Kg\|_\infty \geq \varepsilon$ gilt. Wegen der kollektiven Kompaktheit der K_n besitzt $(K_{n_k} g)_{k=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge $\left(K_{n_{k_j}} g\right)_{j=1}^\infty$, für die
$$\lim_{j\to\infty} \left(K_{n_{k_j}} g\right)(x) = (Kg)(x) \quad \forall\, x \in [-1,1]$$
gilt. Es folgt $\left\|K_{n_{k_j}} g - Kg\right\|_\infty \longrightarrow 0$ für $j \longrightarrow \infty$ im Widerspruch zur Definition der Folge der K_{n_k}. Also gilt $\|K_n g - Kg\|_\infty \longrightarrow 0 \;\forall\, g \in \mathbf{X}$.

5. Unter der Voraussetzung, dass die Gleichung (1.4) für $f \equiv 0$ nur die triviale Lösung besitzt, liefert Satz 1.2
$$\|u_n^* - u^*\|_\infty \leq c \max_{-1\leq x\leq 1} \left| \sum_{r=1}^n \lambda_{nr} k(x, x_{nr}) u^*(x_{nr}) - \int_{-1}^1 k(x,y) u^*(y)\, dy \right| , \quad n \geq n_0\,,$$
wobei u^* und u_n^*, $n \geq n_0$ die eindeutigen Lösungen von (1.4) bzw. (1.7) sind.

1.4 Gewichtete Räume stetiger Funktionen

Mit $v^{\gamma,\delta}(x) = (1-x)^\gamma (1+x)^\delta$, $-1 < x < 1$ bezeichnen wir ein sogenanntes **Jacobi-Gewicht**. Wir setzen voraus, dass $0 \leq \gamma \leq 1$, $0 \leq \delta \leq 1$ gilt, und definieren den Raum $\widetilde{\mathbf{C}}_{\gamma,\delta}(-1,1)$ als den Raum der stetigen Funktionen $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{C}$, für die $(v^{\gamma,\delta} f)(x)$ auf $[-1,1]$ stetig fortsetzbar ist, d.h., es existieren die endlichen Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\pm1\mp0} v^{\gamma,\delta}(x) f(x)$, die wir mit $(v^{\gamma,\delta} f)(\pm 1)$ bezeichnen. Versehen mit der Norm
$$\|f\|_{\infty,\gamma,\delta} := \max\left\{ \left|(v^{\gamma,\delta} f)(x)\right| : -1 \leq x \leq 1 \right\} = \sup\left\{ \left|(v^{\gamma,\delta} f)(x)\right| : -1 < x < 1 \right\} ,$$
wird $\left(\widetilde{\mathbf{C}}_{\gamma,\delta}(-1,1), \|.\|_{\infty,\gamma,\delta}\right)$ zu einem Banachraum.

Wir betrachten im Raum $\mathbf{X} := \widetilde{\mathbf{C}}_{\gamma,\delta}(-1,1)$ eine Integralgleichung der Gestalt
$$u(x) - \int_{-1}^1 k(x,y) u(y)\, dy = f(x)\,, \quad -1 < x < 1 \tag{1.10}$$
zusammen mit der Nyström-Methode
$$u_n(x) - \sum_{r=1}^n \lambda_{nr} k(x, x_{nr}) u_n(x_{nr}) = f(x)\,, \quad -1 < x < 1\,. \tag{1.11}$$
Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

(A) Die Funktion $\widetilde{k} : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig, wobei
$$\widetilde{k}(x,y) = v^{\gamma,\delta}(x) k(x,y) v^{\alpha,\beta}(y)$$
und $0 \leq \alpha + \gamma < 1$, $0 \leq \beta + \delta < 1$.

(B) Die Quadraturformel

$$Q_n g = \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} g(x_{nr})$$

konvergiere auf allen Funktionen $g \in \widetilde{\mathbf{C}}_{\alpha+\gamma,\beta+\delta}(-1,1)$ gegen das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$.

Aus (A) folgt $K \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ mit $\mathbf{X} = \widetilde{\mathbf{C}}_{\gamma,\delta}(-1,1)$, und aus (B) folgt die Existenz einer Konstanten $M \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{|\lambda_{nr}|}{v^{\alpha+\gamma,\beta+\delta}(x_{nr})} \le M \quad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

Die Folge der Operatoren $K_n : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ mit

$$(K_n g)(x) = \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} k(x, x_{nr}) g(x_{nr})$$

erweist sich als kollektiv kompakt und stark konvergent gegen $K : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$,

$$(Kg)(x) = \int_{-1}^{1} k(x,y) g(y)\,dy .$$

Begründung: Aus (A) folgt

$$\|Ku\|_{\infty,\gamma,\delta} = \sup_{x\in(-1,1)} \left| \int_{-1}^{1} \widetilde{k}(x,y) v^{-\alpha,-\beta}(y) u(y)\,dy \right| \le \left\|\widetilde{k}\right\|_{\infty} \int_{-1}^{1} v^{-\alpha-\gamma,-\beta-\delta}(y)\,dy\, \|u\|_{\infty,\gamma,\delta}$$

und somit $\|K\|_{\widetilde{\mathbf{C}}_{\gamma,\delta}\to\widetilde{\mathbf{C}}_{\gamma,\delta}} \le \left\|\widetilde{k}\right\|_{\infty} \displaystyle\int_{-1}^{1} v^{-\alpha-\gamma,-\beta-\delta}(y)\,dy$. Aus (B) folgt

$$\|Q_n\|_{\widetilde{\mathbf{C}}_{\alpha+\gamma,\beta+\delta}\longrightarrow\mathbb{C}} \le M < \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N} ,$$

wobei

$$\|Q_n\|_{\widetilde{\mathbf{C}}_{\alpha+\gamma,\beta+\delta}\longrightarrow\mathbb{C}} = \sup\left\{ \left| \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} g(x_{nr}) \right| : \|g\|_{\infty,\alpha+\gamma,\beta+\delta} \le 1 \right\} = \sum_{r=1}^{n} \frac{|\lambda_{nr}|}{v^{\alpha+\gamma,\beta+\delta}(x_{nr})} .$$

Die Menge $\left\{ v^{\gamma,\delta} K_n g : \|g\|_{\infty,\gamma,\delta} \le 1 \right\}$ ist eine auf $[-1,1]$ gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Funktionenfamilie. Für $\|g\|_{\infty,\gamma,\delta} \le 1$ und $x_1, x_2 \in [-1,1]$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} &\left| v^{\gamma,\delta}(x_1) \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} k(x_1, x_{nr}) g(x_{nr}) - v^{\gamma,\delta}(x_2) \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr} k(x_2, x_{nr}) g(x_{nr}) \right| \\ &\quad \le \sum_{r=1}^{n} \frac{|\lambda_{nr}|}{v^{\alpha+\gamma,\beta+\delta}(x_{nr})} \left| \widetilde{k}(x_1, x_{nr}) - \widetilde{k}(x_2, x_{nr}) \right| \\ &\quad \le M \max\left\{ \left| \widetilde{k}(x_1, y) - \widetilde{k}(x_2, y) \right| : y \in [-1,1] \right\} , \end{aligned}$$

so dass für die gleichgradige Stetigkeit nur noch die gleichmäßige Stetigkeit von $\widetilde{k} : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ zu nutzen bleibt. Die gleichmäßige Beschränktheit folgt bereits aus der gleichmäßigen Beschränktheit der $K_n : \widetilde{\mathbf{C}}_{\gamma,\delta} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{C}}_{\gamma,\delta}$. Somit bleibt noch die starke Konvergenz der K_n in $\widetilde{\mathbf{C}}_{\gamma,\delta}$ zu zeigen. Nach Voraussetzung gilt für $g \in \widetilde{\mathbf{C}}_{\gamma,\delta}$

$$v^{\gamma,\delta}(x)\,(K_n g)(x) = Q_n\left(\widetilde{k}(x,.) v^{-\alpha,-\beta} g \right) \longrightarrow v^{\gamma,\delta}(x)\,(Kg)(x) \quad \forall\, x \in [-1,1] ,$$

weil $v^{-\alpha,-\beta}g \in \widetilde{\mathbf{C}}_{\alpha+\gamma,\beta+\delta}$ und somit auch $\widetilde{k}(x,.)v^{-\alpha,-\beta}g \in \widetilde{\mathbf{C}}_{\alpha+\gamma,\beta+\delta}$ gilt. Alles Weitere ergibt sich wie in Abschnitt 1.3, Punkt 4.

Damit können wir Satz 1.2 auf (1.10) und (1.11) im Raum $\mathbf{X} := \widetilde{\mathbf{C}}_{\gamma,\delta}(-1,1)$ anwenden, falls die Voraussetzungen (A) und (B) erfüllt sind.

Abschließend bemerken wir noch, dass die Menge der algebraischen Polynome im Raum $\widetilde{\mathbf{C}}_{\gamma,\delta}(-1,1)$ nicht dicht ist, aber im abgeschlossenen Teilraum

$$\mathbf{C}_{\gamma,\delta}(-1,1) :=$$

$$\left\{g \in \widetilde{\mathbf{C}}_{\gamma,\delta}(-1,1) : \left(v^{\gamma,\delta}g\right)(1-0) = 0,\ \text{falls } \gamma > 0;\ \left(v^{\gamma,\delta}g\right)(-1+0) = 0,\ \text{falls } \delta > 0\right\}.$$

1.5 Schwach singuläre Kerne

Den Kern $k : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ des Integraloperators K mit

$$(Kg)(x) := \int_{-1}^{1} k(x,y)g(y)\,dy \tag{1.12}$$

nennt man **schwach singulär**, falls er auf $[-1,1]^2 \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}$ stetig ist und die Bedingung

$$|k(x,y)| \le c\,|x-y|^{-\alpha} \quad \forall\,(x,y) \in [-1,1]^2 : x \ne y \tag{1.13}$$

mit Konstanten $c \in \mathbb{R}$ und $0 \le \alpha < 1$ erfüllt.

Lemma 1.3 *Sind* $\mathbf{X}$ *ein normierter Raum und* $\mathbf{Y}$ *ein Banachraum, so ist* $\mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ *ein abgeschlossener linearer Teilraum von* $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ *.*

Beweis. Es seien $A := \{Kx : x \in \mathbf{X},\ \|x\| \le 1\}$, $K_n \in \mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ und $\lim \|K_n - K\| = 0$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig. Für $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|K_{n_0} - K\| < \delta$. Sei $N := \{K_{n_0}x_j : j = 1,\ldots,m_0\}$ ein endliches δ-Netz für $A_0 := \{K_{n_0}x : x \in \mathbf{X},\ \|x\| \le 1\}$. Somit existiert für jedes $x \in \mathbf{X}$ mit $\|x\| \le 1$ ein $j_x \in \{1,\ldots,m_0\}$, so dass $\|K_{n_0}x - K_{n_0}x_{j_x}\| < \delta$. Es folgt

$$\|Kx - K_{n_0}x_{j_x}\| \le \|K - K_{n_0}\| + \|K_{n_0}x - K_{n_0}x_{j_x}\| < \varepsilon\,,$$

so dass N ein endliches ε-Netz für A ist, woraus $K \in \mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ folgt. □

Satz 1.4 *Sind* $\mathbf{X} := \mathbf{C}[-1,1]$ *und* $k : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *schwach singulär, so ist* $K : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, *definiert in* (1.12)*, kompakt.*

Beweis. Ist $g \in \mathbf{C}[-1,1]$, so existiert $(Kg)(x)$ für alle $x \in [-1,1]$ als uneigentliches Integral. Wir definieren

$$\chi(t) := \left\{\begin{array}{ccc} 0 & : & 0 \le t \le \frac{1}{2}\,, \\ 2t-1 & : & \frac{1}{2} < t \le 1\,, \\ 1 & : & 1 < t\,, \end{array}\right\}$$

und

$$k_n(x,y) := \left\{\begin{array}{ccc} \chi(n|x-y|)\,k(x,y) & : & (x,y) \in [-1,1]^2,\ x \ne y\,, \\ 0 & : & x = y \in [-1,1]\,. \end{array}\right\}$$

Wegen $\chi(t) \le t\ \forall\, t \ge 0$ folgt $|k_n(x,y)| \le c\,n|x-y|^{1-\alpha}$, so dass $k_n : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} |(Kg)(x) - (K_ng)(x)| &= \left|\int_{-1}^{1}[k(x,y) - k_n(x,y)]g(y)\,dy\right| \\ &= \left|\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}[k(x,y) - k_n(x,y)]g(y)\,dy\right| \le 2c\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |x-y|^{-\alpha}\,dy\,\|g\|_\infty\,, \end{aligned}$$

wobei

$$\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |x-y|^{-\alpha}\,dy = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x} (x-y)^{-\alpha}\,dy + \int_{x}^{x+\frac{1}{n}} (y-x)^{-\alpha}\,dy = \frac{2}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \longrightarrow 0$$

für $n \longrightarrow \infty$ gilt. Es bleibt Lemma 1.3 anzuwenden. □

Wir versuchen nun den Operator K in (1.12) durch Operatoren der Gestalt

$$(K_n g)(x) := \sum_{r=1}^{n} \omega_{nr}(x) g(x_{nr}) \tag{1.14}$$

mit stetigen Funktionen $\omega_{nr} : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ und $-1 \le x_{nn} < \ldots < x_{n1} \le 1$ zu approximieren. Dazu verwenden wir folgendes Lemma.

Lemma 1.5 ([30], Section 2) *Sei* $\mathbf{X} := \mathbf{C}[-1,1]$. *Die Operatorfolge* $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ *aus* (1.14) *ist genau dann in* $\mathbf{X}$ *kollektiv kompakt und stark konvergent gegen* K *aus* (1.12), *wenn*

(K1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \omega_{nr}(x) g(x_{nr}) = \int_{-1}^{1} k(x,y) g(y)\,dy$ *für alle* $x \in [-1,1]$ *und alle* $g \in \mathbf{X}$

und

(K2) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \sup \left\{ \sum_{r=1}^{n} |\omega_{nr}(x) - \omega_{nr}(x_0)| : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$ *für alle* $x_0 \in [-1,1]$

gilt.

Beweis. Wir setzen $\omega_n(x) := \displaystyle\sum_{r=1}^{n} |\omega_{nr}(x)|$. Es folgt $|(K_n g)(x)| \le \omega_n(x) \|g\|_\infty$ und somit $\|K_n\| \le \|\omega_n\|_\infty$. Für $\varepsilon > 0$ und $\widetilde{x} \in [-1,1]$ definieren wir die stetige Funktion $g_{\varepsilon,\widetilde{x}} : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ durch die Bedingungen

$$g_{\varepsilon,\widetilde{x}}(x_{nr}) = \frac{\overline{\omega_{nr}(\widetilde{x})}}{|\omega_{nr}(\widetilde{x})| + \varepsilon}\,, \quad r = 1, \ldots, n\,,$$

und die Forderung, dass $g_{\varepsilon,\widetilde{x}}$ auf $[x_{n,r+1}, x_{nr}]$ linear ist. Dann ist $\|g_{\varepsilon,\widetilde{x}}\|_\infty < 1$ und

$$\left(K_n g_{\varepsilon,\widetilde{x}}\right)(\widetilde{x}) = \sum_{r=1}^{n} \frac{|\omega_{nr}(\widetilde{x})|^2}{|\omega_{nr}(\widetilde{x})| + \varepsilon} =: \omega_{n,\varepsilon}(\widetilde{x})\,.$$

Es folgt $\|K_n g_{\varepsilon,\widetilde{x}}\|_\infty \ge \omega_{n,\varepsilon}(\widetilde{x})$ für alle $\widetilde{x} \in [-1,1]$ und somit $\|K_n\| \ge \|\omega_{n,\varepsilon}\|_\infty \ \forall\, \varepsilon > 0$.

Wir nehmen nun an, dass (K1) und (K2) erfüllt sind. Für $g \in \mathbf{C}[-1,1]$ und $\|g\|_\infty \le 1$ sowie $x, x_0 \in [-1,1]$ gilt nun wegen (K2)

$$|(K_n g)(x) - (K_n g)(x_0)| \le \sum_{r=1}^{n} |\omega_{nr}(x) - \omega_{nr}(x_0)| < \varepsilon$$

für alle $x \in [-1,1] : |x - x_0| < \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$. Also ist $\{K_n g : g \in \mathbf{C}[-1,1],\ \|g\|_\infty \le 1,\ n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig in jedem $x_0 \in [-1,1]$, woraus die gleichgradige Stetigkeit dieser Menge auf $[-1,1]$ folgt (siehe Übungsaufgabe 1.6). Aus (K1) folgt $(K_n g)(x) \longrightarrow (Kg)(x)\ \forall\, x \in [-1,1]$. Wir nehmen an, dass diese Konvergenz nicht gleichmäßig ist, d.h., dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k > n_{k-1}$ $(n_0 := 0)$ und ein $x_k \in [-1,1]$ gibt mit

$$|(K_{n_k} g)(x_k) - (Kg)(x_k)| \ge \varepsilon\,.$$

Dabei können wir annehmen, dass $x_k \longrightarrow x^*$ für ein $x^* \in [-1,1]$ und $k \longrightarrow \infty$ gilt. Es existieren ein $\delta > 0$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|(K_n g)(x_1) - (K_n g)(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (Kg)(x_1) - (Kg)(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, x_1, x_2 \in [-1,1] : |x_1 - x_2| < \delta\,,$$

$$|x_{k_0} - x^*| < \delta \quad \text{und} \quad |(K_{n_{k_0}} g)(x^*) - (Kg)(x^*)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Es folgt

$$\begin{aligned}\left|(K_{n_{k_0}} g)(x_{k_0}) - (Kg)(x_{k_0})\right| \le \left|(K_{n_{k_0}} g)(x_{k_0}) - (K_{n_{k_0}} g)(x^*)\right| + \left|(K_{n_{k_0}} g)(x^*) - (Kg)(x^*)\right| \\ + |(Kg)(x^*) - (Kg)(x_{k_0})| < \varepsilon\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Konstruktion der Folgen (n_k) und (x_k). Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \|K_n g - Kg\|_\infty = 0$ für alle $g \in \mathbf{C}[-1,1]$, woraus auch $\|K_n\| \le M < \infty \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ folgt. Damit ist die Menge $\{K_n g : g \in \mathbf{C}[-1,1],\, \|g\|_\infty \le 1,\, n \in \mathbb{N}\}$ auch gleichmäßig beschränkt und somit die Folge $(K_n)_{n=1}^\infty$ kollektiv kompakt.

Es seien nun $(K_n)_{n=1}^\infty$ kollektiv kompakt und $K_n \longrightarrow K$ in $\mathbf{X} = \mathbf{C}[-1,1]$. Es folgt sofort (K1) wegen $\|K_n g - Kg\|_\infty \longrightarrow 0$ für alle $g \in \mathbf{X}$. Aus der kollektiven Kompaktheit folgt die gleichgradige Stetigkeit der Familie $\{K_n g : g \in \mathbf{X},\, \|g\| \le 1,\, n \in \mathbb{N}\}$, also

$$\lim_{x\to x_0} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{g\in\mathbf{X}, \|g\|\le 1} |(K_n g)(x) - (K_n g)(x_0)| = 0\,.$$

Offenbar ist

$$\sup_{g\in\mathbf{X}, \|g\|\le 1} |(K_n g)(x) - (K_n g)(x_0)| \le \sum_{r=1}^n |\omega_{nr}(x) - \omega_{nr}(x_0)|\;.$$

Wie oben können wir sogar die Gleichheit zeigen. Daraus folgt (K2). □

Übungsaufgabe 1.6 *Zeigen Sie, dass sich aus der (lokalen) gleichgradigen Stetigkeit einer Folge von Funktionen $f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ in jedem Punkt $x_0 \in [-1,1]$ die (globale) gleichgradige Stetigkeit dieser Folge ergibt.*

Wir geben nun eine Möglichkeit an, wie man zu geeigneten Approximationen der Gestalt (1.14) kommen kann. Gegeben seien uns ein stetig in $\mathbf{L}^1 = \mathbf{L}^1(-1,1)$ eingebetteter Banachraum $\mathbf{Z}$, d.h., es existiert ein $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ mit $\|f\|_{\mathbf{L}^1} \le \gamma_0 \|f\|_{\mathbf{Z}} \;\forall\, f \in \mathbf{Z}$, und eine Quadraturformel

$$Q_n^f g = \sum_{r=1}^n \lambda_{nr}(f) g(x_{nr})\,, \quad -1 \le x_{nn} < \ldots < x_{n1} \le 1 \tag{1.15}$$

mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} Q_n^f g = \int_{-1}^1 f(y) g(y)\, dy \quad \forall\, g \in \mathbf{X} := \mathbf{C}[-1,1]\,,\; \forall\, f \in \mathbf{Z}\,, \tag{1.16}$$

wobei $\lambda_{nr} \in \mathbf{Z}^*$, $r = 1, \ldots, n$ gelte. Unter diesen Voraussetzungen wollen wir dann in (1.14)

$$\omega_{nr}(x) = \lambda_{nr}(s_x) k_0(x, x_{nr}) \tag{1.17}$$

setzen, falls der Kern des Integraloperators K in der Form $k(x,y) = s(|x-y|) k_0(x,y)$ mit stetigen Funktionen $k_0 : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ und $s : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ geschrieben werden kann, wobei

$$|s(t)| \le \gamma_1 |t|^{-\alpha}\,, \quad 0 \le \alpha < 1 \quad \text{und} \quad s_x(y) = s(|x-y|)\,. \tag{1.18}$$

Lemma 1.7 ([30], Theorem 2) *Gilt neben* (1.16) *auch* $s_x \in \mathbf{Z}\ \forall\, x \in [-1,1]$ *und*

$$\lim_{x \to x_0} \|s_x - s_{x_0}\|_{\mathbf{Z}} = 0 \quad \forall\, x_0 \in [-1,1]\,,$$

so sind mit der Definition (1.17) *die Bedingungen* (K1) *und* (K2) *aus Lemma 1.5 erfüllt.*

Beweis. Für $g \in \mathbf{X} := \mathbf{C}[-1,1]$ gilt auch $k_0(x,.)g \in \mathbf{C}[-1,1]$, so dass

$$\sum_{r=1}^{n} \omega_{nr}(x) g(x_{nr}) = \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr}(s_x) k_0(x, x_{nr}) g(x_{nr}) \longrightarrow \int_{-1}^{1} s_x(y) k_0(x,y) g(y)\, dy = (Kg)(x)$$

für alle $x \in [-1,1]$ aus (1.16) und $s_x \in \mathbf{Z}$ folgt. Also is (K1) erfüllt. Zum Beweis der Gültigkeit von (K2) definieren wir $\lambda_n : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{X}^*$ durch

$$(\lambda_n f)(g) = \sum_{r=1}^{n} \lambda_{nr}(f) g(x_{nr})\,.$$

Es folgt $\lambda_n \in \mathcal{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{X}^*)$, da $\|\lambda_n f\|_{\mathbf{X}^*} \le \sum_{r=1}^{n} \|\lambda_{nr}\|_{\mathbf{Z}^*} \|f\|_{\mathbf{Z}}$ gilt. Aus (1.16) und dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt nacheinander

$$\sup\{|(\lambda_n f)(g)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \quad \forall\, g \in \mathbf{X}\,,\ \forall\, f \in \mathbf{Z}\,,$$

$$\sup\{\|\lambda_n f\|_{\mathbf{X}^*} : n \in \mathbb{N}\} < \infty \quad \forall\, f \in \mathbf{Z}\,,$$

$$M := \sup\{\|\lambda_n\|_{\mathbf{Z} \to \mathbf{X}^*} : n \in \mathbb{N}\} < \infty\,,$$

$$\sum_{r=1}^{n} |\lambda_{nr}(f)| = \|\lambda_n f\|_{\mathbf{X}^*} \le M \|f\|_{\mathbf{Z}} \quad \forall\, f \in \mathbf{Z}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

$$\sum_{r=1}^{n} |\lambda_{nr}(f) - \lambda_{nr}(f_0)| \le M \|f - f_0\|_{\mathbf{Z}} \quad \forall\, f, f_0 \in \mathbf{Z}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n} |\omega_{nr}(x) - \omega_{nr}(x_0)| &= \sum_{r=1}^{n} |\lambda_{nr}(s_x) k_0(x, x_{nr}) - \lambda_{nr}(s_{x_0}) k_0(x_0, x_{nr})| \\
&\le \sum_{r=1}^{n} |\lambda_{nr}(s_x) - \lambda_{nr}(s_{x_0})|\ |k_0(x, x_{nr})| + \sum_{r=1}^{n} |\lambda_{nr}(s_{x_0})|\ |k_0(x, x_{nr}) - k_0(x_0, x_{nr})| \\
&\le M \|s_x - s_{x_0}\|_{\mathbf{Z}} \|k_0\|_\infty + M \|s_{x_0}\|_{\mathbf{Z}} \|k_0(x,. - k_0(x_0,.)\|_\infty \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow x_0)\,,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Abschließend betrachten wir eine Methode zur Konstruktion von Quadraturformeln Q_n^f der Gestalt (1.15) mit der Eigenschaft (1.16), die sog. **Produktintegrationsmethode** . Mit $(L_n g)(x)$ bezeichnen wir das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom vom Grad $< n$, welches den Bedingungen $(L_n g)(x_{nr}) = g(x_{nr})$, $r = 1, \ldots, n$ genügt, also

$$(L_n g)(x) = \sum_{r=1}^{n} g(x_{nr}) \ell_{nr}(x)$$

mit den Lagrange'schen Grundpolynomen $\ell_{nr}(x)$ bzgl. der Knoten $\{x_{nr} : r = 1, \ldots, n\}$. Wir definieren

$$Q_n^f g = \int_{-1}^{1} f(x) (L_n g)(x)\, dx\,,$$

d.h. $\lambda_{nr}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\ell_{nr}(x)\,dx$. Als Voraussetzung genügt vorerst $f \in \mathbf{L}^1(-1,1)$.

Beispiel 1.8 *Wir wählen die Tschebyscheff-Knoten* $x_{nr} = x_{nr}^\sigma = \cos\frac{2r-1}{2n}\pi$, $r = 1,\ldots,n$, *d.h. die Nullstellen des* n*-ten (normierten) Tschebyscheff-Polynoms erster Art*

$$T_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & : \ n = 0\,, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(ns) & : \ n > 1\,, \end{cases}$$

wobei $x = \cos s$ *zu setzen ist. Für Funktionen* $g \in \mathbf{C}[-1,1]$ *und* $q > 1$ *gilt (vgl. [18, Cor. 4.2])*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \left|(L_n g)(x) - g(x)\right|^q \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0\,. \tag{1.19}$$

Somit kann man für $\mathbf{Z}$ *den stetig in* $\mathbf{L}^1(-1,1)$ *eingebetteten Banachraum*

$$\mathbf{Z} := \left\{ h \in \mathbf{L}^1 : \|h\|_{\mathbf{Z}} := \left(\int_{-1}^{1} |h(x)|^p \left(1-x^2\right)^{\frac{p-1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

für ein $p > 1$ *verwenden. Dabei ergibt sich die stetige Einbettung von* $\mathbf{Z}$ *in* $\mathbf{L}^1(-1,1)$ *aus*

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx \le \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p (1-x^2)^{\frac{p-1}{2}}\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

wobei wir die **Hölder'sche Ungleichung**

$$\int_{-1}^{1} |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-1}^{1} |g(x)|^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

angewendet haben. Die Gültigkeit von (1.16) *folgt analog aus*

$$\begin{aligned} \left| Q_n^f g - \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \right| &\le \int_{-1}^{1} |f(x)||(L_n g)(x) - g(x)|\,dx \\ &\le \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p (1-x^2)^{\frac{p-1}{2}}\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-1}^{1} |(L_n g)(x) - g(x)|^q \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

und (1.19).

Beispiel 1.9 *Sei* $k(x,y) = \frac{\ln|x-y|}{\sqrt{1-y^2}} k_0(x,y)$ *mit einer stetigen Funktion* $k_0 : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$. *Wir verwenden die Produktintegrationsmethode mit den Knoten* x_{nr}^σ *aus Beispiel 1.8 und berechnen*

$$\lambda_{nr}(s_x) \quad \textit{mit} \quad s_x(y) = \frac{\ln|x-y|}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

Wir schreiben dazu $(L_n g)(x)$ *in der Form*

$$(L_n g)(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \beta_m(g) T_m(x)\,,$$

wobei wegen der Orthogonalitätsrelationen der $T_m(x)$ und der algebraischen Genauigkeit der entsprechenden Gauß'schen Quadraturformel

$$\beta_m(g) = \int_{-1}^{1} (L_n g)(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{r=1}^{n} g(x_{nr}) T_m(x_{nr})$$

gilt. Es folgt

$$(L_n g)(x) = \frac{\pi}{n} \sum_{r=1}^{n} \sum_{m=0}^{n-1} T_m(x_{nr}) T_m(x) g(x_{nr}) \,,$$

so dass

$$\lambda_{nr}(s_x) = \frac{\pi}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{-1}^{1} s_x(y) T_m(y)\, dy\, T_m(x_{nr}) \,, \quad r = 1, \ldots, n$$

gilt. Unter Verwendung der Formeln (vgl. [6, S. 296] oder [17, (5.2)])

$$\int_{-1}^{1} \ln|x-y|\, T_m(y) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \begin{cases} -\pi \ln 2\, T_0(x) & : \quad m = 0 \,, \\ -\dfrac{\pi}{m}\, T_m(x) & : \quad m > 0 \,, \end{cases}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_{nr}(s_x) &= -\frac{\pi^2}{n} \left[\ln 2\, T_0(x_{nr}) T_0(x) + \frac{1}{m} \sum_{m=1}^{n-1} T_m(x_{nr}) T_m(x) \right] \\ &= -\frac{\pi}{n} \left[\ln 2 + \sqrt{2} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos\left(\frac{m(2r-1)}{2n} \pi \right) \cos(ms) \right] \,, \quad x = \cos s \,. \end{aligned}$$

1.6 Volterra'sche Integralgleichungen

Wir betrachten nun eine **Volterra'sche Integralgleichung** der Gestalt

$$u(x) - \int_{-1}^{x} k(x,y) u(y)\, dy = f(x) \,, \quad -1 \le x \le 1 \tag{1.20}$$

mit einer stetigen Funktion $k : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le x \le 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Satz 1.10 *Die Gleichung* (1.20) *hat für jedes* $f \in \mathbf{X} := \mathbf{C}[-1,1]$ *eine eindeutige Lösung* $u \in \mathbf{X}$.

Beweis. Der Integraloperator in (1.20) ist ein schwach singulärer mit $\alpha = 0$ in (1.13). Nach Satz 1.4 brauchen wir also nur noch zu zeigen, dass für $f(x) \equiv 0$ die Gleichung (1.20) nur die triviale Lösung besitzt. Es seien also

$$u(x) = \int_{-1}^{x} k(x,y) u(y)\, dy \,, \quad -1 \le x \le 1 \tag{1.21}$$

und $M := \|k\|_\infty$. Wir zeigen die Gültigkeit von

$$|u(x)| \le \frac{M^n \|u\|_\infty (x+1)^n}{n!} \,, \quad -1 \le x \le 1 \,,\ n \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{1.22}$$

Für $n = 0$ ist (1.22) offenbar richtig. Gilt (1.22) für $n = m$, so folgt aus (1.21)

$$|u(x)| \le \frac{M^{n+1} \|u\|_\infty}{n!} \int_{-1}^{x} (y+1)\, dy = \frac{M^{n+1} \|u\|_\infty (x+1)^{n+1}}{(n+1)!} \,, \quad -1 \le x \le 1 \,.$$

Mit $n \longrightarrow \infty$ erhalten wir $u(x) \equiv 0$. □

Folgerung 1.11 *Der Spektralradius* $r(K) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(K)\}$ *des Volterra-Operators* $K : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ *mit* $\mathbf{X} = \mathbf{C}[-1,1]$ *und*

$$(Ku)(x) = \int_{-1}^{x} k(x,y)u(y)\,dy$$

mit stetigem Kern $k(x,y)$ *ist gleich Null.*

Aus dieser Folgerung kann man schließen, dass die Methode der sukzessiven Approximation

$$u_{n+1} = Ku_n + f\,, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.23}$$

für jedes $u_0 \in \mathbf{X}$ in der Norm des Raumes $\mathbf{X} = \mathbf{C}[-1,1]$ konvergiert. Allgemein gilt nämlich für $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$, $\mathbf{X}$ ein Banachraum:

1. Konvergiert für ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j-1} A^j \tag{1.24}$$

   in der Operatornorm, so ist ihre Summe gleich $(\lambda I - A)^{-1}$.

2. Für $\lambda_0 \in \rho(A)$ (Resolventenmenge von A) und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \lambda_0| \cdot \left\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\right\| < 1$ konvergiert

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^j \left[(\lambda_0 I - A)^{-1}\right]^{j+1}$$

   in der Operatornorm gegen $(\lambda I - A)^{-1}$. Damit ist die Abbildung

$$\rho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{X})\,, \quad \lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}$$

   holomorph. Da die Reihe (1.24) für $|\lambda| > \|A\|$ konvergiert, ist sie die eindeutig bestimmte Laurentreihe für $(\lambda I - A)^{-1}$ im unendlich fernen Punkt und somit konvergent für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > r(A)$.

3. Aus (1.23) folgt

$$u_n = K^n u_0 + \sum_{j=0}^{n-1} K^j f \longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} K^j f = (I - K)^{-1} f\,,$$

   da $\lambda = 1 \in \rho(K)$.

Eine spezielle (schwach singuläre) Volterra'sche Integralgleichung ist die **Abel'sche Integralgleichung** (erster Art)

$$\int_0^x \frac{u(y)\,dy}{(x-y)^{\alpha}} = f(x)\,, \quad x > 0 \tag{1.25}$$

mit $0 < \alpha < 1$ und $f \in \mathbf{X} = \mathbf{C}[0,\infty)$. Nimmt man an, dass (1.25) eine stetige Lösung besitzt, so erhält man durch Multiplikation mit $(z-x)^{\alpha-1}$ und Integration $\displaystyle\int_0^z dx$ beider Seiten von (1.25)

$$\int_0^z \int_0^x \frac{u(y)\,dy}{(x-y)^{\alpha}} \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}} = \int_0^z \frac{f(x)\,dx}{(z-x)^{1-\alpha}}\,,$$

wobei man auf der linken Seite die Integrationsreihenfolge vertauschen kann, so dass diese gleich

$$\int_0^z \int_y^z \frac{dx}{(x-y)^\alpha (z-x)^{1-\alpha}} \, u(y)\, dy$$

ist. Die Substitution $w = \dfrac{z-x}{z-y}$ liefert

$$\int_y^z \frac{dx}{(x-y)^\alpha (z-x)^{1-\alpha}} = \int_0^1 \frac{dw}{(1-w)^\alpha w^{1-\alpha}} = B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

mit der Betafunktion $B(\alpha, \beta)$ und der Gammafunktion $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$. Es folgt

$$\int_0^z u(y)\, dy = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^z \frac{f(x)\, dx}{(z-x)^{1-\alpha}}$$

und mittels Differentiation

$$u(x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(y)\, dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \tag{1.26}$$

bzw. unter der Voraussetzung $f' \in \mathbf{C}[0, \infty)$

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \left[-\frac{f(y)(x-y)^\alpha}{\alpha} \right]_0^x + \frac{1}{\alpha} \int_0^x (x-y)^\alpha f'(y)\, dy \right\} \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{f(0)x^\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_0^x (x-y)^\alpha f'(y)\, dy \right\} \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(y)\, dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \right] . \end{aligned}$$

Bemerkung: Formel (1.26) kann man auch durch Anwendung der **Laplace-Transformation** auf die Gleichung (1.25) gewinnen. Unter der **Laplace-Transformierten** $U(s)$ einer Funktion $u : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ verstehen wir die Funktion $U : (\sigma, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$, die durch

$$U(s) = \int_0^\infty e^{-sy} u(y)\, dy$$

definiert ist, wobei $\sigma = si(u)$ im Allgemeinen von u abhängt. Auf (1.25) angewendet folgt $U(s)K(s) = F(s)$, wobei

$$K(s) = \int_0^\infty e^{-sy} \frac{dy}{y^\alpha} = s^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-x} x^{-\alpha}\, dx = s^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) .$$

Wir erhalten

$$U(s) = \frac{F(s)s^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{F(s)s^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\, s \left[\Gamma(\alpha) s^{-\alpha} F(s) \right] .$$

Anwendung des Faltungs- und des Differentiationssatzes für die Laplace-Transformation liefern wieder die Formel (1.26).

Kapitel 2

Wiener-Hopf'sche Integralgleichungen

In diesem Kapitel interessieren wir uns für Gleichungen der Gestalt

$$u(x) - \int_0^x k(x-y)u(y)\,dy\,, \quad 0 < x < \infty\,, \tag{2.1}$$

wobei $k \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ gelten soll.

2.1 Faltungsoperatoren

Mit $\|.\|_p$ bezeichnen wir die Norm in $\mathbf{L}^p(\mathbb{R})$ oder in $\mathbf{L}^p(0,\infty)$, d.h.

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{oder} \quad \|f\|_p = \left(\int_0^{\infty} |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}\,, \quad 1 \le p < \infty\,.$$

Lemma 2.1 (Young'sche Ungleichung) *Es seien $f \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R})$, $g \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R})$, $p \ge 1$, $q \ge 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ und*

$$h(x) = (f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

die **Faltung** *der Funktionen f und g. Dann gilt*

$$\|h\|_r \le \|f\|_p \, \|g\|_q\,.$$

Beweis. Für reelle Zahlen $\lambda, \mu, \nu \in (1,\infty)$ mit $\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\nu} = 1$ folgt mittels zweifacher Anwendung der Hölder'schen Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(x)h(x)|\,dx \\
&\quad \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)g(x)|^{\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}}\,dx \right)^{\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^{\nu}\,dx \right)^{\frac{1}{\nu}} \\
&\quad \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{\lambda}\,dx \right)^{\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}\,\frac{\mu}{\lambda+\mu}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^{\mu}\,dx \right)^{\frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}\,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^{\nu}\,dx \right)^{\frac{1}{\nu}} \\
&\quad = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{\lambda}\,dx \right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^{\mu}\,dx \right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^{\nu}\,dx \right)^{\frac{1}{\nu}}\,.
\end{aligned}$$

Schreiben wir

$$|f(x-y)| \cdot |g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{p}{\lambda}} |g(y)|^{\frac{q}{\lambda}} |f(x-y)|^{p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda}\right)} |g(y)|^{q\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\lambda}\right)} ,$$

so folgt

$$\begin{aligned} |(f*g)(x)| &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^p |g(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{\lambda}} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^{p\mu\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda}\right)} dy \right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^{q\nu\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\lambda}\right)} dy \right)^{\frac{1}{\nu}} . \end{aligned}$$

Wählen wir $\lambda = r$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$ und $\frac{1}{q} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\nu}$, so ist das Produkt der letzten beiden Faktoren gleich

$$\|f\|_p^{\frac{p}{\mu}} \, \|g\|_q^{\frac{q}{\nu}} ,$$

so dass

$$\begin{aligned} \|f*g\|_r &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |(f*g)(x)|^\lambda \, dx \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\ &\leq \|f\|_p^{\frac{p}{\mu}} \, \|g\|_q^{\frac{q}{\nu}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^p \, dx \, |g(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\ &= \|f\|_p^{\frac{p}{\mu}} \, \|g\|_q^{\frac{q}{\nu}} \, \|f\|_p^{\frac{p}{\lambda}} \, \|g\|_q^{\frac{q}{\lambda}} = \|f\|_p \, \|q\|_q , \end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Folgerung 2.2 *Für* $1 \leq p < \infty$ *gilt*

(a) $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p \; \forall \, f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \, , \; \forall \, g \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}) \, ,$

(b) $\|h\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p \; \forall \, f \in \mathbf{L}^1(0,\infty) \, , \; \forall \, g \in \mathbf{L}^p(0,\infty) \, ,$ *wobei*

$$h(x) = \int_0^x f(x-y) g(y) \, dy \, , \quad 0 < x < \infty \, ,$$

die **Faltung** *von* f *und* g *ist,*

(c) *Die Operatoren* $K : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ *und* $\widetilde{K} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ *mit* $k \in \mathbf{L}^1(0,\infty)$ *und*

$$(Ku)(x) = \int_0^x k(x-y) u(y) \, dy \quad \textit{sowie} \quad (\widetilde{K}u)(x) = \int_x^\infty k(y-x) u(y) \, dy \, , \quad 0 < x < \infty$$

gehören zu $\mathcal{L}(\mathbf{X})$, *wobei* $\mathbf{X} = \mathbf{L}^p(0,\infty)$, $1 \leq p < \infty$. *Dabei gilt* $\|K\| \, , \, \|\widetilde{K}\| \leq \|k\|_1$.

Aus Folgerung 2.2,(c) erhalten wir für $k(x) = 2e^{-x}$, dass die Operatoren V und W mit

$$(Vu)(x) = u(x) - 2 \int_0^x e^{y-x} u(y) \, dy \text{ und } (Wu)(x) = u(x) - 2 \int_x^\infty e^{x-y} u(y) \, dy \, , \quad 0 < x < \infty$$

zu $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ mit $\mathbf{X} = \mathbf{L}^p(0,\infty)$, $1 \leq p < \infty$ gehören. Dabei gilt

$$WV = I \quad \text{und} \quad VW \neq I \, . \tag{2.2}$$

Das ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
(WVu)(x) &= u(x) - 2\int_0^x e^{y-x}u(y)\,dy - 2\int_x^\infty \left[u(y) - 2\int_0^y e^{z-y}u(z)\,dz\right] e^{x-y}\,dy \\
&= u(x) - 2\int_0^x e^{y-x}u(y)\,dy - 2\int_x^\infty e^{x-y}u(y)\,dy + 4\int_x^\infty \int_0^y e^{z-y}u(z)\,dz\,e^{x-y}\,dy \\
&= u(x) - 2\int_0^x e^{y-x}u(y)\,dy - 2\int_x^\infty e^{x-y}u(y)\,dy \\
&\qquad +4\int_0^x \int_x^\infty e^{-2y}\,dy\,e^{z+x}u(z)\,dz + 4\int_x^\infty \int_z^\infty e^{-2y}\,dy\,e^{z+x}u(z)\,dz \\
&= u(x)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(VWu)(x) &= u(x) - 2\int_x^\infty e^{x-y}u(y)\,dy - 2\int_0^x e^{y-x}\left[u(y) - 2\int_y^\infty e^{y-z}u(z)\,dz\right]dy \\
&= u(x) - 2\int_x^\infty e^{x-y}u(y)\,dy - 2\int_0^x e^{y-x}u(y)\,dy + 4\int_0^x \int_y^\infty e^{2y-x-z}u(z)\,dz\,dy \\
&= u(x) - 2\int_x^\infty e^{x-y}u(y)\,dy - 2\int_0^x e^{y-x}u(y)\,dy \\
&\qquad +4\int_0^x \int_0^z e^{2y}\,dy\,e^{-x-z}u(z)\,dz + 4\int_x^\infty \int_0^x e^{2y}\,dy\,e^{-x-z}u(z)\,dz \\
&= u(x) - 2\int_x^\infty e^{x-y}u(y)\,dy - 2\int_0^x e^{y-x}u(y)\,dy \\
&\qquad +2\int_0^x \left(e^{2z}-1\right)e^{-x-z}\,u(z)\,dz + 2\int_x^\infty \left(e^{2x}-1\right)e^{-x-z}\,u(z)\,dz \\
&= u(x) - 2\int_0^x e^{-x-z}u(z)\,dz - 2\int_x^\infty e^{-x-z}u(z)\,dz \\
&= u(x) - 2e^{-x}\int_0^\infty e^{-z}u(z)\,dz\,.
\end{aligned}$$

Wir schreiben deshalb auch $V^{(-1)}$ statt W und halten fest, dass V also nur von links invertierbar ist. Analog kann man zeigen, dass die Operatoren $\widetilde{V}$ und $\widetilde{W}$ mit

$$(\widetilde{V}u)(x) = u(x) - 2\int_{-\infty}^x e^{y-x}u(y)\,dy \text{ und } (\widetilde{W}u)(x) = u(x) - 2\int_x^\infty e^{x-y}u(y)\,dy\,, \quad -\infty < x < \infty$$

zu $\mathcal{L}(\mathbf{L}^p(\mathbb{R}))$ gehören, wobei jetzt $\widetilde{W}\widetilde{V} = \widetilde{V}\widetilde{W} = I$, also $\widetilde{W} = \widetilde{V}^{-1}$ gilt. Im Weiteren betrachten wir $\mathbf{L}^p(0,\infty)$ als Teilraum von $\mathbf{L}^p(\mathbb{R})$. Dabei ist $\mathbf{L}^p(0,\infty)$ das Bild $R(P)$ des stetigen Projektors $P : \mathbf{L}^p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\mathbb{R})$,

$$(Pu)(x) = \begin{cases} u(x) & : \quad x \ge 0\,, \\ 0 & : \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Offenbar gilt

$$P\widetilde{V}^{-1}P = P\widetilde{V}^{-1} \quad \text{und} \quad P\widetilde{V}P = \widetilde{V}P\,, \tag{2.3}$$

$$\widetilde{V}u = Vu \quad \text{und} \quad P\widetilde{V}^{-1}u = V^{(-1)}u \quad \forall\, u \in R(P) = \mathbf{L}^p(0,\infty)\,. \tag{2.4}$$

In Vorbereitung auf den Beweis von Lemma 2.4 beschäftigen wir uns kurz mit der **Fouriertransformation**

$$(\mathcal{F}u)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}xy} u(y)\, dy\,.$$

(F1) $\mathcal{F} : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{C}_{\infty,0}(\mathbb{R})$ ist linear und stetig, wobei $\mathbf{C}_{\infty,0}(\mathbb{R}) = (\mathbf{C}_{\infty,0}, \|.\|_\infty)$ der Banachraum der stetigen Funktionen $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(\pm\infty) = 0$ ist.

Beweis. Für $u \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, $x_n \longrightarrow x$, $g_n(y) := e^{-\mathbf{i}x_n y}u(y)$ und $g(y) := e^{-\mathbf{i}xy}u(y)$ gilt $g_n(y) \longrightarrow g(y)$ und $|g_n(y)| \le |u(y)|\ \forall\, y \in \mathbb{R}$. Lebesgue's Theorem über die majorisierte Konvergenz liefert $(\mathcal{F}u)(x_n) \longrightarrow (\mathcal{F}u)(x)$ und somit die Stetigkeit von $\mathcal{F}u$. Außerdem gilt $|(\mathcal{F}u)(x)| \le \|u\|_1\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, u \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. Ist $u \in \mathbf{C}_0^1(\mathbb{R})$ (Klasse der stetig fifferenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger), so gilt für gewisse $-\infty < a < b < \infty$

$$\begin{aligned} x(\mathcal{F}u)(x) &= \int_a^b x\, e^{-\mathbf{i}xy} u(y)\, dy \;=\; \mathbf{i} \int_a^b \left(\frac{d}{dy}\, e^{-\mathbf{i}xy} \right) u(y)\, dy \\ &= -\mathbf{i} \int_a^b e^{-\mathbf{i}xy} u'(y)\, dy \;=\; -\mathbf{i}(\mathcal{F}u')(x) \end{aligned}$$

mit $|(\mathcal{F}u')(x)| \le \|u'\|_1$. Also folgt $(\mathcal{F}u)(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x}\, (\mathcal{F}u')(x) = 0$. Ist nun $u \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ beliebig, so existiert eine Folge $u_n \in \mathbf{C}_0^1(\mathbb{R})$ mit $\|u_n - u\|_1 \longrightarrow 0$, woraus nach dem bereits Bewiesenen folgt $\|\mathcal{F}u_n - \mathcal{F}u\|_\infty \le \|u_n - u\|_1 \longrightarrow 0$, also auch $(\mathcal{F}u)(\pm\infty) = 0$. □

(F2) Aus (F1) folgt $\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{L}\left(\mathbf{L}^1(\mathbb{R}), \mathbf{C}_{\infty,0}(\mathbb{R})\right)$, wobei

$$(\widetilde{\mathcal{F}}u)(x) = (\mathcal{F}u)(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}xy} u(y)\, dy\,.$$

Dabei gilt $\left\|\widetilde{\mathcal{F}}\right\| = \|\mathcal{F}\| = 1$, da $(\mathcal{F}u)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\, dy$ ist.

(F3) Der **Schwartz'sche Raum**

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ g \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall\, m,n \in \mathbb{N}_0\, \exists\, c_{mn} \in \mathbb{R} \text{ mit } |x|^m \left|g^{(n)}(x)\right| \le c_{mn}\, \forall\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

der schnell fallenden Funktionen ist dicht in $\mathbf{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, und es gilt $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Beweis. Für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $x, h \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}u)(x+h) - (\mathcal{F}u)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}xy} \left(e^{-\mathbf{i}hy} - 1 \right) u(y)\, dy \\ &= -\mathbf{i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}xy} y \int_0^h e^{-\mathbf{i}zy}\, dz\, u(y)\, dy \\ &= -\mathbf{i} \int_0^h \int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-\mathbf{i}(x+z)y} u(y)\, dy\, dz \\ &= -\mathbf{i} \int_0^h (\mathcal{F}u_1)(x+z)\, dz \quad \text{mit} \quad u_1(y) = y\, u(y)\,, \end{aligned}$$

woraus

$$\frac{1}{h}[(\mathcal{F}u)(x+h)-(\mathcal{F}u)(x)] = \frac{1}{\mathbf{i}h}\int_0^h (\mathcal{F}u_1)(x+z)\,dz \overset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathbf{i}}(\mathcal{F}u_1)(x)$$

folgt und somit $\left(D : -\mathbf{i}\,\frac{d}{dx}\right)$

$$D\mathcal{F}u = -\mathcal{F}Mu \quad \text{mit} \quad (Mu)(x) = x\,u(x)\,.$$

Man erhält induktiv $D^n\mathcal{F}u = (-1)^n\mathcal{F}M^n u \;\forall\, u\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $n\in\mathbb{N}$. Aus dem Beweis von (F1) folgt auch $M^n\mathcal{F}u = \mathcal{F}D^n u$, so dass

$$M^m D^n\mathcal{F}u = (-1)^n M^m\mathcal{F}M^n u = (-1)^n\mathcal{F}D^m M^n u$$

gilt, woraus mit (F1) die Beschränktheit der Funktionen $M^m D^n\mathcal{F}u$ für alle $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ und alle $m,n\in\mathbb{N}_0$ folgt, d.h., $\mathcal{F}u\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Die Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $\mathbf{L}^p(\mathbb{R})$ is wohlbekannt. □

(F4) Für $u_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ gilt $\mathcal{F}u_0 = \sqrt{2\pi}\,u_0$.

Beweis. Es gilt $u_0'(x) + x\,u_0(x) = 0$ und $u_0(0) = 1$. Aus dem Beweis von (F3) folgt

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}u_0)'(x) + x(\mathcal{F}u_0)(x) &= \mathbf{i}D(\mathcal{F}u_0)(x) + (M\mathcal{F}u_0)(x)\\ &= -\mathbf{i}(\mathcal{F}Mu_0)(x) + (\mathcal{F}Du_0)(x)\\ &= -\mathbf{i}\big(\mathcal{F}(Mu_0 + Du_0)\big) = 0\end{aligned}$$

und $(\mathcal{F}u_0)(0) = \sqrt{2\pi}$. □

(F5) $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist bijektiv mit $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\widetilde{\mathcal{F}}$.

Beweis. Für $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\mathcal{F}g)(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}xy}g(y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{F}f)(x)g(x)\,dx$$

und

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{i}xy}(\mathcal{F}g)(y) &= e^{\mathbf{i}xy}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}yz}g(z)\,dz\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}y(z-x)}g(z)\,dz \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}yw}g(w+x)\,dw \;=\; (\mathcal{F}g_x)(y)\,,\end{aligned}$$

wobei $g_x(y) = g(x+y)$ zu setzen ist. Es seien nun $\varepsilon > 0$ und $g^\varepsilon(x) := g(\varepsilon x)$. Es folgt

$$(\mathcal{F}g^\varepsilon)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}xy}g(\varepsilon y)\,dy = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}x\frac{z}{\varepsilon}}g(z)\,dz = \frac{1}{\varepsilon}(\mathcal{F}g)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

und

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}xy}g^\varepsilon(y)(\mathcal{F}f)(y)\,dy &= \int_{-\infty}^{\infty} g^\varepsilon(y)(\mathcal{F}f_x)(y)\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{F}g^\varepsilon)(y)f_x(y)\,dy = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{F}g)\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)f_x(y)\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{F}g)(z)f_x(\varepsilon z)\,dz\,.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}xy}(\mathcal{F}f)(y)\,dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}xy}u_0(0)(\mathcal{F}f)(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathbf{i}xy}u_0^{\varepsilon}(y)(\mathcal{F}f)(y)\,dy \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{F}u_0)(y)f_x(\varepsilon y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_0(y)f_x(\varepsilon y)\,dy \\ &= 2\pi f(x)\,,\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichung durch Anwendung von Lebesgue's Theorem über die majorisierte Konvergenz ergibt. Hieraus können wir nun weiter schlussfolgern, dass

$$(\mathcal{F}^2 f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}xy}(\mathcal{F}f)(y)\,dy = 2\pi(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f)(-x) = 2\pi f(-x)$$

und somit $\mathcal{F}^4 f = 4\pi^2 f$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt. Es folgt

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = I(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{F}^4(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})\,,$$

also $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

(F6) $\mathcal{F} : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{C}_{\infty,0}(\mathbb{R})$ ist injektiv.

Beweis. Es seien $g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ und $(\mathcal{F}g)(x) = 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Es folgt für beliebiges $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(\mathcal{F}g)(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{i}xy}g(x)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)(\mathcal{F}f)(x)\,dx\,,$$

also auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(x)\,dx = 0 \quad \forall\, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,. \tag{2.5}$$

Für $a > 0$ betrachten wir die Funktion $\varphi(x) := \chi_{[-a,a]}(x)\operatorname{sgn} g(x)$, wobei $\chi_{[-a,a]}(x)$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[-a, a]$ bezeichnet. Ferner seien

$$\varphi_n(x) := \left(\delta_{n^{-1}} * \varphi\right)(x)$$

mit

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma_\varepsilon}\left\{\begin{array}{ccc} e^{\frac{\varepsilon^2}{x^2-\varepsilon^2}} & : & -\varepsilon < x < \varepsilon\,, \\ 0 & : & |x| \geq \varepsilon\,, \end{array}\right\} \quad \text{und} \quad \gamma_\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{\varepsilon^2}{y^2-\varepsilon^2}}\,dy\,.$$

Die Funktion $\delta_\varepsilon(x)$ ist ein sog. **Mittelungskern** (siehe [23, Kapitel 1, §1]). Es folgt

$$\varphi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n^{-1}}(x-y)\varphi(y)\,dy = \int_{-a}^{a} \delta_{n^{-1}}(x-y)\varphi(y)\,dy = 0 \quad \text{für} \quad |x| > a + \frac{1}{n}\,,$$

so dass (vgl. [23, Kapitel 1, §2]) $\varphi_n \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ (Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}$). Ferner gilt (vgl. [23, Satz 1.3.3]) $\|\varphi_n - \varphi\|_{\mathbf{L}^2(-a-1,a+1)} \longrightarrow 0$, was die Existenze einer Teilfolge $\varphi_{n_k}(x)$ impliziert, die f. ü. gegen $\varphi(x)$ konvergiert. Da außerdem

$$|\varphi_n(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-y)\delta_{n^{-1}}(y)\,dy\right| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x-y)\delta_{n^{-1}}(y)\,dy\right| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \delta_{n^{-1}}(y)\,dy = 1$$

gilt, liefert Lebesgue's Theorem über die majorisierte Konvergenz

$$\int_{-a}^{a} |g(x)|\,dx = \int_{-a-1}^{a+1} g(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-a-1}^{a+1} g(x)\varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi_n(x)\,dx \overset{(2.5)}{=} 0\,,$$

also $g(x) = 0$ f. ü. in $(-a, a)$ und somit $g(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$. □

Folgerung 2.3 *Die lineare Hülle des Systems* $\mathbf{X}_0 = \left\{x^k e^{-x} : k \in \mathbb{N}_0\right\}$ *ist dicht in* $\mathbf{L}^p(0,\infty)$, $1 \le p < \infty$.

Beweis. Für $f \in \mathbf{L}^q(0,\infty)$, $1 < q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ betrachten wir

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-\mathbf{i}xz} f(x) e^{-x}\, dx\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Für $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_0^\infty e^{-\mathbf{i}xz} g_h(x) f(x) e^{-x}\, dx \tag{2.6}$$

mit $g_h(x) = \frac{1}{h}\left(e^{-\mathbf{i}hx} - 1\right) \longrightarrow -\mathbf{i}x$ for $h \longrightarrow 0$. Wegen

$$|g_h(x)| \le \frac{1}{|h|} \sum_{n=1}^\infty \frac{|xh|^n}{n!} \le |x| \sum_{n=1}^\infty \frac{|xh|^{n-1}}{(n-1)!} = |x| e^{|xh|}$$

gilt

$$|g_h(x)| e^{-x} \le x e^{-\frac{x}{2}}\,, \quad |h| < \frac{1}{2}\,,\ x > 0\,.$$

Da $f(x) x^k e^{-\frac{x}{2}}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $f \in \mathbf{L}^q(0,\infty)$ zu $\mathbf{L}^1(0,\infty)$ gehört, kann auf (2.6) Lebesgue's Theorem über die majorisierte Konvergenz angewandt werden, so dass

$$F'(z) = -\mathbf{i} \int_0^\infty e^{-\mathbf{i}xz} x f(x) e^{-x}\, dx\,, \quad z \in \mathbb{C}$$

und (induktiv)

$$F^{(k)}(z) = (-\mathbf{i})^k \int_0^\infty e^{-\mathbf{i}xz} x^k f(x) e^{-x}\, dx\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,\ k \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Ist nun

$$\int_0^\infty x^k e^{-x} f(x)\, dx = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0\,, \tag{2.7}$$

so folgt

$$F(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{F^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^\infty (-\mathbf{i})^k \int_0^\infty x^k f(x) e^{-x}\, dx\, z^k \equiv 0\,.$$

Da $F(z)$ die Fouriertransformation der Funktion $\left\{\begin{array}{ccc} f(x)e^{-x} & : & x > 0 \\ 0 & : & x < 0 \end{array}\right\}$ ist und die Fouriertransformation auf $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ injektiv ist, folgt $f(x) = 0$ für fast alle $x \in (0,\infty)$. Somit ist die lineare Hülle von $\mathbf{X}_0$ dicht in $\mathbf{L}^p(0,\infty)$ sein, denn wäre das nicht der Fall, so würde aus dem Theorem von Han-Banach die Existenz eines $f_0 \in \mathbf{L}^q(0,\infty) \setminus \{\Theta\}$ folgen, für welches (2.7) mit $f = f_0$ gilt. □

(F7) Für $f, g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ gilt $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g)$. (**Faltungssatz**)

Beweis. Wegen Folgerung 2.2,(a) ist der satz von Fubini anwendbar, und wir erhalten für $f, g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{F}(f*g)\big)(x) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-\mathbf{i}xy} \int_{-\infty}^\infty f(y-z) g(z)\, dz\, dy \\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{-\mathbf{i}xz} \int_{-\infty}^\infty e^{-\mathbf{i}x(y-z)} f(y-z)\, dy\, g(z)\, dz \\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{-\mathbf{i}xz} \int_{-\infty}^\infty e^{-\mathbf{i}xw} f(w)\, dw\, g(z)\, dz \;=\; (\mathcal{F}f)(x)(\mathcal{F}g)(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.4 *Sei $1 \le p < \infty$. Das Spektrum der Operatoren $V, V^{(-1)} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}^p(0,\infty))$ liegt in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, der Spektralradius von $\widetilde{V}, \widetilde{V}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{L}^p(\mathbb{R}))$ ist gleich 1.*

Beweis. Es seien $1 \le p < \infty$ und $\mathbf{L}^p = \mathbf{L}^p(0,\infty)$. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten:

- Der Operator $V - \lambda I : \mathbf{L}^p(0,\infty) \longrightarrow \mathbf{L}^p(0,\infty)$ ist für $|\lambda| > 1$ invertierbar: Auf die Gleichung

$$Vu - \lambda u = u - 2\,e * u - \lambda u = f \in \mathbf{L}^1(0,\infty)$$

mit $e(x) = e_1(x)$, $e_\alpha(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} e^{-\alpha x} & : & x \ge 0\,, \\ 0 & : & x < 0\,, \end{array} \right\}$ und $\mathsf{Re}\,\alpha > 0$, wenden wir die Fouriertransformation an. Unter Verwendung der Bezeichnungen

$$E_\alpha(x) := (\mathcal{F}e_\alpha)(x) = \int_0^\infty e^{-\mathbf{i}xy} e^{-\alpha y}\,dy = \frac{1}{\alpha + \mathbf{i}x}\,, \quad U(x) := (\mathcal{F}u)(x)\,, \quad F(x) := (\mathcal{F}f)(x)$$

und des Faltungssatzes (F7) erhalten wir

$$\left(1 - \lambda - \frac{2}{1 + \mathbf{i}x}\right) U(x) = F(x)\,,$$

also

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1 + \mathbf{i}x}{(1-\lambda)(1+\mathbf{i}x) - 2}\,F(x) = \frac{1}{1-\lambda}\,\frac{1+\mathbf{i}x}{1 + \mathbf{i}x - \frac{2}{1-\lambda}}\,F(x) \\ &= \frac{1}{1-\lambda}\left(1 + \frac{2}{1-\lambda}\,\frac{1}{\frac{\lambda+1}{\lambda-1} + \mathbf{i}x}\right) F(x)\,. \end{aligned}$$

Wir vermuten, dass

$$\left((V - \lambda I)^{-1} f\right)(x) = \frac{1}{1-\lambda}\left[f(x) + \frac{2}{1-\lambda}\int_0^x e^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}(y-x)} f(y)\,dy\right] =: (B_\lambda f)(x)$$

gilt. Da $\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1} = \dfrac{(\lambda+1)(\overline{\lambda}-1)}{|\lambda-1|^2} = \dfrac{|\lambda|^2 - 1 - 2\,\mathsf{Im}\,\lambda}{|\lambda-1|^2}$ positiven Realteil hat, gehört der Operator B_λ zu $\mathcal{L}(\mathbf{L}^p)$ (vgl. Folgerung 2.2,(b)). Wir überprüfen die Gültigkeit von $(V - \lambda I)B_\lambda = B_\lambda(V - \lambda I) = I$ und schreiben dazu $B_\lambda = \dfrac{1}{1-\lambda}\left(I + \dfrac{2}{1-\lambda}\,A_\lambda\right)$ sowie $V - \lambda I = (1-\lambda)I - 2\,A$ mittels

$$(A_\lambda u)(x) = \int_0^x e^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}(y-x)} u(y)\,dy \quad \text{und} \quad (Au)(x) = \int_0^x e^{y-x} u(y)\,dy\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (V - \lambda I)B_\lambda &= [(1-\lambda)I - 2A]\,\frac{1}{1-\lambda}\left(I + \frac{2}{1-\lambda}\,A_\lambda\right) \\ &= I - \frac{2}{1-\lambda}\,A + \frac{2}{1-\lambda}\,A_\lambda - \frac{4}{(1-\lambda)^2}\,A\,A_\lambda\,, \end{aligned}$$

wobei für $u \in \mathbf{L}^p$

$$
\begin{aligned}
(A\,A_\lambda u)\,(x) &= \int_0^x e^{y-x}\int_0^y e^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}(z-y)}u(z)\,dz\,dy \\
&= \int_0^x e^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\,z-x}\int_z^x e^{-\frac{2}{\lambda-1}\,y}\,dy\,u(z)dz \\
&= \int_0^x e^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\,z-x}\frac{\lambda-1}{2}\left(e^{-\frac{2}{\lambda-1}\,z}-e^{-\frac{2}{\lambda-1}\,x}\right)u(z)\,dz \\
&= \frac{\lambda-1}{2}\left(\int_0^x e^{z-x}u(z)\,dz-\int_0^x e^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}(z-x)}u(z)\,dz\right) \\
&= \frac{\lambda-1}{2}(Au)(x)-\frac{\lambda-1}{2}\,(A_\lambda u)\,(x)\,.
\end{aligned}
$$

Analog zeigt man $A_\lambda A = \dfrac{\lambda-1}{2}\,A - \dfrac{\lambda-1}{2}\,A_\lambda\,.$

Die folgenden Schritte werden analog ausgeführt:

- Der Operator $W-\lambda I : \mathbf{L}^p(0,\infty)\longrightarrow \mathbf{L}^p(0,\infty)$ ist für $|\lambda|>1$ invertierbar. Dabei gilt

$$
(W-\lambda I)^{-1} = \frac{1}{1-\lambda}\left(I+\frac{2}{1-\lambda}\,A_\lambda\right)
$$

mit

$$
(A_\lambda u)(x) = \int_x^\infty e^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}(x-y)}u(y)\,dy\,.
$$

- Der Operator $\widetilde{V}-\lambda I : \mathbf{L}^p(\mathbb{R})\longrightarrow \mathbf{L}^p(\mathbb{R})$ ist für $|\lambda|\neq 1$ invertierbar. Dabei gilt

$$
(\widetilde{V}-\lambda I)^{-1} = \frac{1}{1-\lambda}\left(I+\frac{2}{1-\lambda}\,A_\lambda\right)
$$

mit

$$
(A_\lambda u)(x) = \begin{cases} -\displaystyle\int_x^\infty e^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}(y-x)}u(y)\,dy & : \quad |\lambda|<1\,, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^x e^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}(y-x)}u(y)\,dy & : \quad |\lambda|>1\,. \end{cases}
$$

- Der Operator $\widetilde{W}-\lambda I : \mathbf{L}^p(\mathbb{R})\longrightarrow \mathbf{L}^p(\mathbb{R})$ ist für $|\lambda|\neq 1$ invertierbar. Dabei gilt

$$
(\widetilde{W}-\lambda I)^{-1} = \frac{1}{1-\lambda}\left(I+\frac{2}{1-\lambda}\,A_\lambda\right)
$$

mit

$$
(A_\lambda u)(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^\infty e^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}(y-x)}u(y)\,dy & : \quad |\lambda|>1\,, \\ -\displaystyle\int_{-\infty}^x e^{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}(y-x)}u(y)\,dy & : \quad |\lambda|<1\,. \end{cases}
$$

□

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(V^n u)(x) = u(x) - \int_0^x e^{y-x} p_{n-1}(x-y)u(y)\,dy$$

mit einem Polynom $p_{n-1}(x)$ vom Grad $n-1$. Dies sieht man induktiv anhand der Formeln

$$\widetilde{V}u = u - 2\,e * u \quad \text{und} \quad \widetilde{V}^2 u = \widetilde{V}u - 2\,e * \widetilde{V}u = u - 4\,e * u + 4(e*e)*u$$

mit $e(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} e^{-x} & : & x \geq 0\,, \\ 0 & : & x < 0\,, \end{array} \right\}$ sowie (für $x \geq 0$)

$$\begin{aligned}
(e*e)(x) &= \int_0^x e^{y-x} e^{-y}\,dy = e^{-x}\,x\,, \\
(e*e*e)(x) &= \int_0^x e^{y-x}\,y\,e^{-y}\,dy \;=\; e^{-x}\int_0^x y\,dy \;=\; e^{-x}\,\frac{x^2}{2} \\
&\;\vdots \\
(\underbrace{e*e*\ldots*e}_{n+1})(x) &= \int_0^x e^{y-x}\,\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}e^{-y}\,dy \;=\; e^{-x}\int_0^x \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\,dy \;=\; e^{-x}\,\frac{x^n}{n!}\,.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Folgerung 2.3 zeigt sich, dass man einen Operator $A : \mathbf{L}^p(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ der Gestalt

$$(Au)(x) = u(x) - \int_{-\infty}^x k(x-y)u(y)\,dy$$

mit $k \in \mathbf{L}^1(0,\infty)$ in der Operatornorm $\|.\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}^p(\mathbb{R}))}$ durch ein Polynom in $\widetilde{V}$ approximieren kann. Mit solchen Polynomen von Operatoren beschäftigen wir uns in den folgenden Abschnitten.

2.2 Polynome einseitig invertierbarer Operatoren

Im Weiteren sei $\mathbf{X}$ ein Banachraum. Sind $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{Z}$ abgeschlossene lineare Teilräume von $\mathbf{X}$, so nennt man **$\mathbf{Z}$ direktes Komplement** zu $\mathbf{Y}$, wenn $\mathbf{X}$ die direkte Summe von $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{Z}$ ist, d.h., es gilt $\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z} = \{\Theta\}$ und $\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{Z}$. Wir schreiben dafür $\mathbf{X} = \mathbf{Y} \oplus \mathbf{Z}$. In diesem Fall ist jedes $x \in \mathbf{X}$ eindeutig in der Form $x = y + z$ mit $y \in \mathbf{Y}$ und $z \in \mathbf{Z}$ darstellbar.

Ist $P \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ ein Projektor, d.h., $P^2 = P$, so ist auch $Q = I - P$ ein Projektor, der sogenannte **ergänzende Projektor** zu P. Der Nullraum $N(P)$ und der Bildraum $R(P)$ sind abgeschlossene lineare Teilräume von $\mathbf{X}$, und es gilt $\mathbf{X} = R(P) \oplus N(P)$. Ist umgekehrt $\mathbf{X} = \mathbf{Y} \oplus \mathbf{Z}$, so ist der durch $Px := y \in \mathbf{Y}$ mit $x = y + z$ definierte Projektor stetig, d.h., $P \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$.

Die Dimension des Faktorraumes $\mathbf{X}/\mathbf{Y}$ nennt man **Kodimension** von $\mathbf{Y}$, $\operatorname{codim}\mathbf{Y} := \dim \mathbf{X}/\mathbf{Y}$. Jedes direkte Komplement zu $\mathbf{Y}$ (falls ein solches existiert), ist isomorph zu $\mathbf{X}/\mathbf{Y}$.

Lemma 2.5 *Ist $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum mit $\dim \mathbf{Y} < \infty$ oder $\operatorname{codim}\mathbf{Y} < \infty$, so besitzt $\mathbf{Y}$ ein direktes Komplement in $\mathbf{X}$.*

Beweis. Es sei $\{y_1, \ldots, y_n\}$ eine Basis in $\mathbf{Y}$. Dann existieren $f_1, \ldots, f_n \in \mathbf{X}^*$ mit $f_j(y_k) = \delta_{jk}$. Wir setzen $\mathbf{Z} := \bigcap_{j=1}^n N(f_j)$ und $y = \sum_{k=1}^n f_k(x)y_k$ für $x \in \mathbf{X}$ sowie $z = x - y$. Es folgt

$$f_j(z) = f_j(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)f_j(y_k) = 0\,, \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

also $z \in \mathbf{Z}$.

Es seien nun $\operatorname{codim} \mathbf{Y} = n < \infty$ und $\{[x_1], \ldots, [x_n]\}$ eine Basis in $\mathbf{X}/\mathbf{Y}$. Für $x \in \mathbf{X}$ existieren $\alpha_k \in \mathbb{K}$ mit $[x] = \sum_{k=1}^{n} [x_k]$. Wir setzen $z := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ und $y := x - z$. Es folgt $[y] = [x - z] = [x] - [z] = [\Theta]$, also $y \in \mathbf{Y}$, d.h., $\mathbf{Z} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist direktes Komplement zu $\mathbf{Y}$. □

Einen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ nennen wir **von links (rechts) invertierbar**, wenn ein Operator $B \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ existiert, so dass $BA = I$ $(AB = I)$ gilt.

Lemma 2.6 *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$.*

(a) *Der Operator A ist genau dann von links invertierbar, wenn $N(A) = \{\Theta\}$ gilt und $\overline{R(A)} = R(A)$ ein direktes Komplement in $\mathbf{X}$ hat. In diesem Fall ist jeder linksinverse Operator $B = A^{(-1)}$ von der Gestalt $A^{(-1)} = A_0^{-1} P$, wobei $A_0 : \mathbf{X} \longrightarrow R(A)$, $x \mapsto Ax$ und $P \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ ein Projektor auf $R(A)$ (d.h., $R(P) = R(A)$) sind. Dabei gilt*

$$\dim N(A^{(-1)}) = \operatorname{codim} R(A).$$

Die Gleichung $Ax = y$ ist genau dann lösbar, wenn $y \in N(I - AA^{(-1)})$ gilt, wobei dann $x = A^{(-1)} y$ die einzige Lösung in $\mathbf{X}$ ist.

(b) *Der Operator A ist genau dann von rechts invertierbar, wenn $R(A) = \mathbf{X}$ gilt und $N(A)$ ein direktes Komplement in $\mathbf{X}$ besitzt. Ist in diesem Fall $\mathbf{X} = N(A) \oplus \mathbf{Z}$, so ist jeder rechtsinverse Operator $B = A^{(-1)}$ von der Gestalt $A^{(-1)} = A_0^{-1} + D$, wobei $A_0 : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{X}$, $z \mapsto Az$ und $D \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ mit $R(D) \subset N(A)$, und es gilt*

$$\operatorname{codim} R(A^{(-1)}) = \dim N(A).$$

Die Gleichung $Ax = y$ ist für jedes $y \in \mathbf{X}$ lösbar, wobei $x = A^{(-1)} y$ eine Lösung ist und $N(A) = R(I - A^{(-1)} A)$ gilt.

(c) *Sind $B, C \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ invertierbar und A nur von einer Seite invertierbar, so ist $D := BAC$ nur von der selben Seite invertierbar. Dabei gilt*

$$\dim N(D) = \dim N(A) \quad \text{und} \quad \operatorname{codim} R(D) = \operatorname{codim} R(A).$$

Beweis. (a) Es sei $BA = I$. Der Operator $P = AB$ ist dann ein Projektor mit $R(P) = R(A)$, denn aus $y = Ax \in R(A)$ folgt $Py = ABAx = Ax = y \in R(P)$. Es folgt $\mathbf{X} = R(A) \oplus \mathbf{Z}$ mit $\mathbf{Z} = N(P) = R(I - P)$. Somit ist die Notwendigkeit der Bedingung der Abgeschlossenheit von $R(A)$ und der Existenz eines direkten Komplementes von $R(A)$ in $\mathbf{X}$ gezeigt.

Zum Beweis der Hinlänglichkeit seien nun $P \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ ein Projektor auf $R(A)$ und $B := A_0^{-1} P$. Es folgt $BA = A_0^{-1} PA = A_0^{-1} A = I$, d.h., B ist linksinvers zu A.

Ist nun $A^{(-1)}$ ein beliebiger linksinverser Operator zu A, so definieren wir $P := A\,A^{(-1)}$ und erhalten $P^2 = P$ sowie $A_0^{-1} P = A_0^{-1} A\,A^{(-1)} = A^{(-1)}$. Ferner sind $R(P) = R(A)$ und somit $N(A^{(-1)}) = N(P) = R(I - P)$ ein direktes Komplement zu $R(A)$, so dass $\dim N(A^{(-1)}) = \operatorname{codim} R(A)$ gilt.

Aus $A\,x = y$ folgt $y - A\,A^{(-1)} y = A(x - A^{(-1)} Ax) = \Theta$, und umgekehrt aus $y - A\,A^{(-1)} y = \Theta$ und $x = A^{(-1)} y$ die Gleichung $Ax = y$.

(b) Gilt $AB = I$, so sind $R(A) = \mathbf{X}$ und $P = BA$ ein Projektor mit $N(P) = N(A)$. Es folgt $\mathbf{X} = N(A) \oplus R(P)$, und die Notwendigkeit der Bedingung ist gezeigt.

Sind umgekehrt $\mathbf{X} = N(A) \oplus \mathbf{Z}$ und $B = A_0^{-1} + D$ mit $R(D) \subset N(A)$, so folgt $AB = A(A_0^{-1} + D) = A\,A_0^{-1} = I$.

Ist nun $A^{(-1)}$ ein beliebiger rechtsinverser Operator, so setzen wir $D = A^{(-1)} - A_0^{-1}$, womit für $y \in R(D)$, d.h., $y = Dx = A^{(-1)}x - A_0^{-1}x$, folgt $Ay = x - x = \Theta$, also $R(D) \subset N(A)$.

Schließlich folgt aus $x = A^{(-1)}y$ die Gleichung $Ax = y$, und aus $x \in N(A)$ die Beziehung $x = x - A^{(-1)}Ax \in R(I - A^{(-1)}A)$. Umgekehrt liefert $x = y - A^{(-1)}Ay \in R(I - A^{(-1)}A)$ die Gleichung $Ax = \Theta$.

(c) Ist $A^{(-1)}$ eine einseitige Inverse von A, so ist $C^{-1}A^{(-1)}B^{-1}$ eine einseitige Inverse von D, und zwar von der selben Seite. Wäre D invertierbar, so wÃ¼rde dies auch für A folgen. Wir haben nun $N(D) = C^{-1}(N(A))$ und somit $\dim N(D) = \dim N(A)$.

Außerdem gilt $R(D) = B(R(A))$. Der Operator $\widetilde{B} : \mathbf{X}/R(D) \longrightarrow \mathbf{X}/R(A)$, $[x]_{R(D)} \mapsto [B^{-1}x]_{R(A)}$ ist korrekt definiert, da aus $[x_1]_{R(D)} = [x_2]_{R(D)}$ die Beziehungen $x_1 - x_2 \in R(D)$ und somit $B^{-1}(x_1 - x_2) \in R(A)$ folgen. Der Operator $\widetilde{B}$ ist linear und bijektiv, denn aus $\widetilde{B}[x]_{R(D)} = [\Theta]_{R(A)}$ folgt $B^{-1}x \in R(A)$, also $x \in R(D)$, und für beliebiges $y \in \mathbf{X}$ gilt $\widetilde{B}[By]_{R(D)} = [y]_{R(A)}$. Es folgt $\operatorname{codim} R(D) = \operatorname{codim} R(A)$. □

Folgerung 2.7 *Sind $B \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ invertierbar, $D \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ von links invertierbar und $A = BD$, so ist die Gleichung $Ax = y$ genau dann lösbar, wenn die Lösung $z \in \mathbf{X}$ der Gleichung $Bz = y$ zu $N(I - DD^{(-1)})$ gehört, wobei $D^{(-1)}$ eine Linksinverse zu D ist. Dabei gilt $x = D^{(-1)}z$.*

Beweis. Die Gleichung $Ax = y$ ist nach Lemma 2.6,(a) genau dann lösbar, wenn y im Nullraum von $I - A\,A^{(-1)}$ liegt, wobei die Beziehung $I - A\,A^{(-1)} = I - BD\,D^{(-1)}B^{-1} = B(I - D\,D^{(-1)})B^{-1}$ zeigt, dass diese Bedingung äquivalent zu $B^{-1}y = z \in N(I - D\,D^{(-1)})$ ist. □

Folgerung 2.8 *Sind $B = DA \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ invertierbar und $D \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ von rechts invertierbar, so ist die Gleichung $Ax = y$ genau dann lösbar, wenn die Lösung $z \in \mathbf{X}$ der Gleichung $Bz = Dy$ der Bedingung $PAz = Py$ mit $P = I - D^{(-1)}D$ genügt, wobei $D^{(-1)}$ eine Rechtsinverse zu D ist. Dabei gilt $x = z$.*

Beweis. Mit der Linksinversen $A^{(-1)} = B^{-1}D$ folgt aus Lemma 2.6,(a), dass $Ax = y$ genau dann lösbar ist, wenn $y \in N(I - A\,B^{-1}D)$ gilt, wobei

$$\begin{aligned} I - AB^{-1}D &= P(I - AB^{-1}D) + (I - P)(I - AB^{-1}D) \\ &= P(I - AB^{-1}D) + D^{(-1)}D - D^{(-1)}DAB^{-1}D \\ &= P(I - AB^{-1}D) \end{aligned}$$

erfüllt ist. Somit ist die Bedingung $y \in N(I - A\,B^{-1}D)$ äquivalent zu $Py - PAz = \Theta$. Aus $y \in N(I - A\,B^{-1}D)$ folgt außerdem $Ax = y = AB^{-1}Dy = Az$ und somit wegen der Trivialität von $N(A)$ auch $x = z$. □

Folgerung 2.9 *Sind $B \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ invertierbar, $D \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ von rechts invertierbar und $A = DB$, so ist die Lösung $z \in \mathbf{X}$ der Gleichung $Bz = D^{(-1)}y$ auch Lösung der Gleichung $Ax = y$, und es gilt*

$$N(A) = \left\{ B^{-1}(I - D^{(-1)}D)w : w \in \mathbf{X} \right\}.$$

Beweis. Aus $z = B^{-1}D^{(-1)}y$ folgt $Az = DBB^{-1}D^{(-1)}y = y$. Ferner folgt aus Lemma 2.6,(b), dass $N(A)$ gleich

$$R(I - A^{(-1)}A) = R(I - DB^{-1}A) = R(I - B^{-1}D^{(-1)}DB) = R(B^{-1}(I - D^{(-1)}D)B)$$

ist. □

Folgerung 2.10 *Sind $B \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ invertierbar, $D \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ von links invertierbar und $B = AD$, so ist $x = DB^{-1}y$ Lösung von $Ax = y$ und*

$$N(A) = \left\{ (I - DB^{-1}A)(I - DD^{(-1)})w : w \in \mathbf{X} \right\} .$$

Beweis. Es gilt $ADB^{-1}y = BB^{-1}y = y$. Nach Lemma 2.6,(b) ist $N(A) = R(I - A^{(-1)}A) = R(I - DB^{-1}A)$, wobei

$$\begin{aligned} I - DB^{-1}A &= (I - DB^{-1}A)(I - DD^{(-1)}) + (I - DB^{-1}A)DD^{(-1)} \\ &= (I - DB^{-1}A)(I - DD^{(-1)}) \end{aligned}$$

gilt. □

Folgerung 2.11 *Seien $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ von einer Seite invertierbar und $B \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ mit*

$$\|B - A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} < \left\| A^{(-1)} \right\|^{-1} .$$

Dann ist B von der selben Seite invertierbar, und es gilt

$$\dim N(B) = \dim N(A) \quad \textit{und} \quad \operatorname{codim} R(B) = \operatorname{codim} R(A) .$$

Beweis. Ist A von links invertierbar, so können wir $B = \left[I - (A - B)A^{(-1)} \right] A$ schreiben, ist A von rechts invertierbar, so $B = \left[A[I_A^{(-1)}(A - B) \right]$. Es bleibt Lemma 2.6,(c) anzuwenden. □

Es seien nun im Weiteren $\mathbf{X}$ ein komplexer Banachraum und $V \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ ein nur von links invertierbarer Operator mit einer Linksinversen $V^{(-1)}$, wobei folgende Bedingung erfüllt sei:

(V1) Die Spektren von V und $V^{(-1)}$ sind in $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$ gelegen.

Lemma 2.12 *Es gilt $\sigma(V) = \sigma(V^{(-1)}) = \mathbb{D}$. Für $|\lambda| < 1$ sind $V - \lambda I$ nur von links und $V^{(-1)} - \lambda I$ nur von rechts invertierbar, und für $|\lambda| = 1$ sind beide Operatoren von keiner Seite invertierbar.*

Beweis. Für $|\lambda| < 1$ ist $I - \lambda V^{(-1)} \in G\mathcal{L}(\mathbf{X})$ und somit $V - \lambda I = (I - \lambda V^{(-1)})V$ nur von links invertierbar. Wäre $V - \lambda_0 I$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_0| = 1$ invertierbar oder nur von einer Seite invertierbar, so stünde dies im Widerspruch dazu, dass $V - \lambda I$ für $|\lambda| < 1$ nur von links, für $|\lambda| > 1$ aber invertierbar ist (siehe Folg. 2.11). Analog behandelt man $V^{(-1)}$. □

Mit $\mathcal{R}(V)$ bezeichnen wir die lineare Hülle des Systems $\left\{ V^{(k)} : k \in \mathbb{Z} \right\}$, wobei

$$V^{(k)} := \begin{cases} V^k & : \ k \ge 0 , \\ \left(V^{(-1)}\right)^{-k} & : \ k < 0 . \end{cases}$$

Ferner seien $\mathcal{R}_+(V)$ bzw. $\mathcal{R}_-(V)$ die linearen Hüllen von $\left\{ V^{(k)} : k \ge 0 \right\}$ bzw. $\left\{ V^{(k)} : k \le 0 \right\}$. Die Darstellung $R = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k V^{(k)}$ $(m \ge n)$ mit $\alpha_k \in \mathbb{C}$ ist eindeutig: Sei nämlich $R = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k V^{(k)} = \Theta$ mit $m > n$, $\alpha_m \ne 0$, $\alpha_n \ne 0$. Im Fall $m \ge 0$ folgt $\Theta = \alpha_m I + \sum_{k=n}^{m-1} \alpha_k V^{k-m}$, also

$$I = -\frac{1}{\alpha_m} \sum_{k=n}^{m-1} \alpha_k V^{(k-m)} = \left(-\frac{1}{\alpha_m} \sum_{k=n}^{m-1} \alpha_k V^{(k-m+1)} \right) V^{(-1)} = V^{(-1)} \left(-\frac{1}{\alpha_m} \sum_{k=n}^{m-1} \alpha_k V^{(k-m+1)} \right)$$

im Widerspruch zur nur einseitigen Invertierbarkeit von $V^{(-1)}$. Im Fall $n \le 0$ erhält man analog $\Theta = \alpha_n I + \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k V^{(k-m)}$ und somit

$$I = -\frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k V^{(k-n)} = \left(-\frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k V^{(k-n+1)} \right) V = V \left(-\frac{1}{\alpha_n} \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k V^{(k-n+1)} \right).$$

Damit ist die Abbildung $\mathcal{R}(V) \longrightarrow \mathcal{R}(t)$, $R = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k V^{(k)} \mapsto R(t) = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k t^k$ wohldefiniert und bijektiv, wobei $\mathcal{R}(t)$ die Menge aller Funktionen der Gestalt $\sum_{k=n}^{m} \alpha_k t^k$ mit $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $m \ge n$, $m, n \in \mathbb{Z}$ bezeichnet. Man nennt $R(t)$ das **Symbol** des Operators R.

Folgerung 2.13 *Sind $R_\pm \in \mathcal{R}_\pm(V)$ und $R_0 \in \mathcal{R}(V)$ sowie $R_\pm(t)$ und $R_0(t)$ die entsprechenden Symbole, so ist $R(t) = R_-(t)R_0(t)R_+(t)$ das Symbol des Operators $R = R_- R_0 R_+$.*

Eine rationale Funtion $R(t) = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k t^k \in \mathcal{R}(t)$ mit $R(t) \neq 0 \ \forall\, t \in \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ kann man auf eindeutige Weise in der Form

$$R(t) = \alpha \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{t_j^+}{t} \right) t^\kappa \prod_{\ell=1}^{s} \left(t - t_\ell^- \right) \tag{2.8}$$

mit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $0 < |t_j^+| < 1$, $|t_\ell^-| > 1$ und $\kappa \in \mathbb{Z}$ schreiben. Die Zahl κ nennt man Index von $R(t)$, $\kappa = \operatorname{ind} R(t)$. Sie gibt die Windungszahl des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto R(e^{\mathbf{i}\varphi})$ bzgl. 0 an.

Satz 2.14 *Ein Operator $R \in \mathcal{R}(V)$ ist genau dann von wenigstens einer Seite invertierbar, wenn $R(t) \neq 0 \ \forall\, t \in \mathbb{T}$ gilt. In diesem Fall ist R invertierbar, nur von links invertierbar bzw. nur von rechts invertierbar, wenn $\kappa = \operatorname{ind} R(t)$ gleich, größer bzw. kleiner Null ist.*

Beweis. Sei $R(t) \neq 0$ für all $t \in \mathbb{T}$. Aus (2.8) und Folgerung 2.13 ergibt sich

$$R = \alpha \prod_{j=1}^{r} \left((I - t_j^+ V^{(-1)} \right) V^{(\kappa)} \prod_{\ell=1}^{s} \left(V - t_\ell^- I \right) =: \alpha R_- V^{(\kappa)} R_+ .$$

Wegen (V1) sind R_- und R_+ invertierbar und somit R von der selben Seite wie $V^{(\kappa)}$ (siehe Lemma 2.6,(c)).

Sei nun $R(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in \mathbb{T}$. Es folgt $R(t) = R_0(t)(t - t_0)$ und nach Folgerung 2.13 $R = R_0(V - t_0 I)$. Aus Lemma 2.12 folgt, dass R nicht von links invertierbar ist, da sonst $V - t_0 I$ von links invertierbar wäre. Es gilt aber auch $R(t) = \left(t^{-1} - t_0^{-1} \right) \widetilde{R}_0(t)$ mit $\widetilde{R}_0(t) = -R_0(t) t_0 t$. Also ist $R = \left(V^{(-1)} - t_0^{-1} I \right) \widetilde{R}_0$ nicht von rechts invertierbar. $\square$

2.3 Stetige Funktionen einseitig invertierbarer Operatoren

Mit $\overline{\mathcal{R}}(V)$ und $\overline{\mathcal{R}}_\pm(V)$ bezeichnen wir die Abschließungen von $\mathcal{R}(V)$ und $\mathcal{R}_\pm(V)$ in $(\mathcal{L}(\mathbf{X}), \|.\|)$.

Lemma 2.15 *Für $R \in \mathcal{R}(V)$ ist der Spektralradius gleich*

$$r(R) = \max \{ |R(t)| : t \in \mathbb{T} \} =: \|R\|_\infty .$$

Beweis. Für $t_0 \in \mathbb{T}$ ist nach Satz 2.14 der Operator $R - R(t_0)I$ nicht invertierbar, also gilt $R(t_0) \in \sigma(R)$ und somit $r(R) \geq |R(t_0)| \ \forall\, t_0 \in \mathbb{T}$, d.h., $r(R) \geq \|R\|_\infty$. Andererseits ist nach Satz 2.14 $R - \lambda I$ invertierbar, falls $|\lambda| > \|R\|_\infty$ gilt, da dann $\operatorname{ind}[R(t) - \lambda] = 0$ ist. □

Beachte: Hier und im Weiteren wird die Bezeichnung R sowohl für den Operator $R \in \mathcal{R}(V)$ als auch für seine Symbolfunktion $R(t)$ benutzt.

Ist nun $A \in \overline{\mathcal{R}}(V)$, so existiert eine Folge $(R_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{R}(V)$ mit $\|R_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} \longrightarrow 0$. Wegen

$$\|R_n - R_m\|_\infty = r(R_n - R_m) \leq \|R_n - R_m\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})}$$

ist $(R_n(t))_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in $(\mathbf{C}(\mathbb{T}), \|.\|_\infty)$, so dass eine stetige Funktion $A : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\|R_n - A\|_\infty \longrightarrow 0$ existiert. Dabei ist $A(t)$ unabhängig von der Wahl der Folge $(R_n)_{n=1}^\infty$, und es gilt

$$\|A\|_\infty \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} \quad \forall\, A \in \overline{\mathcal{R}}(V)\,.$$

Die Funktion $A(t)$ wird **Symbol** des Operators $A \in \overline{\mathcal{R}}(V)$ genannt. Mit $\overline{\mathcal{R}}(t)$ bezeichnen wir die Menge aller Symbole von Operatoren aus $\overline{\mathcal{R}}(V)$.

Folgerung 2.16 *$\overline{\mathcal{R}}(t)$ enthält alle Funktionen $A(t)$, deren Fourierkoeffizienten*

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(e^{\mathbf{i}\varphi}) e^{-\mathbf{i}n\varphi}\, d\varphi$$

der Bedingung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu_n |a_n| < \infty$$

genügen, wobei $\nu_n := \left\|V^{(n)}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})}$ ist.

Beweis. Erfüllt $A(t)$ die gestellten Bedingungen, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n V^{(n)}$ absolut (bzgl. der Operatornorm) und somit gegen einen Operator $A \in \overline{\mathcal{R}}(V)$. Dabei gilt

$$R_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} a_k t^k \xrightarrow{\|.\|_\infty} A(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n\,,$$

so dass $A(t)$ Symbol des Operators A ist. □

Wir nehmen nun an, dass $\widetilde{V} \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})$ eine invertierbare Fortsetzung von V auf einen Banachraum $\widetilde{\mathbf{X}} \supset \mathbf{X}$, $P \in \mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})$ ein Projektor mit $R(P) = \mathbf{X}$ und folgende Bedingungen erfüllt sind:

(V2) $r(\widetilde{V}) = r(\widetilde{V}^{-1}) = 1$.

(V3) $P\widetilde{V}^{-1}P = P\widetilde{V}^{-1}$ und $P\widetilde{V}^{-1}x = V^{(-1)}x \ \forall\, x \in \mathbf{X}$.

Es folgt:

(a) $P\widetilde{V}P = PVP = VP = \widetilde{V}P$.

(b) $\widetilde{V}P \neq P\widetilde{V}$.

Beweis. Wäre $\widetilde{V}P = P\widetilde{V}$, so würde für beliebiges $x \in \mathbf{X}$ folgen $VP\widetilde{V}^{-1}x = \widetilde{V}P\widetilde{V}^{-1}x = Px = x$ im Widerspruch zur Nichtinvertierbarkeit von V. □

(c) Die Spektren der Operatoren $\widetilde{V}$ und $\widetilde{V}^{-1}$ sind gleich $\mathbb{T}$.

Beweis. Aus (V2) und $\widetilde{V} - \lambda I_{\widetilde{\mathbf{X}}} = -\lambda \widetilde{V}\left(\widetilde{V}^{-1} - \lambda^{-1} I_{\widetilde{\mathbf{X}}}\right)$ für $\lambda \neq 0$ folgt $\sigma(\widetilde{V}) \subset \mathbb{T}$ und $\sigma(\widetilde{V}^{-1}) \subset \mathbb{T}$. Wäre nun für ein $\lambda \in \mathbb{T}$ der Operator $\widetilde{V} - \lambda I_{\widetilde{\mathbf{X}}}$ invertierbar, so würde für jedes $x \in \mathbf{X}$ folgen

$$(\widetilde{V} - \lambda I_{\widetilde{\mathbf{X}}})^{-1}(V - \lambda I_{\mathbf{X}})x = (\widetilde{V} - \lambda I_{\widetilde{\mathbf{X}}})^{-1}(\widetilde{V} - \lambda I_{\widetilde{\mathbf{X}}})x = x\,,$$

so dass $V - \lambda I_{\mathbf{X}}$ von links invertierbar wäre im Widerspruch zu Lemma 2.12. $\square$

Wir definieren $\mathcal{R}(\widetilde{V})$ und $\mathcal{R}_{\pm}(\widetilde{V})$ sowie $\overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$ und $\overline{\mathcal{R}}_{\pm}(\widetilde{V})$ analog zu $\mathcal{R}(V)$ und $\mathcal{R}_{\pm}(V)$ sowie $\overline{\mathcal{R}}(V)$ und $\overline{\mathcal{R}}_{\pm}(V)$. Jedem $R = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k \widetilde{V}^k \in \mathcal{R}(\widetilde{V})$ ordnen wir sein Symbol $R(t) = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k t^k$ zu. Wie oben folgt $\|R\|_\infty \leq \|R\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})}\ \forall\, R \in \mathcal{R}(\widetilde{V})$, so dass jedem $A \in \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$ eindeutig sein Symbol $A(t)$ zugeordnet werden kann, wobei $A(t)$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{T}$ ist. Dabei gilt

$$\|A\|_\infty \leq \|A\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})} \quad \forall\, A \in \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})\,. \tag{2.9}$$

Lemma 2.17 *Sind $t_0 \in \mathbb{T}$ und*

$$\mathcal{M}_{t_0} := \left\{A \in \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V}) : A(t_0) = 0\right\},$$

so ist $\mathcal{M}_{t_0}$ ein maximales Ideal in $\overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$. Ist $\mathcal{M}$ ein beliebiges maximales Ideal in $\overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$, so existiert ein $t_0 \in \mathbb{T}$ mit $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{t_0}$.

Beweis. Für $t_0 \in \mathbb{T}$ definieren wir das lineare multiplikative Funktional

$$m_{t_0} : \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V}) \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad A \mapsto A(t_0)\,.$$

Die Linearität dieses Funktionals ist offensichtlich. Die Multiplikativität kann wie folgt gezeigt werden: Sind $R_1, R_2 \in \mathcal{R}(\widetilde{V})$ und $R = R_1 R_2$, so gilt $R(t) = R_1(t) R_2(t)$. Dies überträgt sich wegen (2.9) auf $A_1, A_2 \in \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$ und $A = A_1 A_2$. Es folgt $\mathcal{M}_{t_0} = N(m_{t_0})$, so dass $\mathcal{M}_{t_0}$ ein maximales Ideal in $\overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$ ist (vgl. [13, Bsp. 2.9]).

Ist nun $\mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$ ein beliebiges maximales Ideal, so existiert ein lineares multiplikatives Funktional m mit $\mathcal{M} = N(m)$ (vgl. [13, Abschnitt 2.2]). Wegen $m(\widetilde{V}) = \sigma_{\overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})}(\widetilde{V}) = \sigma(\widetilde{V}) = \mathbb{T}$ folgt $t_0 := m(\widetilde{V}) \in \mathbb{T}$. Aus $1 = m(I_{\widetilde{\mathbf{X}}}) = m(\widetilde{V}^{-1}\widetilde{V}) = m(\widetilde{V}^{-1}) t_0$ erhalten wir $m(\widetilde{V}^{-1}) = t_0^{-1}$, und aus der Linearität und der Multiplikativität von m folgt $m(R) = R(t_0)\ \forall\, R \in \mathcal{R}(\widetilde{V})$. Die Stetigkeit von m liefert zusammen mit (2.9) auch $m(A) = A(t_0)\ \forall\, A \in \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$. Es folgt $\mathcal{M} = \mathcal{M}(t_0)$. $\square$

Folgerung 2.18 *Ein Operator $A \in \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$ ist genau dann in $\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})$ invertierbar, wenn $A(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$ gilt. In diesem Fall ist $A^{-1} \in \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$.*

Mit $\overline{\mathcal{R}}_0(\widetilde{V})$ bezeichnen wir die Menge der Operatoren $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$, für die ein $\widetilde{A} \in \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$ existiert, so dass $A = P\widetilde{A}\Big|_{\mathbf{X}}$ gilt.

(a) Es ist $\overline{\mathcal{R}}_0(\widetilde{V}) \subset \overline{\mathcal{R}}(V)$.

Beweis. Wir haben $P\widetilde{V}^k x = V^{(k)} x\ \forall\, x \in \mathbf{X}$. Es seien $A = P\widetilde{A}|_{\mathbf{X}}$, $\widetilde{A} \in \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\widetilde{R} = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k \widetilde{V}^k \in \mathcal{R}(\widetilde{V})$ mit $\big\|\widetilde{R} - \widetilde{A}\big\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})} \leq \dfrac{\varepsilon}{\|P\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})}}$. Es folgt

$\big\|(P\widetilde{R}-A)x\big\|_{\mathbf{X}} \le \varepsilon \, \|x\|_{\mathbf{X}} \;\forall\, x \in \mathbf{X}$, d.h., $\big\|P\widetilde{R}-A\big\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} \le \varepsilon$, und $P\widetilde{R} = \widetilde{R}(V) = \sum\limits_{k=n}^{m} \alpha_k V^{(k)}$,

falls $\widetilde{R} = \sum\limits_{k=n}^{m} \alpha_k \widetilde{V}^k$. □

(b) Aus $A = P\widetilde{A}\Big|_{\mathbf{X}}$ mit $\widetilde{A} \in \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$ folgt $A(t) = \widetilde{A}(t)$.

Beweis. Aus dem Beweis von (a) folgt $\widetilde{R}(t) = R(t)$ und somit $\widetilde{A}(t) = A(t)$. □

Satz 2.19 *Ein Operator $A \in \overline{\mathcal{R}}_0(\widetilde{V})$ ist genau dann von wenigstens einer Seite in $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ invertierbar, wenn $A(t) \neq 0 \;\forall\, t \in \mathbb{T}$ gilt. In diesem Fall ist A invertierbar, nur von links invertierbar bzw. nur von rechts invertierbar, wenn $\kappa = \operatorname{ind} A(t) := \frac{1}{2\pi}\big[\arg A(e^{\mathbf{i}\varphi})\big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}$ gleich, größer bzw. kleiner Null ist.*

Beweis. Es seien $A = P\widetilde{A}|_{\mathbf{X}}$, $\widetilde{A} \in \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$ und $A(t) = \widetilde{A}(t) \neq 0 \;\forall\, t \in \mathbb{T}$. Dann existieren $\widetilde{A}^{-1} \in \overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$ und ein $\widetilde{R} \in \mathcal{R}(\widetilde{V})$ mit

$$\big\|\widetilde{R} - \widetilde{A}\big\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})} < \frac{1}{2\big\|\widetilde{A}^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})} \, \|P\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})}} \le \frac{1}{2\big\|\widetilde{A}^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})}}\,.$$

Damit existiert $\widetilde{R}^{-1} = \big(I_{\widetilde{\mathbf{X}}} - \widetilde{A}^{-1}\widetilde{B}\big)\widetilde{A}^{-1}$ mit $\widetilde{B} = \widetilde{A} - \widetilde{R}$ und

$$\big\|\widetilde{R}^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})} \le \frac{\big\|\widetilde{A}^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\big\|\widetilde{A}^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})}$$

Es folgt

$$\widetilde{R}^{-1}\widetilde{A} = I_{\widetilde{\mathbf{X}}} + \widetilde{R}^{-1}\widetilde{B} =: I_{\widetilde{\mathbf{X}}} * \widetilde{D} \quad \text{mit} \quad \big\|D\big\| < \frac{1}{\|P\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})}}\,.$$

Wegen $\widetilde{R}(t) = \widetilde{R}_-(t)t^\kappa \widetilde{R}_+(t)$ und $\operatorname{ind}\big(\widetilde{R}^{-1}\widetilde{A}\big)(t) = 0$ folgt $\widetilde{R} = \widetilde{R}_-\widetilde{V}^\kappa\widetilde{R}_+$ mit $\kappa = \operatorname{ind}\widetilde{A}(t) = \operatorname{ind} A(t)$. Damit ist $\widetilde{A} = \widetilde{R}\big(I_{\widetilde{\mathbf{X}}} + \widetilde{D}\big) = \widetilde{R}_-\big(I_{\widetilde{\mathbf{X}}} + \widetilde{D}\big)\widetilde{V}^\kappa\widetilde{R}_+$. Unter Verwendung von $P\widetilde{V}P = \widetilde{V}P$ und $P\widetilde{V}^{-1}P = P\widetilde{V}^{-1}$ folgt

$$P\widetilde{A}P = P\widetilde{R}_+P\big[P\big(I_{\widetilde{\mathbf{X}}} + \widetilde{D}\big)\widetilde{V}^\kappa P\big]P\widetilde{R}_+P\,.$$

Die Operatoren $R_\pm := P\widetilde{R}_\pm P|_{\mathbf{X}}$ sind nach Satz 2.14 invertierbar. Nun ist im Fall

$\kappa = 0$ der Operator $P\big(I_{\widetilde{\mathbf{X}}} + \widetilde{D}\big)P|_{\mathbf{X}} = I_{\mathbf{X}} + P\widetilde{D}|_{\mathbf{X}}$ wegen $\big\|P\widetilde{D}\big\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} < 1$ invertierbar,

$\kappa > 0$ der Operator $P\big(I_{\widetilde{\mathbf{X}}} + \widetilde{D}\big)\widetilde{V}^\kappa P|_{\mathbf{X}} = \big(I_{\mathbf{X}} + P\widetilde{D}|_{\mathbf{X}}\big)P\widetilde{V}^\kappa P|_{\mathbf{X}} = \big(I_{\mathbf{X}} + P\widetilde{D}|_{\mathbf{X}}\big)V^{(\kappa)}$ nur von links invertierbar,

$\kappa < 0$ der Operator $P\big(I_{\widetilde{\mathbf{X}}} + \widetilde{D}\big)\widetilde{V}^\kappa P|_{\mathbf{X}} = P\widetilde{V}^\kappa P|_{\mathbf{X}}\big(I_{\mathbf{X}} + P\widetilde{D}|_{\mathbf{X}}\big) = V^{(\kappa)}\big(I_{\mathbf{X}} + P\widetilde{D}|_{\mathbf{X}}\big)$ nur von rechts invertierbar. □

Folgerung 2.20 *Sind $A \in \overline{\mathcal{R}}_0(\widetilde{V})$, $A(t) \neq 0 \;\forall\, t \in \mathbb{T}$ und $\kappa = \operatorname{ind} A(t)$, so gilt*

$$\dim N(A) = \dim N(V^{(\kappa)}) \quad \textit{und} \quad \operatorname{codim} R(A) = \operatorname{codim} R(V^{(\kappa)})\,.$$

2.4 Anwendung auf Wiener-Hopf'sche Integralgleichungen

Entsprechend der Überlegungen am Ende von Abschnitt 2.1 können wir feststellen, dass Operatoren der Gestalt

$$(\widetilde{R}u)(x) := u(x) - \int_{-\infty}^{\infty} r(x-y)u(y)\,dy\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit

$$r(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} p_1(x)e^{-x} & : & x > 0\,, \\ p_2(x)e^{x} & : & x < 0\,, \end{array} \right\}$$

und Polynomen $p_j(x)$ zu $\mathcal{R}(\widetilde{V})$ gehören, wobei $\mathbf{X} = \mathbf{L}^p(0,\infty)$, $\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$,

$$(\widetilde{V}u)(x) = u(x) - 2\int_{-\infty}^{x} e^{y-x}u(y)\,dy\,, \quad (\widetilde{V}^{-1}u)(x) = u(x) - 2\int_{x}^{\infty} e^{x-y}u(y)\,dy$$

und

$$(Pu)(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} u(x) & : & x > 0\,, \\ 0 & : & x < 0\,, \end{array} \right\}$$

zu setzen sind. Unter Verwendung der Folgerungen 2.2 und 2.3 sieht man, dass Operatoren der Gestalt

$$(\widetilde{A}u)(x) := u(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)u(y)\,dy\,, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.10}$$

mit $k \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ zu $\overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$ gehören. Operatoren $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ mit

$$(Au)(x) := u(x) - \int_{0}^{\infty} k(x-y)u(y)\,dy\,, \quad 0 < x < \infty \tag{2.11}$$

kann man als $P\widetilde{A}\Big|_{\mathbf{X}}$ schreiben, gehören also zu $\overline{\mathcal{R}}_0(\widetilde{V})$. Einem Operator der Gestalt (2.10) ordnen wir die Funktion

$$\widehat{A}(\lambda) := 1 - \int_{-\infty}^{\infty} k(x)e^{\mathbf{i}\lambda x}\,dx\,, \quad -\infty \le \lambda \le \infty$$

zu. Man beachte, dass wegen der Eigenschaft (F1) der Fouriertransformation $\widehat{A}(\pm\infty) = 1$ gilt. Wegen $\widetilde{V}u = u - e * u$ mit $e(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2\,e^{-x} & : & x > 0\,, \\ 0 & : & x < 0\,, \end{array} \right\}$ und $2\int_0^{\infty} e^{-x}e^{\mathbf{i}\lambda x}\,dx = \dfrac{2}{1-\mathbf{i}\lambda}$ gilt $\widehat{V}(\lambda) = 1 - \dfrac{2}{1-\mathbf{i}\lambda} = \dfrac{\lambda - \mathbf{i}}{\lambda + \mathbf{i}}$. Aus $\widetilde{V}^2 u = u - e*u - e*(u - e*u) = u - 2e*u + (e*e)*u$ folgt $\widehat{V^2}(\lambda) = 1 - 2\dfrac{2}{1-\mathbf{i}\lambda} + \left(\dfrac{2}{1-\mathbf{i}\lambda}\right)^2 = \left(\dfrac{\lambda-\mathbf{i}}{\lambda+\mathbf{i}}\right)^2$. Allgemein gilt $\widehat{V^n}(\lambda) = \left(\dfrac{\lambda-\mathbf{i}}{\lambda+\mathbf{i}}\right)^n$, $n \in \mathbb{Z}$ (vgl. Bemerkung 2.23). Für $\widetilde{R} \in \mathcal{R}(\widetilde{V})$ folgt

$$\widehat{R}(\lambda) = \widetilde{R}\left(\frac{\lambda-\mathbf{i}}{\lambda+\mathbf{i}}\right) \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{R}(t) = \widehat{R}\left(\mathbf{i}\,\frac{1+t}{1-t}\right).$$

Ist nun der Operator $\widetilde{A}$ von der Form (2.10), so existieren Operatoren $\widetilde{R}_n \in \mathcal{R}(\widetilde{V})$ mit $\big(\widetilde{R}u\big)(x) = u(x) - \int_{-\infty}^{\infty} r_n(x-y)u(y)\,dy$ und $\|r_n - k\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$. Es folgt $\big\|\widetilde{R}_n - \widetilde{A}\big\|_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{X}})} \le \|r_n - k\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$ und $\big\|\widetilde{R}_n - \widetilde{A}\big\|_{\infty,\mathbb{T}} = \big\|\widehat{R}_n - \widehat{A}\big\|_{\infty,\mathbb{R}} \overset{(F1)}{\le} \text{const}\,\|r_n - k\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$, also auch

$$\widehat{A}(\lambda) = A\left(\frac{\lambda-\mathbf{i}}{\lambda+\mathbf{i}}\right),\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad A(t) = \widehat{A}\left(\mathbf{i}\frac{1+t}{1-t}\right),\ t \in \mathbb{T}$$

Die Anwendung von Satz 2.19 liefert den folgenden Satz.

Satz 2.21 *Für $k \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ ist der durch (2.11) definierte Operator $A : \mathbf{L}^p(0,\infty) \longrightarrow \mathbf{L}^p(0,\infty)$, $1 \le p < \infty$ genau dann von wenigstens einer Seite invertierbar, wenn $\widehat{A}(\lambda) \neq 0 \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt. In diesem Fall ist A invertierbar, nur von links invertierbar bzw. nur von rechts invertierbar, wenn*

$$\kappa = \operatorname{ind} \widehat{A}(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \left[\arg \widehat{A}(\lambda)\right]_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty}$$

gleich, größer bzw. kleiner Null ist.

Beispiel 2.22 *Für $\mu \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Integralgleichung*

$$u_0(t) - \mu \int_0^1 \frac{\ln t - \ln s}{t-s}\, u_0(s)\, ds = f_0(t)\,, \quad 0 < t < 1\,. \tag{2.12}$$

Wir wählen ein $\beta \in (0,1)$ und definieren

$$f(x) := e^{-\beta x} f_0(e^{-x})\,, \quad u(x) := e^{-\beta x} u_0(e^{-x})\,, \quad 0 < x < \infty\,.$$

Substituieren wir in (2.12) $t = e^{-x}$ und $s = e^{-y}$, so erhalten wir die zu (2.12) äquivalente Integralgleichung

$$(A_\mu u)(x) := u(x) - \mu \int_0^\infty k(x-y) u(y)\, dy = f(x)\,, \quad 0 < x < \infty \tag{2.13}$$

mit

$$k(x) = \frac{x e^{-\beta x}}{1 - e^{-x}}\,.$$

Da $k \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ gilt, können wir Satz 2.21 auf den Operator $A_\mu : \mathbf{L}^p(0,\infty) \longrightarrow \mathbf{L}^p(0,\infty)$ ($1 \le p < \infty$) anwenden. Dies ist dann äquivalent dazu, dass wir den durch die linke Seite von (2.12) definierten Operator im Raum $\mathbf{L}^p_\beta(0,1)$ betrachten, wobei die Norm in diesem Raum durch

$$\|u_0\|_{\mathbf{L}^p_\beta(0,1)} := \left(\int_0^1 t^{p\beta - 1} |u_0(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

definiert ist. Es ist

$$\widehat{k}(\lambda) := \int_{-\infty}^\infty k(x) e^{\mathbf{i}\lambda x}\, dx = F_1(\lambda) + \mathbf{i} F_2(\lambda)$$

mit

$$F_1(\lambda) = \frac{\pi^2 \left[\cos^2(\pi\beta) + \left(1 - 2\cos^2(\pi\beta)\right)\cosh^2(\pi\lambda)\right]}{\left[\cosh^2(\pi\lambda) - \cos^2(\pi\beta)\right]^2} \text{ und } F_2(\lambda) = \frac{\pi^2 \sin(2\pi\beta)\sinh(2\pi\lambda)}{2\left[\cosh^2(\pi\lambda) - \cos^2(\pi\beta)\right]^2}\,.$$

Insbesondere gilt also

$$F_1(\lambda) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\beta)}\,, \quad F_2(0) = 0\,,\ \text{d.h. } \widehat{k}(0) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\beta)}$$

und für $\beta = \frac{1}{2}$

$$F_1(\lambda) = \frac{\pi^2}{\cosh^2(\pi\lambda)}\,, \quad F_2(\lambda) = 0\,,\ \text{d.h. } \widehat{k}(\lambda) = \frac{\pi^2}{\cosh(\pi\lambda)}\,.$$

Man erhält folgende Resultate:

1. *$\beta = \frac{1}{2}$: Der Operator $A_\mu : \mathbf{L}^p(0,\infty) \longrightarrow \mathbf{L}^p(0,\infty)$ ist genau dann von wenigstens einer Seite invertierbar, wenn $\mu < \dfrac{1}{\pi^2}$ gilt. In diesem Fall ist A_μ invertierbar.*

   Beweis. Es gilt $\widehat{A}_\mu(\lambda) \neq 0 \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $1 - \dfrac{\mu\pi^2}{a} \neq 0 \ \forall\, a \ge 1$ gilt, was wiederum äquivalent zu $\mu\pi^2 < a \ \forall\, a \ge 1$ ist. Insbesondere ist dann $\widehat{A}_\mu(\lambda) > 0 \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, also $\kappa = 0$. □

2. $\beta \neq \frac{1}{2}$*: Der Operator* $A_\mu : \mathbf{L}^p(0,\infty) \longrightarrow \mathbf{L}^p(0,\infty)$ *ist genau von wenigstens einer Seite invertierbar, wenn* $\mu \neq \mu_0 := \dfrac{\sin^2(\pi\beta)}{\pi^2}$ *gilt. In diesem Fall ist* A_μ *von links invertierbar, wenn* $0 < \beta < \frac{1}{2}$ *und* $\mu_0 < \mu < \infty$ *gilt, von rechts invertierbar, wenn* $\frac{1}{2} < \beta < 1$ *und* $\mu_0 < \mu < \infty$ *gilt, und invertierbar, wenn* $-\infty < \mu < \mu_0$ *gilt.*

Beweis. Wir brauchen nur $\mu \neq 0$ betrachten. Wir haben $\mathsf{Im}\, \widehat{A}_\mu(\lambda) = -\mu F_2(\lambda)$ und $\widehat{A}_\mu(0) = 1 - \mu F_1(0) = 1 - \dfrac{\mu\pi^2}{\sin^2(\pi\beta)}$. Es gilt $\widehat{A}_\mu(\lambda) = 0$ genau dann, wenn $F_2(\lambda) = 0$ und $\mathsf{Re}\, \widehat{A}_\mu(\lambda) = 0$, also $\lambda = 0$ und $\mu = \mu_0$ gilt.

$-\infty < \mu < \mu_0$: In diesem Fall ist $\widehat{A}_\mu(0) = 1 - \dfrac{\mu}{\mu_0} > 0$ und

$$\mathsf{Im}\, \widehat{A}_\mu(\lambda) = -\mu F_2(\lambda) \neq 0 \quad \text{für} \quad \lambda \neq 0\,,$$

also $\kappa = 0$.

$0 < \beta < \frac{1}{2}$, $\mu_0 < \mu < \infty$: Jetzt ist $\widehat{A}_\mu(0) = 1 - \dfrac{\mu}{\mu_0} < 0$ und

$$\mathsf{Im}\, \widehat{A}_\mu(\lambda) = -\mu F_2(\lambda) \begin{cases} < 0 & : \quad \lambda > 0\,, \\ > 0 & : \quad \lambda < 0\,, \end{cases}$$

also $\kappa = 1$.

$\frac{1}{2} < \beta < 1$, $\mu_0 < \mu < \infty$: Wegen $\widehat{A}_\mu(0) < 0$ und $\mathsf{Im}\, \widehat{A}_\mu(\lambda) \left\{ \begin{array}{lcl} > 0 & : & \lambda > 0\,, \\ < 0 & : & \lambda < 0\,, \end{array} \right\}$ haben wir $\kappa = -1$. □

Hinweis zur Berechnung von $\widehat{k}(\lambda)$ im Beispiel 2.22: Es gilt

$$\widehat{k}(\lambda) = -\mathbf{i}\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{1-e^{-x}}\, e^{\mathbf{i}\lambda x}\, dx = \frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{1-e^{-x}} \sin(\lambda x)\, dx - \mathbf{i}\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{1-e^{-x}} \cos(\lambda x)\, dx$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{1-e^{-x}} \sin(\lambda x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\beta - \frac{1}{2})x}{\sinh \frac{x}{2}} \sin(\lambda x)\, dx = \frac{\pi \sinh(2\pi\lambda)}{\cosh(2\pi\lambda) - \cos(2\pi\beta)}$$

sowie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{1-e^{-x}} \cos(\lambda x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sinh(\beta - \frac{1}{2})x}{\sinh \frac{x}{2}} \cos(\lambda x) = \frac{\pi \sin(2\pi\beta)}{\cosh(2\pi\lambda) - \cos(2\pi\beta)}$$

(siehe [26, 2.5.46, 9. und 8.]).

Bemerkung 2.23 *Induktiv kann man zeigen, dass* $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$(V^n u)(x) = u(x) - \int_0^x k_n^0(y-x)u(y)\, dy\,, \quad 0 < x < \infty$$

und

$$(V^{(-n)} u)(x) = u(x) - \int_x^{\infty} k_n^0(x-y)u(y)\, dy\,, \quad 0 < x < \infty$$

gilt, wobei

$$k_n^0(x) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{2^j}{(j-1)!}\, x^{j-1} e^x\,.$$

Somit ist also $\widehat{V^{(n)}}(\lambda) = 1 - \widehat{k}_n(\lambda)$ *mit*

$$\widehat{k}_n(\lambda) = \left\{ \begin{array}{lcl} \displaystyle\int_0^\infty k_n^0(-x)e^{\mathbf{i}\lambda x}\,dx & : & n > 0\,, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^0 k_n^0(x)e^{\mathbf{i}\lambda x}\,dx & : & n < 0\,, \end{array} \right\}$$

also $\widehat{k}_{-n}(\lambda) = \widehat{k}_n(-\lambda)$. *Aus*

$$\int_0^\infty e^{-x}e^{\mathbf{i}\lambda x}\,dx = \frac{1}{1-\mathbf{i}\lambda}$$

und

$$(-\mathbf{i})^j \int_0^\infty (-x)^j e^{-x}e^{\mathbf{i}\lambda x}\,dx = \frac{d^j}{d\lambda^j}\frac{1}{1-\mathbf{i}\lambda} = \frac{\mathbf{i}^j j!}{(1-\mathbf{i}\lambda)^{j+1}}$$

folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$1 - \widehat{k}_n(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j}\left(\frac{2}{\mathbf{i}\lambda - 1}\right)^j = \left(\frac{\lambda - \mathbf{i}}{\lambda + \mathbf{i}}\right)^n$$

und

$$1 - \widehat{k}_{-n}(\lambda) = \left(\frac{\lambda + \mathbf{i}}{\lambda - \mathbf{i}}\right)^n .$$

2.5 Projektionsverfahren

Wir wollen z.B. folgende Frage beantworten: Kann man für die Gleichung

$$u(x) - \int_0^\infty k(x-y)u(y)\,dy = f(x)\,, \quad 0 < x < \infty \tag{2.14}$$

durch Lösen der Gleichung

$$u_n(x) - \int_0^n k(x-y)u_n(y)\,dy = f(x)\,, \quad 0 < x < n \tag{2.15}$$

eine Näherungslösung gewinnen?

Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume, $P_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ und $Q_n \in \mathcal{L}(\mathbf{Y})$ Projektoren, $\mathbf{X}_n := R(P_n)$, $\mathbf{Y}_n := R(Q_n)$, und $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Neben der Gleichung

$$Au = f \in \mathbf{Y}\,,\ u \in \mathbf{X} \tag{2.16}$$

betrachten wir die Gleichung

$$Q_nAu_n = Q_nf\,,\ u_n \in \mathbf{X}_n\,. \tag{2.17}$$

Im Weiteren identifizieren wir die Operatoren Q_nAP_n mit $Q_nA|_{\mathbf{X}_n} \in \mathcal{L}(\mathbf{X}_n,\mathbf{Y}_n)$. Wir bemerken, dass $\mathbf{X}_n$ und $\mathbf{Y}_n$ als Bildräume stetiger Projektoren selbst Banachräume sind.

Definition 2.24 *Man sagt, dass das* **Projektionsverfahren** (P_n, Q_n) *auf die Gleichung* (2.16) *bzw. den Operator* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ *anwendbar ist, in Zeichen* $A \in \Pi(P_n,Q_n)$, *wenn ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass* $\forall\, f \in \mathbf{Y}$ *und* $\forall\, n \geq n_0$ *die Gleichung* (2.17) *eindeutig lösbar ist und die Lösungen* u_n (*in der Norm von* $\mathbf{X}$) *gegen eine Lösung der Gleichung* (2.16) *konvergieren.*

Es ist $A \in \Pi(P_n,Q_n)$ äquivalent dazu, dass

$$Q_nAP_n \in G\mathcal{L}(\mathbf{X}_n,\mathbf{Y}_n)\ \forall\, n \geq n_0 \text{ und } (Q_nAP_n)^{-1}Q_n \longrightarrow B \in \mathcal{L}(\mathbf{Y},\mathbf{X}) \text{ mit } ABf = f\ \forall\, f \in \mathbf{Y}$$

gilt.

Satz 2.25 *Es seien* $P_n \longrightarrow I$, $Q_n \longrightarrow I$ *und* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. *Es gilt* $A \in \Pi(P_n, Q_n)$ *genau dann, wenn* $A \in G\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *gilt und wenn ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *und ein* $\gamma_0 > 0$ *existieren, so dass* $\forall\, n \geq n_0$

$$R(Q_n A P_n) = \mathbf{Y}_n \quad \text{und} \quad \|Q_n A P_n u\| \geq \gamma_0 \, \|P_n u\| \;\; \forall\, u \in \mathbf{X} \,. \tag{2.18}$$

Beweis. Es sei $A \in \Pi(P_n, Q_n)$. Aus der Invertierbarkeit der Operatoren $Q_n A P_n$ folgt sofort $R(Q_n A P_n) = \mathbf{Y}_n$. Die starke Konvergenz $(Q_n A P_n)^{-1} Q_n \longrightarrow B$ liefert die gleichmäßige Beschränkheit der Operatoren $(Q_n A P_n)^{-1} Q_n$, so dass für $u \in \mathbf{X}$ gilt

$$\|P_n u\| = \left\|(Q_n A P_n)^{-1} Q_n (Q_n A P_n) P_n u\right\| \leq \frac{1}{\gamma_0} \, \|Q_n A P_n u\|$$

mit einem gewissen $\gamma_0 > 0$. Für $n \longrightarrow \infty$ folgt $\|Au\| \geq \gamma_0 \, \|u\|$, also $\dim N(A) = 0$. Außerdem impliziert $A \in \Pi(P_n, Q_n)$ auch $R(A) = \mathbf{Y}$.

Seien nun $A \in G\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ und (2.18) erfüllt. Es folgt sofort $\dim N(Q_n A P_n) = 0$ und somit die Invertierbarkeit von $Q_n A P_n : \mathbf{X}_n \longrightarrow \mathbf{Y}_n$ für alle hinreichend großen n . Für $u_n^* = (Q_n A P_n)^{-1} Q_n f$ und $u^* = A^{-1} f$ folgt

$$\|u_n^* - P_n u^*\| \leq \frac{1}{\gamma_0} \, \|Q_n A P_n u_n^* - Q_n A P_n u^*\| = \|Q_n A u^* - Q_n A P_n u^*\| \longrightarrow 0 \,,$$

woraus sich auch $\|u_n^* - u^*\| \leq \|u_n^* - P_n u^*\| + \|P_n u^* - u^*\| \longrightarrow 0$ ergibt. □

Für das Weitere setzen wir $P_n \longrightarrow I$ und $Q_n \longrightarrow I$ voraus.

Lemma 2.26 *Es seien* $A \in G\mathcal{L}(\mathbf{Y})$, $B \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $C \in G\mathcal{L}(\mathbf{X})$ *und folgende Voraussetzungen erfüllt:*

(a) $Q_n A Q_n = Q_n A$ *und* $N\left(Q_n A|_{\mathbf{Y}_n}\right) = \{\Theta\}$,

(b) $B \in \Pi(P_n, Q_n)$,

(c) $P_n C P_n = C P_n$ *und* $R(C P_n) = \mathbf{X}_n$.

Dann gilt $ABC \in \Pi(P_n, Q_n)$.

Beweis. Es ist $u_n^* = Q_n A^{-1} f$ die eindeutige Lösung in $\mathbf{Y}_n$ der Gleichung $Q_n A Q_n u_n = Q_n f$, denn es gilt $Q_n A Q_n A^{-1} f \stackrel{(a)}{=} Q_n A A^{-1} f = Q_n f$, wobei $Q_n A^{-1} f \longrightarrow A^{-1} f \;\forall\, f \in \mathbf{Y}$ gilt. Somit ist $A \in \Pi(Q_n, Q_n)$. Wegen (c) ist $v_n^* = C^{-1} P_n f$ die eindeutige Lösung in $\mathbf{X}_n$ der Gleichung $P_n C P_n v_n = P_n f$, wobei $v_n^* \longrightarrow C^{-1} f \;\forall\, f \in \mathbf{X}$ gilt. Somit haben wir $C \in \Pi(P_n, P_n)$. Satz 2.25 liefert wegen $Q_n ABC P_n = (Q_n A Q_n)(Q_n B P_n)(P_n C P_n)$ und (b)

$$\|Q_n ABC P_n u\| \geq \gamma_A \gamma_B \gamma_C \, \|P_n u\| \quad \forall\, u \in \mathbf{X} \,.$$

Da unter den gemachten Voraussetzungen offenbar $R(Q_n ABC P_n) = \mathbf{Y}_n$ gilt, folgt aus Satz 2.25 die Behauptung. □

Lemma 2.27 *Ist* $A \in \Pi(P_n, Q_n)$, *so existiert eine Konstante* $\delta > 0$ *mit*

$$A + B \in \Pi(P_n, Q_n) \quad \forall\, B \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \|B\| < \delta \,.$$

Beweis. Wir setzen $M := \sup\{\|P_n\| \, \|Q_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ und $\delta := \dfrac{\gamma_0}{2M}$ mit γ_0 aus (2.18). Für $\|B\| < \delta$ gilt dann (für alle hinreichend großen n)

$$\|Q_n(A+B)P_n u\| \geq \|Q_n A P_n u\| - \|Q_n B P_n u\| \geq \gamma_0 \, \|P_n u\| - \frac{\gamma_0}{2} \, \|P_n u\| = \frac{\gamma_0}{2} \, \|P_n u\| \quad \forall\, u \in \mathbf{X} \,.$$

Wegen $Q_n(A+B)P_n = Q_n A P_n \left[I_{\mathbf{X}_n} + (Q_n A P_n)^{-1} Q_n B P_n\right]$ und $\left\|(Q_n A P_n)^{-1} Q_n B P_n\right\| \leq \frac{1}{\gamma_0} \frac{\gamma_0}{2} = \frac{1}{2}$ ist $Q_n(A+B)P_n : \mathbf{X}_n \longrightarrow \mathbf{Y}_n$ invertierbar. Satz 2.25 liefert die Behauptung. □

Lemma 2.28 *Sind* $A \in \Pi(P_n, Q_n)$, $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *(d.h., kompakt) und* $A + T \in G\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, *so gilt*

$$A + T \in \Pi(P_n, Q_n)\,.$$

Beweis. Unter Verwendung von (2.18) folgt

$$\begin{aligned}
\|Q_n(A+T)P_nu\| &= \left\|Q_nAP_n\left[P_nu + (Q_nAP_n)^{-1}Q_nTP_nu\right]\right\| \\
&\geq \gamma_0\left\|P_nu + A^{-1}TP_nu\right\| - \gamma_0\left\|\left[(Q_nAP_n)^{-1}Q_nT - A^{-1}T\right]P_nu\right\| \\
&\geq \frac{\gamma_0\|P_nu\|}{\|(I+A^{-1}T)^{-1}\|} - \gamma_0\left\|\left[(Q_nAP_n)^{-1}Q_nT - A^{-1}T\right]P_nu\right\| \\
&\geq \gamma_1\|P_nu\| \quad \forall\, n \geq n_1\,,\ \forall\, u \in \mathbf{X}\,,
\end{aligned}$$

weil wegen $(Q_nAP_n)^{-1}Q_n \longrightarrow A^{-1}$ und $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ gilt $\left\|(Q_nAP_n)^{-1}Q_nT - A^{-1}T\right\| \longrightarrow 0$. Insbesondere ist $Q_n(A+T)P_n = Q_AP_n + Q_nTP_n : \mathbf{X}_n \longrightarrow \mathbf{Y}_n$ injektive und somit wegen der Invertierbarkeit von Q_nAP_n und der Kompaktheit von Q_nTP_n auch surjektiv. Es bleibt Satz 2.25 anzuwenden. □

Es seien nun neben $P_n \longrightarrow I$ die Voraussetzungen (V1), (V2) und (V3) erfüllt.

Satz 2.29 *Es gelte* $\operatorname{codim} R(V) < \infty$ *und für* $n \in \mathbb{N}$

$$P_nVP_n = P_nV \quad \textit{und} \quad P_nV^{(-1)}P_n = V^{(-1)}P_n\,. \tag{2.19}$$

Ein Operator $A \in \overline{\mathcal{R}}_0(\widetilde{V})$ *gehört genau dann zu* $\Pi(P_n, P_n)$, *wenn* $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ *invertierbar ist.*

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 2.19 können wir entnehmen, dass unter der Voraussetzung $A \in G\mathcal{L}(\mathbf{X})$ der Operator $A \in \overline{\mathcal{R}}_0(\widetilde{V})$ in der Form $A = R_-(I+D)R_+$ mit invertierbaren Operatoren $R_\pm \in \mathcal{R}_\pm(V)$ und einem Operator D mit so kleiner Norm, dass $I + D \in \Pi(P_n, P_n)$ gilt (siehe Lemma2.27), geschrieben werden kann. Wir setzen $B := R_+(I+D)R_-$ und zeigen, dass B zu $\Pi(P_n, P_n)$ gehört. Aus den gemachten Voraussetzungen folgt $P_nR_+P_n = P_nR_+$ und $P_nR_-P_n = R_-P_n$ und wegen $R_\pm^{-1} \in \overline{\mathcal{R}}_\pm(V)$ auch $P_nR_+^{-1}P_n = P_nR_+^{-1}$ bzw. $P_nR_-^{-1}P_n = R_-^{-1}P_n$. Es folgt $(P_nR_\pm P_n)^{-1} = P_mR_\pm P_n$ und mit Lemma 2.26 $B \in \Pi(P_n, P_n)$. Es bleibt zu zeigen, dass $A - B \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ gilt (vgl. Lemma 2.28):

- Für $j, k \in \mathbb{Z}$ und $j < 0 < k$ ist $S = V^{(j)}V^{(k)} - V^{(k)}V^{(j)} = V^{j+k)} - V^{(j+k)}V^{-j}V^{(j)} = V^{(j+k)}\left[I - V^{-j}V^{(j)}\right]$ ein Operator mit endlichdimensionalem Bild, also $S \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$. Man beachte dabei, dass $Q = V^{-j}V^{(j)}$ ein Projektor mit $R(Q) = R^(V^{-j})$ ist (wegen $R(V^{(j)}) = \mathbf{X}$) und somit

  $$\dim R(Q) = \operatorname{codim} R(V^{-j}) = \dim N(V^{(j)}) \leq j\,\dim N(V^{(-1)}) = j\operatorname{codim} R(V)$$

  gilt.

- Wegen $V^{(j)}V^{(k)} - V^{(k)}V^{(j)} = -\left[V^{(k)}V^{(j)} - V^{(j)}V^{(k)}\right]$ gilt dies auch für $k < 0 < j$.

- Für $j, k \leq 0$ oder $j, k \geq 0$ ist $S = \theta$.

- Es folgt $A_1A_2 - A_2A_1 \in \mathcal{K}(\mathbf{X})\ \forall\, A_j \in \overline{\mathcal{R}}(V)$.

- Schließlich folgt

  $$\begin{aligned}
  A - B &= \left[R_-(I+D) - (I+D)R_-\right]R_+ \\
  &\qquad + (I+D)\left[R_-R_+ - R_+R_-\right] + \left[(I+D)R_+ - R_+(I+D)\right]R_- \in \mathcal{K}(\mathbf{X})\,.
  \end{aligned}$$

Der Satz ist bewiesen. □

Für die Anwendung von Satz 2.29 auf (2.14) und (2.15) setzen wir $\mathbf{X} = \mathbf{L}^p(0,\infty)$, $1 \le p < \infty$ und

$$(P_n u)(x) := \begin{cases} u(x) & : \quad 0 < x < n\,, \\ 0 & : \quad n < x\,. \end{cases}$$

Dann gilt $P_n \longrightarrow I$, und mit

$$(Vu)(x) = u(x) - 2\int_0^x e^{y-x} u(y)\,dy \quad \text{und} \quad (V^{(-1)}u)(x) = u(x) - 2\int_x^\infty e^{x-y} u(y)\,dy\,,\ 0 < x < \infty$$

sind auch die Bedingungen in (2.19) erfüllt, weil

$$(P_n V P_n u)(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} u(x) - 2\displaystyle\int_0^x e^{y-x} u(y)\,dy & : & 0 < x < n\,, \\ 0 & : & n < x\,, \end{array} \right\} = (P_n V u)(x)$$

und

$$(P_n V^{(-1)} P_n u)(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} u(x) - 2\displaystyle\int_x^n e^{x-y} u(y)\,dy & : & 0 < x < n\,, \\ 0 & : & n < x\,, \end{array} \right\} = (V^{(-1)} P_n u)(x)\,.$$

Um satz 2.29 auf Wiener-Hopf'sche Integralgleichungen anwenden zu können, ist die Bedingung $\operatorname{codim} R(V) < \infty$ zu prüfen. Aus lemma 2.26,(a) folgt $\operatorname{codim} R(V) = \dim N(V^{(-1)}$. Wir bestimmen also $N(V^{(-1)})$:

> Aus $u(x) - 2\displaystyle\int_x^\infty e^{x-y} u(y)\,dy = 0$, $0 < x < \infty$ folgt $u'(x) = 2e^x \displaystyle\int_x^\infty e^{-y} u(y)\,dy - 2u(x) = -u(x)$, also $u(x) = \gamma e^{-x}$, $\gamma \in \mathbb{C}$. Damit ist $\dim N(V^{(-1)}) \le 1$. Die Probe
>
> $$e^{-x} - 2\int_x^\infty e^{x-y} e^{-y}\,dy = e^{-x} + 2e^x \left[\frac{1}{2} e^{-2y}\right]_x^\infty = 0$$
>
> zeigt, dass
>
> $$N(V^{(-1)}) = \left\{\gamma \widetilde{\psi}_0 : \gamma \in \mathbb{C}\right\} \quad \text{mit} \quad \widetilde{\psi}_0(x) = e^{-x}\,,$$
>
> also $\operatorname{codim} R(V) = \dim N(V^{(-1)}) = 1$ gilt.

Folgerung 2.30 *Es seien* $1 \le p < \infty$, $k \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, $f \in \mathbf{L}^p(0,\infty)$, $1 - \widehat{k}(\lambda) \ne 0\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ *und* $\left[\arg\left(1 - \widehat{k}(\lambda)\right)\right]_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} = 0$, *wobei* $\widehat{k}(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty k(x) e^{\mathbf{i}\lambda x}\,dx$. *Dann existiert ein* $n_0 \in \mathbb{N}$, *so dass* $\forall\, n \ge n_0$ *die Gleichung* (2.15) *eine eindeutige Lösung* $u_n^* \in \mathbf{L}^p(0,n) \subset \mathbf{L}^p(0,\infty)$ *hat, wobei*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n^* - u^*\|_{\mathbf{L}^p(0,\infty)} = 0$$

gilt und $u^* \in \mathbf{L}^p(0,\infty)$ *die eindeutige Lösung der Gleichung* (2.14) *ist.*

Die Abbildung $\mathcal{J} : \mathbf{L}_0^2(0,\infty) \longrightarrow \mathbf{L}^2(0,\infty)$, $u_0 \mapsto u_0 \widetilde{\psi}_0$ ist ein isometrischer Isomorphismus, wobei das innere Produkt in $\mathbf{L}_0^2(0,\infty)$ definiert ist als

$$\langle u_0, v_0 \rangle_0 := \int_0^\infty u_0(x) \overline{v_0(x)} e^{-2x}\,dx = \langle u_0 \widetilde{\psi}_0, v_0 \widetilde{\psi}_0 \rangle\,.$$

Das System $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ mit $e_n(x) = x^n$ ist linear unabhängig. Das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren liefert das Orthonormalsystem $\{p_n \psi_0 : n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbf{L}^2(0,\infty)$ mit Polynomen

$p_n(x)$ vom Grade n, welches wegen Folgerung 2.3 auch vollständig ist. Wir bemerken, dass $p_n(x) = \sqrt{2}\, L_n(x)$ mit dem n-ten normierten Laguerre-Polynom $L_n(x)$ (mit positivem Leitkoeffizienten) gilt.

Der Operator $V \in \mathcal{L}(\mathbf{L}^2(0,\infty))$ hat die Eigenschaft $V^* = V^{(-1)}$. Für $f, g \in \mathbf{L}^2(0,\infty)$ ist nämlich

$$\begin{aligned}\langle V f g\rangle &= \int_0^\infty \left[f(x) - 2\int_0^x e^{y-x} f(y)\,dy\right]\overline{g(x)}\,dx \\ &= \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\,dx - 2\int_0^\infty \int_y^\infty e^{x-y}\overline{g(x)}\,dx\,dy \\ &= \int_0^\infty f(x)\overline{\left[g(x) - 2\int_x^\infty e^{y-x} g(y)\,dy\right]}\,dx = \langle f, V^{(-1)} g\rangle\end{aligned}$$

Ist $u(x) = x^j e^{-x}$, $j \in \mathbb{N}_0$, so ist

$$(Vu)(x) = x^j e^{-x} - 2\int_0^x y^j\,dy\,e^{-x} = \left(x^j - 2x^{j+1}\right)e^{-x}.$$

Aus $u(x) = p(x)e^{-x}$ mit $\deg p(x) = j \in \mathbb{N} - 0$ folgt also $(Vu)(x) = q(x)e^{-x}$ mit $\deg q(x) = j+1$. Definiert man also induktiv $\psi_0 := p_0\widetilde{\psi_0}$ (mit $p_0(x)$ wie oben definiert) und $\psi_{n+1} = V\psi_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, so ist $\psi_n(x) = q_n(x)e^{-x}$ mit $\deg q_n(x) = n$. Für $j, k \in \mathbb{N}_0$ und $j > k$ folgt

$$\langle \psi_j, \psi_k\rangle = \langle V^j\psi_0, V^k\psi_0\rangle = \langle V^{j-k}\psi_0, \psi_0\rangle = \langle V^{j-k-1}\psi_0, V^{(-1)}\psi_0\rangle = 0$$

und $\langle \psi_k, \psi_k\rangle = \langle \psi_0, \psi_0\rangle = 1$. Somit ist

$$\psi_n(x) = (-1)^n p_n(x)e^{-x}.$$

Wir setzen $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(0,\infty)$ und $\mathbf{H}_n = \operatorname{span}\{\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}\}$. Der Orthoprojektor $Q_n : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ auf $\mathbf{H}_n$ ist gleich $Q_n = I - V^n V^{(-n)}$, denn es gilt

$$\langle V^n V^{(-n)} f, g\rangle = \langle V^n (V^*)^v f, g\rangle = \langle f, V^n (V^*)^n g\rangle$$

und für $j = 0, \ldots, n-1$

$$V^n V^{(-n)}\psi_j = V^n V^{(-n)} V^j \psi_0 = V^n V^{(j+1-n)} V^{(-1)}\psi_0 = \Theta.$$

Das Projektionsverfahren

$$Q_n A Q_n u_n = Q_n f, \quad u_n \in \mathbf{H}_n$$

für einen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist äquivalent zu $u_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell \psi_\ell$ und

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \langle A\psi_\ell, \psi_j\rangle \gamma_\ell = \langle f, \psi_j\rangle, \quad j = 0, \ldots, n-1. \tag{2.20}$$

Es gilt $Q_n \longrightarrow I$ in $\mathbf{H}$ und $Q_n V Q_n = Q_n V$ sowie $Q_n V^{(-1)} Q_n = V^{(-1)} Q_n$.

Folgerung 2.31 *Unter den Voraussetzungen von Folgerung 2.30 für $p = 2$ und für den durch die linke Seite von* (2.14) *definierten Operator $A : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall\, n \geq n_0$ das lineare Gleichungssystem* (2.20) *eine eindeutige Lösung $\left[\ \gamma_\ell\ \right]_{\ell=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$ besitzt, und $u_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} \gamma_\ell \psi_\ell$ konvergiert in der Norm von $\mathbf{L}^2(0,\infty)$ gegen die eindeutige Lösung $u \in \mathbf{L}^2(0,\infty)$ der Gleichung* (2.14).

Für $A \in \overline{\mathcal{R}}(V)$ gilt wegen $V^{(-m)}AV^m = A$, $m \in \mathbb{N}_0$ die Beziehung

$$\langle A\psi_\ell, \psi_j \rangle = \langle AV^\ell \psi_0, V^j \psi_0 \rangle = \begin{cases} \langle V^{(-j)} AV^j V^{\ell-j} \psi_0, \psi_0 \rangle = \langle AV^{\ell-j} \psi_0, \psi_0 \rangle =: a_{j-\ell} & : \quad j < \ell\,, \\ \langle V^{(-\ell)} AV^\ell \psi_0, V^{j-\ell} \psi_0 \rangle = \langle A\psi_0, V^{j-\ell} \psi_0 \rangle =: a_{j-\ell} & : \quad j \geq \ell\,. \end{cases}$$

Die Systemmatrix des linearen Gleichungssystems (2.20) ist in diesem Fall also eine Toeplitzmatrix. Die Gleichung $Au = f \in \mathbf{H}$, $u \in \mathbf{H}$ ist äquivalent zu dem unendlichen linearen Gleichungssystem

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{j-\ell} \xi_\ell = \eta_j\,, \quad j = 0, 1, \ldots$$

mit $\eta_j = \langle f, \psi_j \rangle$ und $\xi_\ell = \langle u, \psi_\ell \rangle$, welches im Raum ℓ^2 der quadratisch summierbaren Zahlenfolgen zu betrachten ist.

Kapitel 3

Singuläre Integralgleichungen

3.1 Cauchy'sche singuläre Integralgleichungen

Mittels des Residuensatzes der Funktionentheorie kann man zeigen, dass für $0 < \gamma < 1$ und $u \in \mathbb{R}$ gilt (vgl. auch [10, 3.238.1])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{\gamma-1}\, dx}{x-u} = -\pi |u|^{\gamma-1} \operatorname{sgn}(u) \cot \frac{\pi\gamma}{2}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{\gamma-1} \operatorname{sgn}(x)\, dx}{x-u} = \pi |u|^{\gamma-1} \operatorname{sgn}(u) \tan \frac{\pi\gamma}{2}\,.$$

Dabei sind die Integrale im Sinne des Cauchy'schen Hauptwertes zu verstehen, wobei man im Fall $u = 0$ das erste Integral gleich 0 und das zweite gleich $+\infty$ zu setzen hat. Addition beider Formeln ergibt

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\gamma-1}\, dx}{x-u} = -\pi\, u^{\gamma-1} \operatorname{sgn}(u) \cot(\pi\gamma)\,, \quad 0 < u < \infty\,,\ 0 < \gamma < 1\,. \tag{3.1}$$

Mit $v^{\alpha,\beta}(x) := (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ bezeichnen wir wieder ein **Jacobi-Gewicht** und betrachten für $-1 < \alpha\,,\ -1 < \beta\,,\ \alpha+\beta = -1$ und $-1 < x < 1$ das (Cauchy'sche Hauptwert-) Integral

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{v^{\alpha,\beta}(y)\, dy}{y-x} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^{\beta} \frac{1-y}{y-x}\, \frac{2\, dy}{(1-y)^2} \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{t^{\beta}\, dt}{\left(\frac{t-1}{t+1} - x\right)(t+1)} = \frac{1}{1-x} \int_{0}^{\infty} \frac{t^{\beta}\, dt}{t - \frac{1+x}{1-x}} \\
&\overset{(3.1)}{=} -\frac{\pi}{1-x} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\beta} \cot(\pi\beta + \pi) = \pi \cot(\pi\beta)\, v^{\alpha,\beta}(x)\,.
\end{aligned}$$

Es folgt also für $\alpha > -1\,,\ \beta > -1\,,\ \alpha+\beta = -1$

$$\cos(\pi\beta)\, v^{\alpha,\beta}(x) - \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{v^{\alpha,\beta}(y)\, dy}{y-x} = 0\,, \quad -1 < x < 1\,. \tag{3.2}$$

Mit $p_n^{\alpha,\beta}(x)$ bezeichnen wir das n-te normierte **Jacobi-Polynom** (mit positivem Leitkoeffizienten),

$$\deg p_n^{\alpha,\beta}(x) = n\,, \quad \int_{-1}^{1} p_n^{\alpha,\beta}(x) p_m^{\alpha,\beta}(x) v^{\alpha,\beta}(x)\, dx = \delta_{nm}.$$

Bekanntlich existieren $\alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\beta_n > 0$, so dass (vgl. [14, Formeln (2.4),(2.6) und Abschnitt 2.5] oder [16, Formeln (2.6),(2.7) und Abschnitt 2.4])

$$\beta_{n+1} p_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) = (x - \alpha_n) p_n^{\alpha,\beta}(x) - \beta_n p_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) \,, \quad n \in \mathbb{N}$$

gilt, wobei man explizite Formeln für die α_n und β_n angeben kann. Unter Verwendung dieser Formeln und (3.2) kann man folgenden Satz beweisen (vgl. [16, Abschnitt 3.2]).

Satz 3.1 *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < \beta_0 < 1$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$, so dass*

$$a - \mathbf{i}b = e^{\mathbf{i}\pi\beta_0} \,, \quad \alpha := \lambda_1 + \beta_0 \in (-1, 1) \,, \quad \beta := \lambda_2 - \beta_0 \in (-1, 1) \,.$$

Dann gilt

$$a v^{\alpha,\beta}(x) p_n^{\alpha,\beta}(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{v^{\alpha,\beta}(y) p_n^{\alpha,\beta}(y)}{y - x} \, dy = (-1)^{\lambda_1} p_{n-\kappa}^{-\alpha,-\beta}(x) \,, \quad -1 < x < 1 \,, \; n \in \mathbb{N}_0 \,, \tag{3.3}$$

wobei $\kappa = -(\lambda_1 + \lambda_2) = -(\alpha + \beta)$ und $p_{-1}^{-\alpha,-\beta}(x) \equiv 0$ zu setzen sind.

Folgerung 3.2 *Für $\beta_0 = \frac{1}{2}$, d.h. $a = 0$ und $b = -1$, und für $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, d.h. $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ erhalten wir*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_n(y)}{y - x} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = U_{n-1}(x) \,, \quad -1 < x < 1 \,, \; n \in \mathbb{N}_0 \,,$$

wobei

$$T_n(x) = p_n^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x) \quad \text{und} \quad U_n(x) = p_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x) \,,$$

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \,, \; T_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\theta) \,, n \in \mathbb{N}$$

und

$$U_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} \,, \; n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Analog gilt ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, d.h. $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{U_n(y)}{y - x} \sqrt{1 - y^2} \, dy = -T_{n+1}(x) \,, \quad -1 < x < 1 \,, \; n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Mit $\mathbf{L}^2_{\alpha,\beta}$ bezeichnen wir den Hilbertraum der (Klassen von) bzgl. $v^{\alpha,\beta}(x)$ über $(-1, 1)$ quadratisch integrierbaren (komplexwertigen) Funktionen mit dem inneren Produkt

$$\langle u, v \rangle_{\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} u(x) \overline{v(x)} v^{\alpha,\beta}(x) \, dx \,.$$

Sowohl $\left\{ p_n^{-\alpha,-\beta} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ als auch $\left\{ v^{\alpha,\beta} p_n^{\alpha,\beta} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ sind vollständige Orthonormalsysteme in $\mathbf{L}^2_{-\alpha,-\beta}$. Wegen (3.3) ist der Operator $aI + bS$ mit

$$(Su)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{u(y) \, dy}{y - x} \,, \quad -1 < x < 1$$

auf der linearen Hülle des zweiten Systems wohldefiniert. Dabei gilt

$$\|(aI + bS)u\|_{-\alpha,-\beta} \le \|u\|_{-\alpha,-\beta} \,.$$

Somit kann dieser Operator auf eindeutige Weise zu einem linearen beschränkten Operator $aI + bS : \mathbf{L}^2_{-\alpha,-\beta} \longrightarrow \mathbf{L}^2_{-\alpha,-\beta}$ fortgesetzt werden. Dabei gilt

$$N(aI + bS) = \begin{cases} \operatorname{span}\left\{v^{\alpha,\beta}\right\} & : \quad \kappa = 1\,, \\ \{\Theta\} & : \quad \kappa = 0,\ \kappa = -1\,, \end{cases}$$

und

$$\operatorname{codim} R(aI + bS) = \begin{cases} 0 & : \quad \kappa = 1,\ \kappa = 0\,, \\ 1 & : \quad \kappa = -1\,. \end{cases}$$

Im Fall $\kappa = -1$ ist die Gleichung $(aI + bS)u = f \in \mathbf{L}^2_{-\alpha,-\beta}$ genau dann in $\mathbf{L}^2_{-\alpha,-\beta}$ lösbar, wenn $\langle f, 1\rangle_{-\alpha,-\beta} = 0$ gilt.

Wir verweisen noch auf den Spezialfall (vgl. Folgerung 3.2) $a = 0$, $b = -1$, $\beta_0 = \frac{1}{2}$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Wir haben also $\kappa = 0$, $v^{\alpha,\beta}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} =: \nu(x)$ und $v^{-\alpha,-\beta}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Mit den Bezeichnungen $p_n^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(x) =: R_n(x)$ und $p_n^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x) =: P_n(x)$ folgt

$$R_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{s}{2}} \quad \text{und} \quad P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{s}{2}}\,,$$

und (3.3) liefert

$$S\nu R_n = P_n\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Für $s \geq 0$ definieren wir

$$\mathbf{L}^{2,s}_{\alpha,\beta} = \left\{ u \in \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta} : \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{2s} \left| \langle u, p_n^{\alpha,\beta}\rangle_{\alpha,\beta} \right|^2 < \infty \right\}$$

und

$$\langle u, v\rangle_{\alpha,\beta,s} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{2s} \langle u, p_n^{\alpha,\beta}\rangle_{\alpha,\beta} \overline{\langle v, p_n^{\alpha,\beta}\rangle_{\alpha,\beta}}\,.$$

Dann ist $\left(\mathbf{L}^{2,s}_{\alpha,\beta}, \langle .,.\rangle_{\alpha,\beta,s}\right)$ ein Hilbertraum, wobei $J : \mathbf{L}^{2,s}_{\alpha,\beta} \longrightarrow \ell^2$, $u \mapsto \left((1+n)^s \langle u, p_n^{\alpha,\beta}\rangle_{\alpha,\beta}\right)_{n=0}^{\infty}$ ein isometrischer Isomorphismus ist. Offenbar gilt

$$\mathbf{L}^2_{\alpha,\beta} = \mathbf{L}^{2,0}_{\alpha,\beta} \supset \mathbf{L}^{2,s}_{\alpha,\beta} \supset \mathbf{L}^{2,r}_{\alpha,\beta}\,, \quad 0 \leq s \leq r\,.$$

Analog kann man $\widetilde{\mathbf{L}}^{2,s}_{-\alpha,-\beta}$ definieren,

$$\widetilde{\mathbf{L}}^{2,s}_{-\alpha,-\beta} = \left\{ u \in \mathbf{L}^2_{-\alpha,-\beta} : \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{2s} \left| \langle u, v^{\alpha,\beta} p_n^{\alpha,\beta}\rangle_{-\alpha,-\beta} \right|^2 < \infty \right\}.$$

Folgerung 3.3 *Für $s \geq 0$ ist der (oben definierte) Operator $aI + bS : \widetilde{\mathbf{L}}^{2,s}_{-\alpha,-\beta} \longrightarrow \mathbf{L}^{2,s}_{-\alpha,-\beta}$ linear, beschränkt und einseitig invertierbar. Dabei gilt*

$$\dim N(aI + bS) = \max\{0, \kappa\}\,, \quad \operatorname{codim} R(aI + bS) = \max\{0, -\kappa\}\,,$$

und

$$(aI + bS)^{-1} = v^{\alpha,\beta}(aI - bS)v^{-\alpha,-\beta} I$$

ist im Fall $\kappa = 0$ der inverse Operator bzw. im Fall $\kappa \neq 0$ ein entsprechender einseitig inverser Operator.

Mit $P_n^{\alpha,\beta} : \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta} \longrightarrow \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta}$ bezeichnen wir den Orthoprojektor auf $\operatorname{span}\left\{p_0^{\alpha,\beta}, \ldots, p_{n-1}^{\alpha,\beta}\right\} =: \mathbf{X}_n$, d.h.

$$P_n^{\alpha,\beta} f = \sum_{j=0}^{n-1} \langle f, p_j^{\alpha,\beta}\rangle_{\alpha,\beta} p_j^{\alpha,\beta}, \quad f \in \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta}.$$

Folgerung 3.4 *Es seien $s \geq 0$ und $f \in \mathbf{L}^{2,s}_{\alpha,\beta}$. Dann gilt*

(a) $\lim_{n\to\infty} \left\| f - P_n^{\alpha,\beta} f \right\|_{\alpha,\beta,s} = 0$,

(b) $\left\| f - P_n^{\alpha,\beta} f \right\|_{\alpha,\beta,t} \leq (1+n)^{t-s} \|f\|_{\alpha,\beta,s}$, $0 \leq t \leq s$,

(c) $\left\| P_n^{\alpha,\beta} f \right\|_{\alpha,\beta,t} \leq \left\{ \begin{array}{ccc} \|f\|_{\alpha,\beta,s} & : & 0 \leq t \leq s, \\ n^{t-s} \|f\|_{\alpha,\beta,s} & : & s \leq t. \end{array} \right\}$

(d) *Die Einbettung $\mathbf{L}^{2,s}_{\alpha,\beta} \subset \mathbf{L}^{2,t}_{\alpha,\beta}$, $0 \leq t < s$, ist kompakt.*

Beweis. (a) $\left\| f - P_n^{\alpha,\beta} f \right\|^2_{\alpha,\beta,s} = \sum_{j=n}^{\infty} (1+j)^{2s} \left| \langle f, p_j^{\alpha,\beta}\rangle_{\alpha,\beta} \right|^2 \longrightarrow 0$.

(b) $\left\| f - P_n^{\alpha,\beta} f \right\|^2_{\alpha,\beta,t} \leq (1+n)^{2(t-s)} \sum_{j=n}^{\infty} (1+j)^{2s} \left| \langle f, p_j^{\alpha,\beta}\rangle_{\alpha,\beta} \right|^2 \leq (1+n)^{2(t-s)} \|f\|^2_{\alpha,\beta,s}$.

(c)
$$\left\| P_n^{\alpha,\beta} f \right\|^2_{\alpha,\beta,t} = \sum_{j=0}^{n-1} (1+j)^{2t} \left| \langle f, p_j^{\alpha,\beta}\rangle_{\alpha,\beta} \right|^2$$
$$\leq \left\{ \begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} (1+j)^{2s} \left| \langle f, p_j^{\alpha,\beta}\rangle_{\alpha,\beta} \right|^2 \leq \|f\|^2_{\alpha,\beta,s} & : & 0 \leq t \leq s, \\ n^{2(t-s)} \displaystyle\sum_{j=}^{n-1} (1+j)^{2s} \left| \langle f, p_j^{\alpha,\beta}\rangle_{\alpha,\beta} \right|^2 \leq n^{2(t-s)} \|f\|^2_{\alpha,\beta,s} & : & s \leq t. \end{array} \right.$$

(d) Aus (b) folgt $\left\| I - P_n^{\alpha,\beta} \right\|_{\mathbf{L}^{2,s}_{\alpha,\beta} \to \mathbf{L}^{2,t}_{\alpha,\beta}} \longrightarrow 0$. □

Mit den Bezeichnungen aus Folgerung 3.2 und $\sigma(x) := (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ sowie $\varphi(x) := (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ gilt

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi(x) U_{n-1}(x)\right] = -n\sigma(x) T_n(x), \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad T_n'(x) = n\, U_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.4}$$

Diese Formeln lassen sich verallgemeinern zu (vgl. [16, (3.4),(3.5)])

$$v^{\alpha,\beta}(x) p_n^{\alpha,\beta}(x) = -\frac{1}{\sqrt{n(n+\alpha+\beta+1)}} \frac{d}{dx}\left[v^{\alpha+1,\beta+1}(x) p_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x)\right], \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.5}$$

und

$$\frac{d}{dx} p_n^{\alpha,\beta}(x) = \sqrt{n(n+\alpha+\beta+1)}\, p_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.6}$$

Folgerung 3.5 *Seien $s \geq 0$, und D bezeichne den Operator der verallgemeinerten Differentiation. Dann ist $D : \mathbf{L}^{2,s+1}_{\alpha,\beta} \longrightarrow \mathbf{L}^{2,s}_{\alpha+1,\beta+1}$ stetig.*

Beweis. Aus $u \in \mathbf{L}^{2,s+1}_{\alpha,\beta}$ folgt

$$\begin{aligned}\|Du\|^2_{\alpha+1,\beta+1,s} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} \left| \langle Du, p^{\alpha+1,\beta+1}_{n-1} v^{\alpha+1,\beta+1} \rangle \right|^2 \\ &\overset{(3.5)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} n(n+\alpha+\beta+1) \left| \langle u, p^{\alpha,\beta}_n \rangle_{\alpha,\beta} \right|^2 \le \|u\|^2_{\alpha,\beta,s+1} \,,\end{aligned}$$

was die Gültigkeit der Behauptung zeigt. □

Folgerung 3.6 ([2], Seiten 195-197) *Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $u \in \mathbf{L}^{2,r}_{\alpha,\beta}$ genau dann, wenn $D^k u \in \mathbf{L}^2_{\alpha+k,\beta+k}$, $k = 0, 1, \ldots, r$ gilt. Dabei sind die Normen $\|u\|_{\alpha,\beta,r}$ und*

$$\|u\|_{\alpha,\beta,(r)} := \sum_{k=0}^{r} \left\| D^k u \right\|_{\alpha+k,\beta+k}$$

äquivalent.

Mit $L^{\alpha,\beta}_n$ bezeichnen wir den Operator, der einer Funktion $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ das Interpolationspolynom höchstens $(n-1)$-ten Grades bezüglich der Nullstellen $x^{\alpha,\beta}_{nk}$, $k = 1, \ldots, n$ des n-ten orthogonalen Polynoms $p^{\alpha,\beta}_n(x)$ zuordnet. Bekanntlich gilt $-1 < x^{\alpha,\beta}_{nn} < \ldots < x^{\alpha,\beta}_{n1} < 1$ und

$$\left(L^{\alpha,\beta}_n f \right)(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x^{\alpha,\beta}_{nk}) \ell^{\alpha,\beta}_{nk}(x)$$

mit

$$\ell^{\alpha,\beta}_{nk}(x) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{x - x^{\alpha,\beta}_{nj}}{x^{\alpha,\beta}_{nk} - x^{\alpha,\beta}_{nj}} = \frac{p^{\alpha,\beta}_n(x)}{(x - x^{\alpha,\beta}_{nk})(p^{\alpha,\beta}_n)'(x^{\alpha,\beta}_{nk})} \,.$$

Wir bemerken, dass aus $f \in \mathbf{L}^{2,s}_{\alpha,\beta}$ mit $s > \frac{1}{2}$ folgt, dass $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig ist ([2, Theorem 2.5]). Der folgende Satz wurde im Fall $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2}$ in [2, Theorem 3.4] und im Fall $\alpha, \beta > -1$, $s \ge 1$ in [3, Theorem 2.3] bewiesen. Der allgemeine Fall wurde in [22] betrachtet.

Satz 3.7 *Es seien $s > \frac{1}{2}$ und $f \in \mathbf{L}^{2,s}_{\alpha,\beta}$. Dann gilt*

(a) $\lim_{n\to\infty} \left\| f - L^{\alpha,\beta}_n f \right\|_{\alpha,\beta,s} = 0$,

(b) $\left\| f - L^{\alpha,\beta}_n f \right\|_{\alpha,\beta,t} \le c\, n^{t-s} \|f\|_{\alpha,\beta,s}$, $0 \le t \le s$ *mit* $c \neq c(n,f,t,s)$.

3.2 Integraloperatoren mit logarithmischen Kernen

Für den Integraloperator

$$(Ku)(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln|y-x|\, u(y) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \,, \quad -1 < x < 1$$

gilt

$$Kp^\sigma_n = KT_n = \begin{cases} (\ln 2) p^\sigma_0 & : \quad n = 0 \,, \\ \frac{1}{n} p^\sigma_n & : \quad n \in \mathbb{N} \,, \end{cases} \tag{3.7}$$

wobei $\sigma(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ und $p^\sigma_n(x) := p^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}_n(x) = T_n(x)$.

Begündung:

(a) Für fixiertes $x \in (-1,1)$ gehört die Funktion $L_x : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ y \mapsto \ln|y-x|$ zu $\mathbf{L}^2_\sigma$. Wir berechnen die Fourierkoeffizienten von L_x bzgl. des vollständigen Orthonormalsystems $(T_n)_{n=0}^\infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$
\begin{aligned}
\langle L_x, T_n\rangle_\sigma &= \int_{-1}^1 \ln|y-x| T_n(y)\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\
&\overset{(3.4)}{=} -\frac{1}{n}\int_{-1}^1 \ln|y-x|\,\frac{d}{dy}\left[\sqrt{1-y^2}\,U_{n-1}(y)\right]\,dy \\
&= -\frac{1}{n}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^1\right)\ln|y-x|\,\frac{d}{dy}\left[\sqrt{1-y^2}\,U_n(y)\right]\,dy \\
&= \frac{1}{n}\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[-(\ln\varepsilon)\sqrt{1-(x-\varepsilon)^2}\,U_{n-1}(x-\varepsilon) \\
&\qquad +(\ln\varepsilon)\sqrt{1-(x+\varepsilon)^2}\,U_{n-1}(x+\varepsilon) \\
&\qquad +\left(\int_{-1}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^1\right)\frac{U_{n-1}(y)}{y-x}\,\sqrt{1-y^2}\,dy\Big] \\
&= \frac{1}{n}\int_{-1}^1 \frac{U_{n-1}(y)}{y-x}\,\sqrt{1-y^2}\,dy \overset{\text{Folg.3.2}}{=} -\frac{\pi}{n}\,T_n(x)\,.
\end{aligned}
$$

(b) Für $n=0$ erhalten wir

$$
\langle L_x, T_0\rangle_\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^1 \ln|y-x|\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =: \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\psi(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\psi_\varepsilon(x)
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\psi_\varepsilon(x) &= \left(\int_{-1}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^1\right)\ln|y-x|\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\
&= \int_{-1}^{x-\varepsilon}\ln(x-y)\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_{x+\varepsilon}^1 \ln(y-x)\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\,.
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
\psi_\varepsilon'(x) &= \int_{-1}^{x-\varepsilon}\frac{1}{yx-y}\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} - \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{1}{y-x} \\
&\qquad +(\ln\varepsilon)\left[\frac{1}{\sqrt{1-(x-\varepsilon)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(x+\varepsilon)^2}}\right] \\
&\overset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} -\int_{-1}^1 \frac{1}{y-x}\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \overset{(3.4)}{=} 0\,.
\end{aligned}
$$

Diese Konvergenz ist gleichmäßig bzgl. $x \in [-1+\delta, 1-\delta]\ \forall\,\delta \in (0,1)$, weil für $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$

und $\chi_\varepsilon(x) := \left(\int_{-1}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}\right) \frac{1}{y-x} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ gilt

$$\begin{aligned}\chi_{\varepsilon_1}(x) - \chi_{\varepsilon_2}(x) &= \left(\int_{-1}^{x-\varepsilon_1} - \int_{-1}^{x-\varepsilon_2}\right) \ldots\, dy + \left(\int_{x+\varepsilon_1} - \int_{x+\varepsilon_2}^{1}\right) \ldots\, dy \\ &= \int_{x-\varepsilon_2}^{x-\varepsilon_1} \frac{\sigma(y)-\sigma(x)}{y-x}\, dy + \int_{x+\varepsilon_1}^{x+\varepsilon_2} \frac{\sigma(y)-\sigma(x)}{y-x}\, dy\,,\end{aligned}$$

so dass für $x \in [-1+\delta, 1-\delta]$ und ε_2 hinreichend klein

$$|\chi_{\varepsilon_1}(x) - \chi_{\varepsilon_2}(x)| \le \text{const}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

gilt. Es folgt $\psi'(x) = 0 \ \forall\, x \in (-1,1)$. Damit ist

$$\gamma = \int_{-1}^{1} \ln|y-x| \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\,, \quad -1 < x < 1\,, \tag{3.8}$$

eine Konstante. Außerdem ist $\psi : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig (vgl. [15, Satz 3.5]). Wir haben damit (für $x = 0$ in (3.8))

$$\begin{aligned}\gamma &= \int_0^\pi \ln(1-\cos s)\, ds = \int_0^\pi \ln\left(2\sin^2 \frac{s}{2}\right)\, ds \\ &= \pi \ln 2 + 2\int_0^\pi \ln\left(\sin\frac{s}{2}\right)\, ds = \pi\ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt \\ &\overset{t=\frac{\pi}{2}-z}{=} \pi \ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos z)\, dz \overset{y=\cos z}{=} \pi\ln 2 + 4\int_0^1 \ln y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \pi\ln 2 + 2\gamma\,,\end{aligned}$$

also $\gamma = -\pi \ln 2$ und somit $\langle L_x, T_0\rangle_\sigma = -\sqrt{\pi}\ln 2 = -\pi(\ln 2)T_0$.

Die Räume $\mathbf{L}_\sigma^{2,s}$, $s \ge 0$ sind isometrisch isomorph zu ℓ_s^2 , wobei

$$\ell_s^2 = \left\{\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \ell^2 : ((1+n)^s \xi_n)_{n=0}^\infty \in \ell^2\right\} \quad \text{und} \quad \langle \xi, \eta\rangle_{\ell_s^2} = \sum_{n=0}^\infty (1+n)^{2s} \xi_n \overline{\eta_n}\,.$$

Der isometrische Isomorphismus ist gegeben durch $F : \mathbf{L}_\sigma^{2,s} \longrightarrow \ell_s^2$, $u \mapsto (\langle u, p_n^\sigma\rangle_\sigma)_{n=0}^\infty$. Es folgt dann aus (3.7) $\mathbb{K} := FKF^{-1} = \operatorname{diag}\left[\ \alpha_n\ \right]_{n=0}^\infty$ mit $\alpha_0 = \ln 2$ und $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Der duale Raum $\left(\mathbf{L}_\sigma^{2,s}\right)^*$ ist isometrisch isomorph zu ℓ_{-s}^2 über die Abbildung $\widehat{F} : \left(\mathbf{L}_\sigma^{2,s}\right)^* \longrightarrow \ell_{-s}^2$, $\varphi \mapsto (\varphi_n)_{n=0}^\infty$ mit $\varphi_n = \varphi(p_n^\sigma)$. Definieren wir $\mathbf{L}_\sigma^{2,-s} := \left(\mathbf{L}_\sigma^{2,s}\right)^*$, so können wir $K : \mathbf{L}_\sigma^{2,s} \longrightarrow \mathbf{L}_\sigma^{2,s}$ für alle $s \in \mathbb{R}$ betrachten, wobei wir $K = F^{-1}\mathbb{K}F$ verwenden. Aus (3.7) ergibt sich nun sofort die folgende Aussage.

Satz 3.8 *Der Operator $K : \mathbf{L}_\sigma^{2,s} \longrightarrow \mathbf{L}_\sigma^{2,s+1}$ ist ein linearer, beschränkter und invertierbarer Operator. Dabei gilt $K^{-1} = F^{-1}\mathbb{K}^{-1}F$.*

Wir definieren den Operator $K_1 : \mathbf{L}_\sigma^2 \longrightarrow \mathbf{L}_\sigma^2$ über

$$(K_1 u)(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 (y-x)\ln|y-x|\, u(y) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\,, \quad -1 < x < 1\,.$$

Unter Verwendung des Multiplikationsoperators $(Mu)(x) := x\,u(x)$ folgt $K_1 = KM - MK$, so dass die Rekursionformel

$$xp_n^\sigma(x) = \frac{1}{2}\left[p_{n+1}^\sigma(x) + p_{n-1}^\sigma(x)\right], \quad n = 2, 3, \ldots$$

die Formeln

$$K_1 p_n^\sigma = \beta_{n-1} p_{n-1}^\sigma - \beta_n p_{n+1}^\sigma, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

mit $\beta_{-1} = 0$, $\beta_0 = \dfrac{\ln 2 - 1}{\sqrt{2}}$ und $\beta_n = \dfrac{1}{2n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$ liefert. Es folgt

$$\mathbb{K}_1 = FK_1F^{-1} : \ell_s^2 \longrightarrow \ell_{s+2}^2, \quad (\xi_n)_{n=0}^\infty \mapsto (\beta_n \xi_{n+1} - \beta_{n-1}\xi_{n-1})_{n=0}^\infty$$

$(\xi_{-1} := 0)$.

Folgerung 3.9 *Der Operator* $K_1 : \mathbf{L}_\sigma^{2,s} \longrightarrow \mathbf{L}_\sigma^{2,s+2}$ *ist für alle* $s \in \mathbb{R}$ *beschränkt. Die homogene Gleichung* $K_1 u = 0$ *besitzt in* $\mathbf{L}_\sigma^{2,-\frac{3}{2}}$ *nur die triviale Lösung. Für* $s < -\frac{3}{2}$ *gilt* $\dim N(K_1) = 1$. *Die Gleichung* $K_1 u = 1$ *ist in* $\mathbf{L}_\sigma^{2,-\frac{3}{2}}$ *nicht lösbar.*

Beweis. Aus der Gleichung $\mathbb{K}_1 \xi = \Theta$ folgt $\xi_1 = 0$, $\xi_{n+1} = \dfrac{\beta_{n-1}\xi_{n-1}}{\beta_n}$, $n \in \mathbb{N}$, insbesondere $\xi_3 = \xi_5 = \ldots = 0$. Falls $\xi_0 = 0$, so sind auch $\xi_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei deshalb $\xi_1 = 1$. Es folgt $\xi_2 = \dfrac{\beta_0}{\beta_1} = 4\beta_0$ und $\xi_{2m} = \dfrac{\beta_{2m-2}\xi_{2m-2}}{\beta_{2m-1}} = \dfrac{m}{m-1}\,\xi_{2(m-1)} = 4m\beta_0$, $m = 1, 2, \ldots$ Nun gilt aber

$$\sum_{n=0}^\infty (1+n)^{2s}|\xi_n|^2 = 1 + (2\beta_0)^2 \sum_{m=0}^\infty (1+2m)^{2s}(2m)^2 < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad s < -\frac{3}{2}.$$

Die Gleichung $\mathbb{K}_1\xi = (1, 0, 0, \ldots)$ führt zu $\xi_1 = \beta_0^{-1}$ und somit zu $\xi_{2m+1} = \dfrac{\beta_{2m-1}\xi_{2m-1}}{\beta_{2m}} = \dfrac{2m+1}{2m-1}\xi_{2m-1} = (2m+1)\beta_0^{-1}$, so dass diese Gleichung keine Lösung in $\ell_{-\frac{3}{2}}^2$ hat. □

Satz 3.10 *Das Bild des Operators* $K_1 : \mathbf{L}_\sigma^{2,s} \longrightarrow \mathbf{L}_\sigma^{2,s+2}$ *ist für alle* $s \in \mathbb{R}$ *nicht abgeschlossen.*

Beweis. Wir betrachten die Shiftoperatoren

$$\mathbb{V} : \ell_s^2 \longrightarrow \ell_s^2, \quad (\xi_n)_{n=0}^\infty \mapsto (0, \xi_0, \xi_1, \ldots) \quad \text{und} \quad \mathbb{V}^{(-1)} : \ell_s^2 \longrightarrow \ell_s^2, \quad (\xi_n)_{n=0}^\infty \mapsto (\xi_1, \xi_2, \ldots)$$

sowie den isometrischen Isomorphismus

$$\mathbb{R}_2 : \ell_s^2 \longrightarrow \ell_{s+2}^2, \quad (\xi_n)_{n=0}^\infty \mapsto \left((1+n)^{-2}\xi_n\right)_{n=0}^\infty$$

und definieren $\mathbb{U} := \mathbb{K}_1 - \frac{1}{2}\mathbb{R}_2\left(\mathbb{V}^{(-1)} - \mathbb{V}\right)$. dann haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{U}\xi &= \left(\beta_n\xi_{n+1} - \beta_{n-1}\xi_{n-1} - \frac{1}{2(n+1)^2}(\xi_{n+1} - \xi_{n-1})\right)_{n=0}^\infty \\
&= \left(\left(\frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)^2}\right)\xi_{n+1} + \left(\frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(n+1)n}\right)\xi_{n-1}\right)_{n=0}^\infty \\
&= \left(\frac{1}{2n(n+1)^2}\,\xi_{n+1} - \frac{3n+1}{2(n+1)^2(n-1)n}\,\xi_{n-1}\right)_{n=0}^\infty,
\end{aligned}$$

was zeigt, dass $\mathbb{U} \in \mathcal{L}\left(\ell_s^2, \ell_{s+3}^2\right) \subset \mathcal{K}\left(\ell_s^2, \ell_{s+2}^2\right)$ gilt. Der Operator $\mathbb{V}^{(-1)} - \mathbb{V}$ hat in ℓ_s^2, $s \geq -\frac{1}{2}$ einen trivialen Nullraum, sein Symbol $\frac{1}{2}(t^{-1} - t)$ aber Nullstellen auf dem Einheitskreis $\mathbb{T}$. Somit ist sein Bild nicht abgeschlossen (Lemma 2.6,(a) und Satz 2.14). Für $\xi \in \ell^2_s$ und $\eta \in \ell^2_{-s}$ gilt $\langle \mathbb{V}\xi, \eta\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{n-1}\overline{\eta_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_{n+1}} = \langle \xi, \mathbb{V}^{(-1)}\eta\rangle$, d.h., $\mathbb{V}^* = \mathbb{V}^{(-1)}$.

Wäre das Bild von $\mathbb{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{V}^{(-1)} - \mathbb{V}\right)$ in ℓ^2_s, $s < -\frac{1}{2}$ abgeschlossen, so wäre wegen $\dim N(\mathbb{A}^*) = 0$ dieses Bild gleich $\ell^2 - s$ und somit wäre $\mathbb{A}$ in ℓ^2_s, $s < -\frac{1}{2}$ einseitig invertierbar. Wäre nun das Bild von $\mathbb{K}_1 : \ell^2_s \longrightarrow \ell^2_{s+2}$ abgeschlossen, so wäre dieser Operator Fredholmsch, da $\dim N(\mathbb{K}_1)$ und $\dim N(\mathbb{K}_1^*)$ endlich sind. Damit wäre aber auch $\frac{1}{2}\mathbb{R}_2\left(\mathbb{V}^{(-1)} - \mathbb{V}\right) = \mathbb{K}_1 - \mathbb{U}$ ein Fredholmoperator und hätte damit abgeschlossenes Bild. □

Wir bestimmen eine (rein algebraische) Lösungsformel für die Gleichung

$$\mathbb{K}_1\xi = \eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots)\,. \tag{3.9}$$

Aus

$$\mathbb{K}_1\xi = (\beta_0\xi_1, \beta_1\xi_2 - \beta_0\xi_0, \beta_2\xi_3 - \beta_1\xi_1, \ldots)$$

folgt

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \beta_0^{-1}\eta_0\,,\\
\xi_3 &= \beta_2^{-1}\left(\eta_2 + \beta_1\beta_0^{-1}\eta_0\right)\,,\\
&\;\vdots\\
\xi_{2k+1} &= \beta_{2k}^{-1}\sum_{m=0}^{k}\prod_{r=m}^{k-1}\beta_{2r}^{-1}\beta_{2r+1}\eta_{2m} \;=\; 4(2k+1)\left[\frac{\eta_0}{4\beta_0} + \sum_{m=1}^{k} m\,\eta_{2m}\right]
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= \beta_1^{-1}(\eta_1 + \beta_0\xi_0)\,,\\
\xi_4 &= \beta_3^{-1}(\eta_3 + \beta_2\xi_2) \;=\; \beta_3^{-1}\eta_3 + \beta_3^{-1}\beta_1^{-1}\beta_2\eta_1 + \beta_3^{-1}\beta_1^{-1}\beta_2\beta_0\xi_0\,,\\
&\;\vdots\\
\xi_{2(k+1)} &= \beta_{2k+1}^{-1}\sum_{m=0}^{k}\prod_{r=m+1}^{k}\beta_{2r-1}^{-1}\beta_{2r}\eta_{2m+1} + \prod_{r=0}^{k}\beta_{2r+1}^{-1}\beta_{2r}\xi_0\\
&= 4(k+1)\left[\sum_{m=0}^{k}(2m+1)\eta_{2m+1} + \beta_0\xi_0\right]\,.
\end{aligned}$$

Folgerung 3.11 *Sind $f \in \mathbf{L}^{2,s}_\sigma$ für ein $s > \tau + 3$ und $\tau \geq -1$, so besitzt die Gleichung*

$$K_1 u = f + \alpha \tag{3.10}$$

genau eine Lösung $(u, \alpha) \in \mathbf{L}^{2,\tau}_\sigma \times \mathbb{C}$.

Beweis. Wir betrachten die Gleichung

$$\mathbb{K}_1\xi = \eta + (\alpha, 0, 0, \ldots) \in \ell^2 \tag{3.11}$$

für $\xi \in \ell^2_{-1}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Aus den Lösungsformeln zu (3.9) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\xi_{2k+1} &= 4(2k+1)\left[\frac{\eta_0 + \alpha}{4\beta_0} + \sum_{m=1}^{k} m\,\eta_{2m}\right]\,, \quad k = 0, 1, \ldots\,,\\
\xi_{2(k+1)} &= 4(k+1)\left[\sum_{m=0}^{k}(2m+1)\eta_{2m+1} + \beta_0\xi_0\right]\,, \quad k = 0, 1, \ldots
\end{aligned}$$

Ntwendig dafür, dass $(\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ zu ℓ^2_{-1} gehört, ist, dass $\big((n+1)_n^{-1}\big)_{n=0}^{\infty}$ eine Nullfolge ist. Das fıਁrt zu den Bedingungen

$$\frac{\eta_0+\alpha}{4\beta_0}+\sum_{m=1}^{\infty} m\,\eta_{2m}=0 \quad \text{und} \quad \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\eta_{2m+1}+\beta_0\xi_0=0\,,$$

d.h.,

$$\alpha=-\eta_0-4\beta_0\sum_{m=1}^{\infty} m\,\eta_{2m} \quad \text{und} \quad \xi_0=-\frac{1}{\beta_0}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\eta_{2m+1}\,,$$

sowie

$$\xi_{2k+1}=-4(2k+1)\sum_{m=k+1}^{\infty} m\,\eta_{2m} \quad \text{und} \quad \xi_{2(k+1)}=-4(k+1)\sum_{m=k+1}^{\infty}(2m+1)\eta_{2m+1}\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
|\xi_k|^2 &\le \operatorname{const}(k+1)^2\left[\sum_{m=k+1}^{\infty}(m+1)^{1-s}(m+1)^{-s}|\eta_{2m+1}|\right]^2\\
&\le \operatorname{const}(k+1)^2\sum_{m=k+1}^{\infty}(m+1)^{2(1-s)}\,\|\eta\|^2_{\ell^2_s}\\
&\le \operatorname{const}(k+1)^2(k+1)^{1+2(1-s)}\,\|\eta\|^2_{\ell^2_s} \;=\; \operatorname{const}(k+1)^{5-2s}\,\|\eta\|^2_{\ell^2_s}\,,
\end{aligned}$$

so dass unter den gemachten Voraussetzungen

$$\|\xi\|\,\ell^2_\tau{}^2\le \operatorname{const}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{2\tau+5-2s}\,\|\eta\|^2_{\ell^2_s}<\infty$$

gilt, weil $2\tau+5-2s<-1 \iff \tau-s<-3 \iff s>\tau+3$. □

Folgerung 3.12 *Sind $\tau\ge -1$ und $s<\tau+3$, so existiert ein $f\in\mathbf{L}^{2,s}_\sigma$, für welches die Gleichung* (3.10) *keine Lösung $(u,\alpha)\in\mathbf{L}^{2,\tau}_\sigma\times\mathbb{C}$ besitzt.*

Beweis. Betrachten wir für $r>1$ und $\eta=(1,1,r^{-r-1},3^{-r-1},\ldots$ die Gleichung (3.11), so folgt

$$\xi_{2k+1}=-2(2k+1)\sum_{m=k+1}^{\infty}(2m)^{-r}\sim_k (2k+1)^{2-r}\,,\quad k\in\mathbb{N}_0\,,$$

und

$$\xi_{2(k+1)}=-4(k+1)\sum_{m=k+1}^{\infty}(2m+1)^{-r}\sim_k \big[2(k+1)\big]^{2-r}\,,\quad k\in\mathbb{N}_0\,,$$

wobei η zu ℓ^2_s für $s<r+\frac{1}{2}$ gehört. Somit ist

$$\xi\in\ell^2_\tau \iff 2\tau+4-2r<-1 \iff \tau-r<-\frac{5}{2} \iff r>\tau+\frac{5}{2}\,.$$

Sind also $r=\tau+\frac{5}{2}$ und $\tau\ge -1$, so folgt $\eta\in\ell^2_s$ für $s<\frac{1}{2}+r=\tau+3$, aber die Gleichung (3.11) hat keine Lösung in ℓ^2_τ. □

3.3 Kollokations-Quadratur-Verfahren für Cauchy'sche singuläre Integralgleichungen

Wir konzentrieren uns hier auf die Situation $0 < \beta_0 = \alpha = -\beta < 1$, d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 = \kappa = 0$, aus Satz 3.1 und verwenden die Abkürzungen

$$\nu(x) = v^{\alpha,-\alpha}(x)\,,\ \mu(x) = v^{-\alpha,\alpha}(x)\,,\ p_n^\nu(x) = p_n^{\alpha,-\alpha}(x)\,,\ p_n^\mu(x) = p_n^{-\alpha,\alpha}(x)\,,$$

$$x_{nk}^\nu = x_{nk}^{\alpha,-\alpha}\,,\ x_{nj}^\mu = x_{nj}^{-\alpha,\alpha}\,,\ L_n^\nu = L_n^{\alpha,-\alpha}\,,\ L_n^\mu = L_n^{-\alpha,\alpha}\,.$$

Nach Folgerung 3.3 ist der durch

$$(Au)(x) := a(x)\nu(x)u(x) + \frac{b}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(y)}{y-x}\,\nu(y)\,dy\,, \quad -1 < x < 1$$

definierte Operator $A = a\nu I + bS\nu I : \mathbf{L}_\nu^{2,s} \longrightarrow \mathbf{L}_\mu^{2,s}$ linear, beschränkt und invertierbar mit $A^{-1} = a\mu I - bS\mu I$. Die Gleichung

$$(A + K)u = f \tag{3.12}$$

mit $(Ku)(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} k(x,y)u(y)\nu(y)\,dy$ und $k : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ wollen wir approximativ wie folgt lösen. Eine Näherungslösung $u_n(x)$ suchen wir als Polynom höchstens $(n-1)$-ten Grades,

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{nj}p_j^\nu(x) = \sum_{k=1}^{n}\xi_{nk}\ell_{nk}^\nu(x)\,. \tag{3.13}$$

Wir verwenden die Gauß'sche Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} g(x)\nu(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}^\nu g(x_{nk}^\nu) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(L_n^\nu g\right)(x)\nu(x)\,dx$$

und definieren

$$(K_n^0 u_n)(x) := \sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}^\nu k(x, x_{nk}^\nu)\xi_{nk}$$

sowie $K_n := L_n^\mu K_n^0$. Die gesuchte Näherungslösung u_n soll der Gleichung

$$(A + K_n)u_n = L_n^\mu f \tag{3.14}$$

genügen, die wir auch in der Form (vgl. (3.3))

$$\sum_{m=0}^{n-1}\alpha_{nm}p_m^\mu(x_{nj}^\mu) + \sum_{k=1}^{n}\lambda_{nk}^\mu k(x_{nj}^\mu, x_{nk}^\nu)\xi_{nk} = f(x_{nj}^\mu)\,, \quad j = 1,\ldots,n$$

schreiben können. Für die Vektoren $\alpha_n := \left[\ \alpha_{nj}\ \right]_{j=0}^{n-1}$ und $\xi_n := \left[\ \xi_{nk}\ \right]_{k=1}^{n}$ (vgl. (3.13)) gilt

$$\alpha_n = \mathbb{P}_n^\nu\mathbb{D}_n^\nu\xi_n\,, \quad \mathbb{P}_n^\nu := \left[\ P_j^\nu(x_{nk}^\nu)\ \right]_{j=0,k=1}^{n-1,\ n}\,, \quad \mathbb{D}_n^\nu = \operatorname{diag}\left[\ \lambda_{nk}^\nu\ \right]_{k=1}^{n}\,. \tag{3.15}$$

Außerdem gilt

$$\mathbb{P}_n^\nu\mathbb{D}_n^\nu\left(\mathbb{P}_n^\nu\right)^T = I = \left(\mathbb{P}_n^\nu\right)^T\mathbb{P}_n^\nu\mathbb{D}_n^\nu\,, \tag{3.16}$$

was aus

$$\delta_{jm} = \langle p_m^\nu, p_j^\nu\rangle_\nu = \sum_{k=1}^{n}p_m^\nu(x_{nk}^\nu)\lambda_{nk}^\nu p_j^\nu(x_{nk}^\nu)$$

folgt. Somit ist (3.14) äquivalent zu

$$\left[(\mathbb{P}_n^\mu)^T \, \mathbb{P}_n^\nu + \mathbb{K}_n \right] \mathbb{D}_n^\nu \xi_n = \varphi_n \tag{3.17}$$

mit $\mathbb{K}_n = \left[\; k(x_{nj}^\mu, x_{nk}^\nu) \; \right]_{j,k=1}^n$ und $\varphi_n = \left[\; f(x_{nj}^\mu) \; \right]_{j=1}^n$. Bezüglich des Operators K machen wir folgende Annahmen: Für gewisse $s, r \ge 0$ gelte

(K1) $k(.,y) \in \mathbf{L}_\mu^{2,s}$ glm. bzgl. $y \in [-1,1]$,

(K2) $k(x,.) \in \mathbf{L}_\nu^{2,r}$ glm. bzgl. $x \in [-1,1]$,

d.h.,

$$\|k(.,y)\|_{\mu,s} \le c_1 \quad \text{und} \quad \|k(x,.)\|_{\nu,r} \le c_2 \quad \forall\, x,y \in [-1,1]$$

mit $c_1 \ne c_1(y)$ und $c_2 \ne c_2(x)$. Hieraus ergeben sich einige Folgerungen:

(A) $K \in \mathcal{L}\left(\mathbf{L}_\nu^2, \mathbf{L}_\mu^{2,s}\right)$.

Beweis. Aus

$$\begin{aligned} |\langle Ku, p_n^\mu \rangle_\mu|^2 &= \left| \int_{-1}^1 k(x,y)u(y)\nu(y)\,dy\, p_n^\mu(x)\mu(x)\,dx \right|^2 \\ &= \left| \int_{-1}^1 \langle k(.,y), p_n^\mu \rangle_\mu u(y)\nu(y)\,dy \right|^2 \le \int_{-1}^1 |\langle k(.,y), p_n^\mu\rangle_\mu|^2 \,\nu(y)\,dy \;\|u\|_\nu^2 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \|Ku\|_{\mu,s}^2 &= \sum_{n=0}^\infty (1+n)^{2s} \,|\langle Ku, p_n^\mu\rangle|^2 \\ &\le \|u\|_\sigma^2 \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^\infty (1+n)^{2s} \,|\langle k(.,y), p_n^\mu\rangle_\mu|^2 \,\nu(y)\,dy \le c_1 \int_{-1}^1 \nu(y)\,dy \;\|u\|_\sigma^2 \;. \end{aligned}$$

□

(B) $K \in \mathcal{K}(\mathbf{L}_\nu^2, \mathbf{L}_\mu^{2,t})$, $0 \le t < s$.

(C) Aus $\dim N_{\mathbf{L}_\nu^2}(A+K) = 0$ folgt $A + K \in G\mathcal{L}\left(\mathbf{L}_\nu^{2,t}, \mathbf{L}_\mu^{2,t}\right)$, $0 \le t < s$.

Beweis. Nach Folgerung 3.3 gilt $A \in G\mathcal{L}(\mathbf{L}_\nu^{2,t}, \mathbf{L}_\mu^{2,t})$. Aus (B) folgt $K \in \mathcal{K}(\mathbf{L}_\nu^{2,t}, \mathbf{L}_\mu^{2,t})$. Die Fredholm'sche Alternative liefert $A + K = A(I + A^{-1}K) \in G\mathcal{L}(\mathbf{L}_\nu^{2,t}, \mathbf{L}_\mu^{2,t})$. □

Für ein Polynom u_n mit $\deg u_n < n$ gilt

$$(K_n^0 u_n)(x) = \int_{-1}^1 \left[L_n^\nu k(x,.)\right](y)\, u_n(y)\nu(y)\,dy\,.$$

Somit können wir über diese Formel den Operator K_n^0 auf ganz $\mathbf{L}_\nu^2$ fortsetzen.

Folgerung 3.13 *Sei* $(K1)$ *mit einem* $r > \frac{1}{2}$ *erfüllt. Dann gilt*

$$\left\| L_m^\mu (K_n^0 - K)u \right\|_{\mu,t} \le c\, m^t n^{-r} \,\|u\|_\nu \quad \forall\, u \in \mathbf{L}_\nu^2,\; t \ge 0$$

mit $c \ne c(m,n,t,r,u)$.

Beweis. Unter Verwendung von olgerung 3.4,(c) und Satz 3.7,(b) folgt

$$\begin{aligned}
\left\|L_m^\mu(K_n^0-K)u\right\|_{\mu,t}^2 &\le m^{2t}\left\|L_m^\mu(K_n^0-K)u\right\|_\mu^2 \\
&= m^{2t}\sum_{j=1}^m \lambda_{mj}^\mu \left|\int_{-1}^1 u(y)\left[L_{ny}^\nu k(x_{mj}^\mu,y)\right]\nu(y)\,dy\right|^2 \\
&\le m^{2t}\|u\|_\nu^2\sum_{j=1}^m \lambda_{mj}^\mu \left\|L_n^\nu k(x_{mj}^\mu,.)-k(x_{mj}^\mu,.)\right\|_\nu^2 \\
&\le c_1 m^{2t}n^{-2r}\|u\|_\nu^2\sum_{j=1}^m \lambda_{mj}^\mu \left\|k(x_{mj}^\mu,.)\right\|_{\nu,s}^2 \\
&\le c_2 m^{2t}n^{-2r}\|u\|_\nu^2\,.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.14 *Es seien* $(K1)$ *und* $(K2)$ *für ein* $s=r>\frac{1}{2}$ *erfüllt,* $f\in\mathbf{L}_\mu^{2,s}$ *und* $\dim N_{\mathbf{L}_\nu^2}(A+K)=0$. *Dann existiert ein* $n_0\in\mathbb{N}$, *so dass für alle* $n\ge n_0$ *die Gleichung* (3.14) *eine eindeutige Lösung* u_n *besitzt. Dabei gilt*

$$\|u_n-u\|_{\nu,t}\le c\,n^{t-s}\|u\|_{\nu,s}\,,\quad 0\le t<s\,,$$

wobei $u\in\mathbf{L}_\nu^{2,s}$ *die eindeutige Lösung der Gleichung* (3.12) *ist und* $c\ne c(n,t,u)$ *gilt.*

Beweis. Aus (C) folgt die Existenz der eindeutigen Lösung $u\in\mathbf{L}_\nu^2$ der Gleichung (3.12), Wir haben also $Au=f-Ku\in\mathbf{L}_\mu^{2,s}$ und somit $u=A^{-1}(f-Ku)\in\mathbf{L}_\nu^{2,s}$. Ferner gilt wegen Folgerung 3.13 uns Satz 3.7,(b)

$$\begin{aligned}
\|K_n-K\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_\nu^2,\mathbf{L}_\mu^{2,t})} &\le \left\|L_n^\mu(K_n^0-K)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_\nu^2,\mathbf{L}_\mu^{2,t})}+\|L_n^\mu K-K\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_\nu^2,\mathbf{L}_\mu^{2,t})} \\
&\le c\left(n^{t-s}+n^{t-s}\|K\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_\nu^2,\mathbf{L}_\mu^{2,t})}\right)\longrightarrow 0 \text{ if } n\longrightarrow\infty \text{ and } 0\le t<s\,.
\end{aligned}$$

Im Fall $t=0$ erhalten wir die Invertierbarkeit von $A+K_n:\mathbf{L}_\nu^2\longrightarrow\mathbf{L}_\mu^2$ für alle hinreichend großen n zusammen mit $\left\|(A+K_n)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_\nu^2,\mathbf{L}_\mu^{2,t})}\le c_1<\infty$. Hieraus folgt nun

$$\begin{aligned}
\|u_n-P_n^\nu u\|_{\nu,t} &\le n^t\|u_n-P_n^\nu u\|_\nu \\
&\le c_1n^t\|L_n^\mu f-(A+K_n)P_n^\nu u\|_\mu \\
&\le c_1n^t\left(\|L_n^\mu f-f\|_\mu+\|(A+K)(u-P_n^\nu u)\|_\mu+\|(K-K_n)P_n^\nu u\|_\mu\right) \\
&\le c_1n^t\left(c_2n^{-s}\|f\|_{\mu,s}+\|A+K\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_\nu^2,\mathbf{L}_\mu^{2,t})}n^{-s}\|u\|_{\nu,s}+c_3n^{-s}\|u\|_\mu\right) \\
&\le c_4n^{t-s}\|u\|_{\nu,s}\,.
\end{aligned}$$

□

Wir modifizieren jetzt die durch (3.14) gegebene Methode:
Schritt 1: Wir setzen in (3.13) $\alpha_{nj}=\langle L_n^\mu f,p_j^\mu\rangle_\mu$ für $j=m,\dots,n-1$, wobei $0<m<n$ gelte, d.h., wir lösen die Gleichung

$$Av_n=L_n^\mu f$$

und setzen $Q_m^\nu u_n := Q_m^\nu v_n$ mit $Q_m^\nu = I - P_m^\nu$. Wegen

$$\langle L_n^\mu f, p_j^\mu \rangle_\mu = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_{n\ell}^\mu p_j^\mu(x_{n\ell}^\mu) f(x_{n\ell}^\mu)$$

haben wir $\left[\ \alpha_{nj}\ \right]_{j=m}^{n-1} = \left[\ p_j^\mu(x_{n\ell}^\mu)\ \right]_{j=m,\ell=1}^{n-1,\ n} \mathbb{D}_n^\mu \varphi_n$.

Schritt 2: Wir setzen in (3.13) $\alpha_{nj} = \langle w_m, p_j^\nu \rangle_\nu$, $j = 0, \ldots, m-1$, wobei $w_m \in R(P_m^\nu)$ Lösung der Gleichung

$$(A + K_m) w_m = L_m^\mu f - L_m^\mu A Q_m^\nu v_n$$

ist.

Im Weiteren gehen wir davon aus, dass $m \geq n_0$ (vgl. Satz 3.14) gewählt ist und dass $u \in \mathbf{L}_\nu^2$ die (eindeutige) Lösung von (3.12) sowie u_n das nach Schritt 1 und Schritt 2 konstruierte Polynom sind.

Lemma 3.15 *Für ein $s > \frac{1}{2}$ und ein $\delta > 0$ seien $(K1)$ für $s + \delta$ statt s und $(K2)$ für $r = s$ erfüllt sowie $f \in \mathbf{L}_\mu^{2,s}$. Dann gilt*

$$\left\| Q_m^\nu (u - u_n) \right\|_{\nu,t} \leq c \left(m^{t-s-\delta} + n^{t-s} \right) \|u\|_{\nu,s} \,, \quad 0 \leq t < s \,,$$

wobei $c \neq c(m, n, t, u)$.

Beweis. Aus

$$u - u_n = u - A^{-1} f + A^{-1}(f - L_n^\mu f) + A^{-1}(L_n^\mu f - A u_n)$$

folgt mit $Q_m^\nu := I - P_m^\nu$

$$\|Q_m^\nu(u - u_n)\|_{\nu,t} \leq \left\| Q_m^\nu (u - A^{-1} f) \right\|_{\nu,t} + \left\| Q_m^\nu A^{-1}(f - L_n^\mu f) \right\|_{\nu,t} + \left\| Q_m^\nu A^{-1}(L_n^\mu f - A u_n) \right\|_{\nu,t} .$$

Unter Verwendung von (A) und Folgerung 3.4,(b) erhalten wir

$$u - A^{-1} f = u - A^{-1}(A + K) u = -A^{-1} K u \in \mathbf{L}_\nu^{2,s+\delta}$$

und $\left\| Q_m^\nu (u - A^{-1} f) \right\|_{\nu,t} \leq c_1 m^{t-s-\delta} \|u\|_\nu$. Wegen $\|Q_m^\nu\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_\nu^{2,t})} = 1$ und $\left\| A^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_\mu^{2,t}, \mathbf{L}_\nu^{2,t})} = 1$ gilt

$$\left\| Q_m^\nu A^{-1}(f - L_n^\mu f) \right\|_{\nu,t} \leq \|f - L_n^\mu f\|_{\mu,t} \overset{\text{Satz 3.7,(b)}}{\leq} c_2 n^{t-s} \|f\|_{\mu,s} .$$

Außerdem haben wir $Q_m^\nu A^{-1}(L_n^\mu f - A u_n) = Q_m^\nu A^{-1} L_n^\mu f - Q_m^\nu u_n = Q_m^\nu v_n - Q_m^\nu u_n = \Theta$. □

Lemma 3.16 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.15 und für ein s_0 mit $\frac{1}{2} < s_0 < s$ gilt*

$$\left\| P_m^\nu (u - u_n) \right\|_{nu,t} \leq c \left(m^{t-s-\delta} + n^{t-s} \right) \|u\|_{\nu,s} \,, \quad s_0 \leq t < s \,,$$

wobei $c \neq c(m, n, t, u)$.

Beweis. Aus $P_m^\nu u_n = w_m$ folgt

$$\begin{aligned} (a + K_m)(w_m - P_m^\nu u) &= L_m^\mu f - L_m^\mu A Q_m^\nu u_n - (A + K_m) P_m^\nu u \\ &= L_m^\mu (A + K)(P_m^\nu u + Q_m^\nu u) - L_m^\mu A Q_m^\nu u_n - (A + K) P_m^\nu u \\ &= (L_m^\mu - I) A P_m^\nu u + L_m^\mu (K - K_m^0) u + L_m^\mu K_m^0 Q_m^\nu u + L_m^\mu A Q_m^\nu (u - u_n) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\|w_m - P_m^\nu u\|_{\nu,t} &\le m^{t-s_0}\, \|w_m - P_m^\nu u\|_{\nu,s_0} \\ &\le c_3 \Big(\|(L_m^\mu - I)AP_m^\nu u\|_{\mu,s_0} + \left\|L_m^\mu (K - K_m^0)u\right\|_{\mu,s_0} \\ &\qquad + \left\|L_m^\mu K_m^0 Q_m^\nu u\right\|_{\mu,s_0} + \|L_m^\mu A Q_m^\nu (u-u_n)\|_{\mu,s_0} \Big)\,.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus

$$\begin{aligned}\|L_m^\mu A Q_m^\nu (u-u_n)\|_{\mu,s_0} &\overset{\text{Satz 3.7,}(b)}{\le} \|L_m^\mu\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_\mu^{2,s_0})}\, \|Q_m^\nu (u-u_n)\|_{\nu,s_0} \\ &\overset{\text{Lemma 3.15}}{\le} c_4 \left(m^{s_0-s-\delta} + n^{s_0-s}\right) \|u\|_{\nu,s}\ ,\end{aligned}$$

$(L_m^\mu - I)AP_m^\nu u = \Theta\,,\ \left\|L_m^\mu (K - K_m^0)u\right\|_{\mu,s_0} \overset{\text{Folg. 3.13}}{\le} c_3 m^{s_0-s-\delta}\, \|u\|_\nu\ ,$

$$(K_m^0 Q_m^\nu u)(x) = \int_{-1}^1 \left[L_m^\nu k(x,.)\right](y)(Q_m^\nu u)(y)\nu(y)\, dy \equiv 0$$

und $m^{t-s_0}\left(m^{s_0-s-\delta} + n^{s_0-s}\right) = m^{t-s-\delta} + m^t n^{-s} \le m^{t-s-\delta} + n^{t-s}\,.$ □

Aus den lemmata 3.15 und 3.16 erhält man nun den folgenden Satz.

Satz 3.17 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.15 und für ein s_0 mit $\frac{1}{2} < s_0 < s$ gilt*

$$\|u_n - u\|_{\nu,t} \le c\left(m^{t-s-\delta} + n^{t-s}\right) \|u\|_{\nu,s}\ , \quad s_0 \le t < s\,,$$

wobei $c \ne c(m,n,t,u)$. Wählt man m (in Abhängigkeit von n) so, dass $0 < \rho \le \frac{m^3}{n}$ mit einer Konstanten $\rho \le 1$ gilt, so folgt

$$\|u_n - u\|_{\nu,t} \le c_1 n^{t-s}\, \|u\|_{\nu,s}\ , \quad \max\left\{s_0, s - \frac{\delta}{2}\right\} \le t < s.$$

Beweis. Es ist zu beachten, dass unter den gemachten Voraussetzungen $m^{t-s-\delta} \le c_1 n^{\frac{t-s-\delta}{3}}$ mit $\rho_1 := \rho^{\frac{s_0-s-\delta}{3}} \ge \rho^{\frac{t-s-\delta}{3}}$ gilt, wobei auch $\frac{t-s-\delta}{3} \le t-s$ ist wegen $s - \frac{\delta}{2} \le t\,.$ □

Zur **Komplexität** der modifizierten Methode:

- *Schritt 1*: Die **diskrete Polynomtransformation** $\mathbb{P}_n^\mu = \left[\ p_j^\mu(x_{nk}^\mu)\ \right]_{j=0,k=1}^{n-1,\ n}$ kann mit $O(n\log^2 n)$ Komplexität auf einen Vektor der Länge n angewandt werden ([25]). Im Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ ist dies sogar mit $O(n\log n)$ Komplexität möglich, da in diesem Fall $p_n^\mu(\cos\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\, \dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$ und $x_{nk}^\mu = \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n+1}$ und somit

$$\mathbb{P}_n^\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\ \cos\frac{\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}}\ \right]_{j=0,k=1}^{n-1,\ n} (\mathbb{D}_n^\mu)^{-1}$$

  gilt, wir also eine diskrete Kosinus-Transformation vorliegen haben.

- *Schritt 2*: Wählt man im Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ die Zahl m so, dass $\frac{2n+1}{2m+1}$ eine ungerade Zahl ist, so gilt
$$\left\{ x_{mj}^{\mu} : j = 1, \ldots, m \right\} \subset \left\{ x_{nj}^{\mu} : j = 1, \ldots, n \right\} ,$$
so dass $\left\{ f(x_{mj}^{\mu}) : j = 1, \ldots, m \right\} \subset \left\{ f(x_{nj}^{\mu}) : j = 1, \ldots, n \right\}$. Ferner haben wir
$$(AQ_m^{\nu} v_n)(x_{mj}^{\mu}) = \sum_{\ell=m}^{n-1} \alpha_{n\ell} p_\ell^{\mu}(x_{mj}^{\mu}) = \sum_{\ell=m+1}^{n-1} p_\ell^{\mu}(x_{mj}^{\mu}) \langle L_n^{\mu} f, p_\ell^{\mu} \rangle_\mu \,.$$
Die Systemmatrix in (3.17) kann auch in der Form (hier ohne Beweis)
$$\left(\left[\ \frac{b}{\pi} \frac{1}{x_{nk}^{\nu} - x_{nj}^{\mu}} \ \right]_{j,k=1}^{n} + \mathbb{K}_n \right) \mathbb{D}_n^{\nu}$$
geschrieben werden.

- Wählt man m (in Abhängigkeit von n) so, dass $\frac{m^3}{n} \leq \rho_2 < \infty$ mit einer Konstanten ρ_2 gilt, so hat man eine Gesamtkomplexität von $O(n \log^2 n)$ bzw. $O(n \log n)$.

Kapitel 4

Anhang: Banachalgebratechniken

4.1 Stabilität als Invertierbarkeit in einer Banachalgebra

Es seien $\mathbf{X}$ ein Banachraum und $L_n : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ eine Folge von Projektoren mit $L_n \longrightarrow I$. Sei $\mathbf{X}_n := R(L_n)$. Mit $\mathcal{F}$ bezeichnen wir die Menge aller Folgen $(A_n) = (A_n)_{n=1}^\infty$ von Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X}_n)$ mit

$$\|(A_n)\| = \|(A_n)\|_{\mathcal{F}} := \sup\left\{\|A_n L_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} : n = 1, 2, \dots\right\} < \infty \,. \tag{4.1}$$

Wir versehen diese Menge mit den algebraischen Operationen

$$(A_n) + (B_n) = (A_n + B_n) \;, \quad \lambda\,(A_n) = (\lambda A_n) \;, \quad (A_n)\,(B_n) = (A_n B_n) \;.$$

Mit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ bezeichnen wir die Teilmenge von $\mathcal{F}$, die alle Folgen (G_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|G_n L_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} = 0$ enthält.

Lemma 4.1 *$\mathcal{F}$ ist mit der in (4.1) definierten Norm eine Banachalgebra und $\mathcal{G}$ ist ein (zweiseitiges) abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{F}$.*

In Satz 2.25 hatten wir gesehen, dass die Stabilität eines Projektionsverfahrens entscheidend ist für die Anwendbarkeit eines solchen. Dazu folgende Definition.

Definition 4.2 *Eine Folge $(A_n) \in \mathcal{F}$ nennen wir* **stabil**, *wenn ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $A_n : \mathbf{X}_n \longrightarrow \mathbf{X}_n$ für alle $n \ge n_0$ invertierbar ist und*

$$\sup\left\{\left\|A_n^{-1} L_n\right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} : n \ge n_0\right\} < \infty$$

gilt.

Satz 4.3 *Die Folge $(A_n) \in \mathcal{F}$ ist genau dann stabil, wenn die Restklasse $(A_n) + \mathcal{G}$ in der Faktoralgebra $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ invertierbar ist.*

Wir setzen ab jetzt voraus, dass neben $L_n \longrightarrow I$ auch $L_n^* \longrightarrow I$ gilt. Ferner sei uns eine Operatorfolge $W_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ gegeben, die gemeinsam mit W_n^* schwach gegen Null konvergiert und für die $L_n W_n = W_n$ und $W_n^2 = L_n$ gilt. Mit $\mathcal{F}_0$ bezeichnen wir die Teilmenge von $\mathcal{F}$ der Operatorfolgen (A_n) , für die Operatoren $A = \mathcal{W}_1\,(A_n) \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ und $\widetilde{A} = \mathcal{W}_2\,(A_n) \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ existieren, so dass

$$A_n L_n \longrightarrow A\,,\; A_n^* L_n^* \longrightarrow A^*\,,\; \widetilde{A}_n L_n := W_n A_n W_n \longrightarrow \widetilde{A}\,,\; \widetilde{A}_n^* L_n^* \longrightarrow \widetilde{A}^*$$

gilt. Mit $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$ bezeichnen wir die Menge der Operatorfolgen der Gestalt

$$(L_n T_1 L_n + W_n T_2 W_n + C_n) \quad \text{mit} \quad T_1, T_2 \in \mathcal{K}(\mathbf{X})\,,\; (C_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{G}\,.$$

Satz 4.4 *Es gilt*

(a) $\mathcal{F}_0$ *ist eine abgeschlossene Teilalgebra von* $\mathcal{F}$.

(b) *Es gilt* $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}_0$, *wobei* $\mathcal{W}_1\left(J_n\right) = T_1$ *und* $\mathcal{W}_2\left(J_n\right) = T_2$ *für jede Folge*

$$(J_n) = (L_n T_1 L_n + W_n T_2 W_n + C_n) \in \mathcal{J} .$$

(c) $\mathcal{J}$ *ist ein zweiseitiges abgeschlossenes Ideal in* $\mathcal{F}_0$.

(d) *Eine Folge* $(A_n) \in \mathcal{F}_0$ *ist genau dann stabil, wenn die Operatoren* $\mathcal{W}_j\left(A_n\right)$, $j = 1, 2$ *in* $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ *und die Restklasse* $(A_n) + \mathcal{J}$ *in der Faktoralgebra* $\mathcal{F}_0/\mathcal{J}$ *invertierbar sind.*

Dieses Theorem lässt sich auf folgende Situation verallgemeinern:

- Es seien $L_n^{(\omega)} \in \mathcal{L}(\mathbf{X}_\omega)$, $\omega \in \Omega := \{1, \ldots, M\}$ Projektoren auf den Banachräumen $\mathbf{X}_\omega$ mit den Bildräume $\mathbf{X}_n^\omega$ und $E_n^{(\omega)} : \mathbf{X}_n \longrightarrow \mathbf{X}_n^\omega$, $\omega \in \Omega$ invertierbare Operatoren, die zu $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_\omega)$ gehören.

- Die Operatorfolgen $\left(E_n^{(\omega_1)}\left(E_n^{(\omega_2)}\right)^{-1} L_n^{(\omega_2)}\right)_{n=1}^\infty$ konvergieren schwach gegen Null für alle Indizes $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ mit $\omega_1 \neq \omega_2$.

- $\mathcal{F}_0$ ist die Algebra aller Folgen (A) von Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X}_n)$, für die Operatoren $\mathcal{W}_\omega\left(A_n\right) \in \mathcal{L}(\mathbf{X}_\omega)$ existieren, so dass für alle $\omega \in \Omega$

$$E_n^{(\omega)} A_n \left(E_n^{(\omega)}\right)^{-1} L_n^{(\omega)} \longrightarrow \mathcal{W}_\omega\left(A_n\right) , \quad \left(E_n^{(\omega)} A_n \left(E_n^{(\omega)}\right)^{-1}\right)^* \left(L_n^{(\omega)}\right)^* \longrightarrow \mathcal{W}_\omega\left(A_n\right)^*$$

  gilt.

- $\mathcal{J}$ ist die Menge aller Folgen der Gestalt

$$(J_n) = \sum_{\omega \in \Omega} \left(\left(E_n^{(\omega)}\right)^{-1} L_n^{(\omega)} T_\omega E_n^{(\omega)}\right) + (C_n) , \quad T_\omega \in \mathcal{K}(\mathbf{X}_\omega) ,\ (C_n) \in \mathcal{G} .$$

4.2 Die Operatorfolge eines Kollokationsverfahrens

Wir stellen uns die Aufgabe, eine Integralgleichung der Gestalt

$$a(x)u(x) + \frac{b(x)}{\pi \mathbf{i}} \int_{-1}^1 \frac{u(y)\, dy}{y - x} = f(x) , \quad -1 < x < 1 , \tag{4.2}$$

numerisch zu lösen. Dabei seien $a, b, f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ gegebene Funktionen. Die Funktion $u : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ ist gesucht. Wir machen folgende Annahmen:

(A) Die Funktionen a und b sind stückweise stetig. Man nennt eine Funktion $a : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ **stückweise stetig**, wenn sie in $x = \pm 1$ stetig ist, in allen Punkten $x \in (-1, 1)$ die einseitigen Grenzwerte

$$a(x \pm 0) = \lim_{y \to x \pm 0} a(y)$$

existieren und einer dieser Grenzwerte gleich dem Funktionswert $a(x)$ ist. Die Menge aller stückweise stetigen Funktionen über $[-1, 1]$ bezeichnen wir mit $\mathbf{PC}[-1, 1] = \mathbf{PC}$.

(B) Die Funktion f gehöre zu $\mathbf{L}^2_\sigma$ mit $\sigma(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Die Lösung u der Gleichung (4.2) suchen wir ebenfalls im Raum $\mathbf{L}^2_\sigma$.

Mit S bezeichnen wir den singulären Integraloperator

$$S : \mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma , \quad u \mapsto \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{-1}^{1} \frac{u(y)\, dy}{y - .} ,$$

wobei das Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen ist. Nach Folgerung 3.2 gilt somit

$$S\sigma T_n = -\mathbf{i} U_{n-1} \quad \text{und} \quad S\varphi U_n = \mathbf{i} T_{n+1} , \quad n \in \mathbb{N}_0 ,$$

wobei $\varphi(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Insbesondere ist also $\|S\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}^2_\sigma)} = 1$.

Für die Näherungslösung auf dem Niveau n machen wir den Ansatz

$$u_n(x) = \varphi(x) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} U_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} \widetilde{u}_k(x) \tag{4.3}$$

mit $\widetilde{u}_k(x) = \varphi(x) U_k(x)$ und bestimmen diese durch **Kollokation** der Gleichung (4.2) in den Punkten $x = x^\tau_{nj}$,

$$a(x^\tau_{nj}) u_n(x^\tau_{nj}) + \frac{b(x^\tau_{nj})}{\pi \mathbf{i}} \int_{-1}^{1} \frac{u_n(y)\, dy}{y - x^\tau_{nj}} = f_n(x^\tau_{nj}) , \tag{4.4}$$

$j = 1, \ldots, n$, wobei die Funktion f_n eine gewisse Approximation für die Funktion f sei. Wir werden uns hier auf die Fälle $\tau = \sigma$ und $\tau = \varphi$ beschränken. Die Gleichungen (4.4) stellen ein Gleichungssystem zur Berechnung der unbekannten Koeffizienten α_{nk} in (4.3) bzw. der unbekannten Funktionswerte $u_n(x^\varphi_{nk})$, $k = 1, \ldots, n$, dar. Die Gleichungen (4.2) und (4.4) schreiben wir als Operatorgleichungen in der Form

$$Au = f , \quad A = aI + bS , \tag{4.5}$$

bzw.

$$A_n u_n = f_n , \quad A_n = M^\tau_n A L_n , \; u_n \in \mathbf{X}_n = \operatorname{span}\{\widetilde{u}_k : k = 0, \ldots, n-1\} , \tag{4.6}$$

wobei M^τ_n den gewichteten Interpolationsoperator $M^\tau_n = \varphi L^\tau_n \varphi^{-1} I$ bezeichnet,

$$(M^\tau_n f)(x) = \varphi(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x^\tau_{nk})}{\varphi(x^\tau_{nk})} \ell^\omega_{nk}(x) =: \sum_{k=1}^{n} f(x^\tau_{nk}) \widetilde{\ell}^\omega_{nk}(x) .$$

Wir konstruieren nun die Algebra $\mathcal{F}_0$ auf folgende Weise:

- $\mathbf{X} = \mathbf{L}^2_\sigma$, $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}$, $\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_4 = \ell^2$
- $L_n u = \sum_{k=0}^{n-1} \langle u, \widetilde{u}_k \rangle_\sigma \widetilde{u}_k$
- $L^{(1)}_n = L^{(2)}_n = L_n$, $L^{(3)}_n = L^{(4)}_n = P_n$, $P_n (\xi_j)_{j=0}^\infty = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}, 0, 0, \ldots)$
- $E^{(1)}_n = L_n$, $E^{(2)}_n = W_n$, $E^{(3)}_n = V^\tau_n$, $E^{(4)}_n = \widetilde{V}^\tau_n$, $\tau = \sigma, \varphi$,

$$W_n u = \sum_{k=0}^{n-1} \langle u, \widetilde{u}_{n-k-1} \rangle_\sigma \widetilde{u}_k ,$$

$$V^\tau_n u = (\omega^\tau_n u(x^\tau_{n1}), \ldots, \omega^\tau_n u(x^\tau_{nn}), 0, 0, \ldots) , \quad \widetilde{V}^\tau_n u = (\omega^\tau_n u(x^\tau_{nn}), \ldots, \omega^\tau_n u(x^\tau_{n1}), 0, 0, \ldots) ,$$

$$\omega^\sigma_n = \sqrt{\frac{\pi}{n}} , \quad \omega^\varphi_n = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}$$

Für das Weitere benötigen wir die Operatoren $J : \mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma\,,\ u \mapsto \sum_{n=0}^\infty \gamma_n \langle u, \widetilde{u}_n\rangle_\sigma T_n$ mit $\gamma_0 = \sqrt{2}\,,\ \gamma_n = 1\,,\ n = 1, 2, \ldots$ und $V : \mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma\,,\ u \mapsto \sum_{n=0}^\infty \langle u, \widetilde{u}_n\rangle_\sigma \widetilde{u}_{n+1}\,.$

Satz 4.5 *Es seien $a, b \in \mathbf{PC}$ und $A = aI + bS$. Dann gehört die Folge $A_n = M_n^\tau A L_n$ des Kollokationsverfahrens* (4.6) *zur Algebra $\mathcal{F}_0$. Dabei gilt*

$$\mathcal{W}_1\,(A_n) = A\,, \quad \mathcal{W}_3\,(A_n) = a(1)\mathbb{I} + b(1)\mathbb{S}\,, \quad \mathcal{W}_4\,(A_n) = a(-1)\mathbb{I} - b(-1)\mathbb{S}$$

und

$$\mathcal{W}_2\,(A_n) = \begin{cases} J^{-1}(aJ + b\mathbf{i}V^*) & : \ \tau = \sigma\,, \\ aI - bS & : \ \tau = \varphi\,, \end{cases}$$

wobei

$$\mathbb{S} = \begin{cases} \left[\dfrac{1-(-1)^{j-k}}{\pi\mathbf{i}(j-k)} - \dfrac{1-(-1)^{j+k+1}}{\pi\mathbf{i}(j+k+1)} \right]_{j,k=0}^\infty & : \ \tau = \sigma\,, \\ \left[\dfrac{2(k+1)[1-(-1)^{j-k}]}{\pi\mathbf{i}[(j+1)^2-(k+1)^2]} \right]_{j,k=0}^\infty & : \ \tau = \varphi\,. \end{cases}$$

Mit $\mathcal{A}_0$ bezeichnen wir die kleinste abgeschlossene Teilalgebra der Banachlgebra $\mathcal{F}_0$, die alle Folgen der Gestalt $(M_n^\tau(aI + bS)L_n)$ mit $a, b \in \mathbf{PC}$ und die entsprechenden Folgen der adjungierten Operatoren enthält.

Satz 4.6 *Eine Folge $(A_n) \in \mathcal{A}_0$ ist genau dann stabil, wenn alle Operatoren $\mathcal{W}_\omega\,(A_n) : \mathbf{H}_\omega \longrightarrow \mathbf{H}_\omega\,,\ \omega = 1, 2, 3, 4\,,$ invertierbar sind.*

4.3 Fredholmeigenschaften singulärer Integraloperatoren

Wir verwenden im Weiteren die Bezeichnung $\mathbf{L}^2_{\alpha,\beta} := \mathbf{L}^2_{v^{\alpha,\beta}}\,,\ v^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,.$

Satz 4.7 *Der Operator $S : \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta} \longrightarrow \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta}$ ist beschränkt, falls $-1 < \alpha, \beta < 1$ gilt.*

Für zwei Funktionen $a, b \in \mathbf{PC}$ mit $a(x) - b(x) \neq 0$ definieren wir

$$c(x) = \frac{a(x) + b(x)}{a(x) - b(x)}\,, \quad -1 < x < 1\,,$$

und

$$\mathbf{c}(x, \lambda) = \begin{cases} (1-\lambda)c(x-0) + \lambda\, c(x+0) & : \ x \in (-1, 1)\,, \\ c(1) + [1 - c(1)]\mathbf{f}_\alpha(\lambda) & : \ x = 1\,, \\ 1 + [c(-1) - 1]\mathbf{f}_\beta(\lambda) & : \ x = -1\,, \end{cases}$$

wobei

$$\mathbf{f}_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi\alpha\lambda)}{\sin(\pi\alpha)}\, e^{-\mathbf{i}\pi\alpha(\lambda-1)} & : \ \alpha \in (-1, 1) \setminus \{0\}\,, \\ \lambda & : \ \alpha = 0\,. \end{cases}$$

Satz 4.8 *Es seien $a, b \in \mathbf{PC}$ und $\alpha, \beta \in (-1, 1)$. Der Operator $aI + bS : \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta} \longrightarrow \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta}$ ist genau dann Fredholmsch, wenn $a(x) - b(x) \neq 0$ und $\mathbf{c}(x, \lambda) \neq 0$ für alle $(x, \lambda) \in [-1, 1] \times [0, 1]$ gilt. Dabei ist der Index gleich*

$$\mathrm{ind}\,(aI + bS) = -\mathrm{wind}\,\mathbf{c}(x, \lambda)\,,$$

und der Operator $aI + bS : \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta} \longrightarrow \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta}$ ist wenigstens einseitig invertierbar.

Diskussion der Stabilitätsbedingungen für Folgen der Gestalt $(M_n^\tau(aI+bS)L_n)$:

1. Es gibt Operatoren $aI+bS : \mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma$, die invertierbar sind, für die aber $aI-bS : \mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma$ nicht invertierbar ist, z.B. $a(x)\equiv \frac{1}{2}$, $b(x)=-\mathbf{i}x$ (vgl. Satz 4.8).
2. Für $a,b\in\mathbf{PC}$ ist der Operator $J^{-1}(aJ+\mathbf{i}bV^*) : \mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma$ genau dann invertierbar, wenn der Operator $aI+bS : \mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma$ invertierbar ist.
3. Es seien $\chi\in\mathbf{L}^\infty(\mathbb{T})$, $\mathbb{T}=\{t\in\mathbb{C}:|t|=1\}$ und $\chi(t)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{\chi}_k t^k$. Mit $T(\chi):\ell^2\longrightarrow\ell^2$ bzw. $H(\chi):\ell^2\longrightarrow\ell^2$ bezeichnen wir den Toeplitz-Operator $T(\chi)=\left[\ \widehat{\chi}_{j-k}\ \right]_{j,k=0}^\infty$ bzw. den Hankel-Operator $H(\chi)=\left[\ \widehat{\chi}_{j+k+1}\ \right]_{j,k=0}^\infty$. Ferner sei $\mathbf{PC}_0$ die Menge der stückweise stetigen Funktionen $\chi:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{C}$, die in $t\neq\pm1$ stetig sind. Wir definieren für $\chi\in\mathbf{PC}_0$

$$\mathbf{c}_{T(\chi)}(t,\lambda)=\begin{cases}\chi(t) & : \quad t\in\mathbb{T}\setminus\{\pm1\}\,,\ \lambda\in[0,1]\,,\\ \lambda\chi(t+0)+(1-\lambda)\chi(t-0) & : \quad t=\pm1\,,\ \lambda\in[0,1]\,,\end{cases}$$

und

$$\mathbf{c}_{H(\chi)}(t,\lambda)=\begin{cases}0 & : \quad t\in\mathbb{T}\setminus\{\pm1\}\,,\ \lambda\in[0,1]\\ -t\mathbf{i}[\chi(t+0)-\chi(t-0)]\sqrt{\lambda(1-\lambda)} & : \quad t=\pm1\,,\ \lambda\in[0,1]\,.\end{cases}$$

Lemma 4.9 *Es seien $\chi_1,\chi_2\in\mathbf{PC}_0$. Dann ist der Operator $T(\chi_1)+H(\chi_2):\ell^2\longrightarrow\ell^2$ genau dann Fredholmsch, wenn $\mathbf{c}_{T+H}(t,\lambda):=\mathbf{c}_{T(\chi_1)}(t,\lambda)+\mathbf{c}_{H(\chi_2)}(t,\lambda)\neq0$ auf $\mathbb{T}\times[0,1]$ gilt. Der Fredholmindex ist dabei gleich der negativen Windungszahl des Bildes dieser Funktion bzgl. des Nullpunktes.*

Im Fall $\tau=\sigma$ ist nun

$$\mathbb{S}=\mathbb{S}_\sigma=T(\phi)-H(\phi)\quad\text{mit}\quad\phi(t)=\operatorname{sgn}(\mathsf{Im}\,t)\,,$$

so dass

$$\mathbf{c}_{\mathbb{S}_\sigma}(t,\lambda)=\begin{cases}1 & : \quad \mathsf{Im}\,t>0\,,\\ -1 & : \quad \mathsf{Im}\,t<0\,,\\ \pm(2\lambda-1)+2\mathbf{i}\sqrt{\lambda(1-\lambda)} & : \quad t=\pm1\,.\end{cases}$$

Lemma 4.10 *Sei $\chi\in\mathbf{L}^\infty$. Der Operator $T(\chi)+H(\chi):\ell^2\longrightarrow\ell^2$ ist genau dann invertierbar, wenn er Fredholmsch mit dem Index 0 ist.*

Da $\{\mathbf{c}_{\mathbb{S}_\sigma}(t,\lambda):(t,\lambda)\in\mathbb{T}\times[0,1]\}=\left\{e^{\mathbf{i}s}:s\in[0,\pi]\right\}$ gilt, ist nach Lemma 4.10 (beachte $\mathbb{S}^*_\sigma=T(\phi)+H(\phi)$) der Operator $a\mathbb{I}+b\mathbb{S}_\sigma:\ell^2\longrightarrow\ell^2$, $a,b\in\mathbb{C}$, genau dann invertierbar, wenn $a+be^{\mathbf{i}s}\neq0\ \forall\, s\in[0,\pi]$ gilt.

Im Fall $\tau=\varphi$ haben wir

$$\mathbb{S}=\mathbb{S}_\varphi=T(\phi)-H(\phi_1)\quad\text{mit}\quad\phi_1(t)=t^{-1}\phi(t)\,,$$

so dass

$$\mathbf{c}_{\mathbb{S}_\varphi}(t,\lambda)=\begin{cases}1 & : \quad \mathsf{Im}\,t>0\,,\\ -1 & : \quad \mathsf{Im}\,t<0\,,\\ \pm(2\lambda-1)\pm2\mathbf{i}\sqrt{\lambda(1-\lambda)} & : \quad t=\pm1\,.\end{cases}$$

Unter Verwendung von Lemma 4.9 erhält man hieraus, dass für Konstanten $a,b\in\mathbb{C}$ der Operator $a\mathbb{I}+b\mathbb{S}_\varphi:\ell^2\longrightarrow\ell^2$ genau dann Fredholmsch mit dem Index Null ist, wenn $|a|>|b|$ gilt.

Satz 4.11 *Es seien* $a, b \in \mathbf{PC}$ *und* $A = aI + bS$. *Die Folge* $(M_n^\sigma A L_n)$ *ist genau dann stabil, wenn der Operator* $A : \mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma$ *invertierbar ist. Die Folge* $(M_n^\varphi A L_n)$ *ist genau dann stabil, wenn die Operatoren* A, $aI - bS : \mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma$ *invertierbar sind.*

Index