Prüfungskomplexe zur Vorlesung
Analysis und Numerik für Integralgleichungen

1. (a) Wie kann man eine Fredholm'sche Integralgleichung mit separiertem Kern als lineares Gleichungssystem schreiben? Leiten Sie eine Lösungsformel für eine solche Integralgleichung her. Zeigen Sie, dass eine Fredholm'sche Integralgleichung mit stetigem Kern genau dann in $\mathbf{C}[-1,1]$ eindeutig lösbar ist, wenn dies in $\mathbf{L}^2(-1,1)$ der Fall ist. (Lemma 1.1)
   (b) Beschreiben Sie die Nyström-Methode und zeigen Sie deren Konvergenz unter Verwendung des Begriffs der kollektiv kompakten Operatorfolge. (Satz 1.2) Wie kann man dabei gewichtete Räume stetiger Funktionen verwenden?
   (c) Zeigen Sie, dass ein Integraloperator mit schwach singulärem Kern im Raum der stetigen Funktionen kompakt ist. (Satz 1.4)

2. (a) Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass eine Operatorfolge, die über eine Quadraturformel mit variablen Gewichten (Formel (1.14)) definiert ist, kollektiv kompakt ist. Begründen Sie Ihre Aussage. (Lemma 1.5 und Lemma 1.7)
   (b) Was versteht man unter der Produktintegrationsmethode?
   (c) Zeigen Sie, dass eine Volterra'sche Integralgleichung mit stetigem Kern im Raum der stetigen Funktionen stets eindeutig lösbar ist. (Satz 1.10)

3. (a) Zeigen Sie, dass ein abgeschlossener Teilraum (eines Banachraumes) mit endlicher Dimension oder endlicher Kodimension ein direktes Komplement besitzt. (Lemma 2.5)
   (b) Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Links- bzw. Rechtsinvertierbarkeit eines Operators an. Begründen Sie Ihre Aussage. (Lemma 2.6)
   (c) Beschreiben Sie die Konstruktion der Menge $\mathcal{R}(V)$ und beweisen Sie dass ein Operator $R \in \mathcal{R}(V)$ genau dann von wenigstens einer Seite invertierbar ist, wenn sein Symbol nicht verschwindet. (Satz 2.14)

4. (a) Zeigen Sie, wie man das Symbol eines Operators aus $\overline{\mathcal{R}}(V)$ definieren kann.
   (b) Wie sind $\overline{\mathcal{R}}(\widetilde{V})$ und $\overline{\mathcal{R}}_0(\widetilde{V})$ definiert?
   (c) Zeigen Sie, dass ein Operator aus $\overline{\mathcal{R}}_0(\widetilde{V})$ genau dann von wenigstens einer Seite invertierbar ist, wenn sein Symbol nirgends verschwindet. (Satz 2.19)
   (d) Wie sieht die Realisierung für Wiener-Hopf'sche Integralgleichungen aus? (Abschnitt 2.4)

5. (a) Erläutern Sie den Begriff der Anwendbarkeit eines Projektionsverfahrens. (Definition 2.24)
   (b) Zeigen Sie, dass die Anwendbarkeit eines Projektionsverfahrens stabil gegenüber kleinen und kompakten Störungen ist. (Lemma 2.27 und Lemma 2.28)
   (c) Geben Sie Bedingungen für die Anwendbarkeit eines Projektionsverfahrens auf einen Operator aus $\overline{\mathcal{R}}_0(\widetilde{V})$ an. Begründen Sie Ihre Aussage. (Satz 2.29) Wie kann man diese Aussage auf Wiener-Hopf'sche Integralgleichungen anwenden?

6. (a) Beschreiben Sie ein Kollokations-Quadratur-Verfahren zur numerischen Lösung einer Cauchy'schen singulären Integralgleichung und begründen Sie die Konvergenz dieses Verfahrens. (Folgerung 3.13 und Satz 3.14)
   (b) Beschreiben Sie die Modifikation dieses Verfahrens zu einem schnellen Algorithmus und begründen Sie seine Anwendbarkeit. (Lemma 3.15, Lemma 3.16 und Satz 3.17)