Kapitel 0

Grundlagen

0.1 Normierte Räume

Unter einem **metrischen Raum X** versteht man ein geordnetes Paar $(\mathbf{X}, d)$ aus einer nichtleeren Menge (den Punkten des Raumes) und einer Abbildung $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow [0, \infty)$ (der Metrik), die folgenden Axiomen genügt:

(M1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}$,

(M3) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{X}$ (Dreiecksungleichung).

Eine Punktfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{X}$ nennt man **konvergent** mit dem **Grenzwert** $x^* \in \mathbf{X}$ (in Zeichen: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$), wenn $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x^*) = 0$ gilt. Der Grenzwert einer konvergenten Punktfolge ist offenbar eindeutig bestimmt, und jede Teilfolge einer konvergenten Punktfolge ist ebenfalls konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

Eine Punktfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{X}$ nennt man **Cauchyfolge** oder **Fundamentalfolge**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m > N$ existiert. Der metrische Raum $(\mathbf{X}, d)$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in $\mathbf{X}$ konvergent in $\mathbf{X}$ ist.

Eine Familie $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ offener Mengen $U_\alpha \subset \mathbf{X}$ mit $A \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha$ nennen wir **offene Überdeckung** der Menge $A \subset \mathbf{X}$. Sie heißt **endlich**, wenn sie nur aus endlich vielen Mengen U_α besteht. Eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ heißt **kompakt**, wenn aus jeder offenen Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann. Man nennt $A \subset \mathbf{X}$ **relativ kompakt** oder **präkompakt**, wenn ihre Abschließung $\overline{A}$ kompakt ist.

Eine Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $x \mapsto f(x)$ zwischen zwei metrischen Räumen $(\mathbf{X}, d_\mathbf{X})$ und $(\mathbf{Y}, d_\mathbf{Y})$ nennt man **stetig**, wenn für jedes $x_0 \in \mathbf{X}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $x \in U_\delta(x_0)$ stets $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$ (d.h. $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$) folgt . Man nennt sie **gleichmäßig stetig**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d_\mathbf{Y}(f(y), f(x)) < \varepsilon$ für alle $x, y \in \mathbf{X}$ mit $d_\mathbf{X}(y, x) < \delta$ gilt.

Satz 0.1 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) *Die Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ ist stetig.*

(b) *Aus* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{X}$ *und* $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ *folgt* $f(x^*) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

(c) *Für jede offene Menge* $A \subset \mathbf{Y}$ *ist* $f^{-1}(A)$ *offen.*

(d) *Für jede abgeschlossene Menge* $A \subset \mathbf{Y}$ *ist* $f^{-1}(A)$ *abgeschlossen.*

Beispiel 0.2 *Mit* $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbb{C})$ *bezeichnen wir den metrischen Raum der stetigen, komplexwertigen Abbildungen* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ *auf dem kompakten metrischen Raum* $\mathbf{X}$ *mit der Metrik*

$$d_\infty(f, g) := \max\left\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbf{X}\right\} .$$

Dieser metrische Raum ist vollständig.

Eine Familie $\mathcal{F}$ von Funktionen $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ auf einem metrischen Raum $(\mathbf{X}, d)$ nennt man **gleichgradig stetig**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, f \in \mathcal{F}\,,\ \forall\, x, y \in \mathbf{X} \quad \text{mit} \quad d(x, y) < \delta$$

gilt. $\mathcal{F}$ heißt **gleichmäßig beschränkt**, wenn eine Konstante $M > 0$ existiert, so dass

$$|f(x)| \le M \quad \forall\, f \in \mathcal{F}\,,\ \forall\, x \in \mathbf{X}\,.$$

Theorem 0.3 (Arzela-Ascoli) *Es sei* $\mathbf{X}$ *ein kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge* $\mathcal{F} \subset \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbb{C})$ *ist genau dann präkompakt im Banachraum* $(\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbb{C}), d_\infty)$ *, wenn die Funktionen aus* $\mathcal{F}$ *gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sind.*

Eine Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ zwischen zwei metrischen Räumen $(\mathbf{X}, d_{\mathbf{X}})$ und $(\mathbf{Y}, d_{\mathbf{Y}})$ nennt man **kontrahierend**, wenn ein $q \in (0, 1)$ existiert, so dass

$$d_{\mathbf{Y}}(f(x_1), f(x_2)) \le q\, d_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{X}$$

gilt.

Satz 0.4 (Banach'scher Fixpunktsatz) *Es seien* $(\mathbf{X}, d)$ *ein vollständiger metrischer Raum und* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ *eine kontrahierende Abbildung mit der Kontraktionskonstanten* q *. Dann besitzt* f *in* $\mathbf{X}$ *genau einen* **Fixpunkt** $x^* \in \mathbf{X}$ *, d.h. genau eine Lösung der Gleichung* $x = f(x)$ *. Dabei gilt für jedes* $x_0 \in X$ *und*

$$x_n = f(x_{n-1})\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{0.1}$$

die Beziehung $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ *mit der a-priori Abschätzung*

$$d(x_n, x^*) \le \frac{q^n}{1 - q}\, d(x_1, x_0)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{0.2}$$

Das durch (0.1) beschriebene Verfahren zur näherungsweisen Berechnung einer Lösung der Gleichung $x = f(x)$ nennt man **Methode der sukzessiven Approximation**.

Einen linearen Raum $\mathbf{X}$ über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder der komplexen Zahlen (auch $\mathbb{K}$-Vektorraum genannt) nennt man **normierten Raum**, wenn eine Abbildung $\mathbf{X} \longrightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto \|x\|$ mit folgenden Eigenschaften gegeben ist:

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = \Theta$,

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}\,,$

(N3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}$ (Dreiecksungleichung).

Folgerung 0.5 *In einem normierten Raum* $\mathbf{X}$ *gilt*

$$\Big| \, \|x\| - \|y\| \, \Big| \le \|x - y\| \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}\,.$$

Folgerung 0.6 *Ist* $(\mathbf{X}, \|.\|)$ *ein normierter Raum, so ist* $(\mathbf{X}, d)$ *mit* $d(x,y) = \|x - y\|$ *ein metrischer Raum.*

Wenn dieser zugeordnete metrische Raum vollständig ist, so nennt man $(\mathbf{X}, \|.\|)$ einen **vollständigen normierten Raum** oder **Banachraum**. Der Raum $(\mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ mit einem kompakten metrischen Raum $(\mathbf{E}, d)$ und

$$\|f\|_\infty = \sup\left\{|f(x)| : x \in \mathbf{E}\right\}$$

ist ein Banachraum (vgl. Bsp. 0.2).

Zwei Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ auf einem linearen Raum $\mathbf{X}$ heißen **äquivalent**, wenn positive Konstanten c_1, c_2 existieren, so dass

$$c_1 \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2 \|x\|_1 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}$$

gilt. Auf dem Kreuzprodukt $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ zweier normierter Räume $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{X}})$ und $(\mathbf{Y}, \|.\|_{\mathbf{Y}})$ kann man verschiedene äquivalente Normen definieren, z.B.

$$\|(x,y)\|_p := \left(\|x\|_{\mathbf{X}}^p + \|y\|_{\mathbf{Y}}^p\right)^{\frac{1}{p}}\,, \ p \ge 1\,, \quad \text{oder} \quad \|(x,y)\|_\infty := \max\left\{\|x\|_{\mathbf{X}}\,, \|y\|_{\mathbf{Y}}\right\}\,.$$

Dabei ist $(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$ äquivalent zu $x_n \longrightarrow x$ und $y_n \longrightarrow y$.

Folgerung 0.7 *In einem normierten Raum sind die Abbildungen* $\mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}\,, \ (x,y) \mapsto x + y$ *und* $\mathbb{K} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}\,, \ (\alpha, x) \mapsto \alpha x$ *stetig.*

Es sei $\mathbf{H}$ ein linearer Raum (i.a. über dem Körper der komplexen Zahlen). Eine Abbildung $\mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \ (x,y) \mapsto \langle x, y\rangle$ heißt **Skalarprodukt** oder **inneres Produkt** auf $\mathbf{H}$, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(S1) $\langle x, x\rangle \ge 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}$ und $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \Theta\,,$

(S2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \quad \forall\, x, y \in \mathbf{H}\,,$

(S3) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{H}\,, \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,.$

Es gilt die **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$|\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \quad \forall\, x, y \in \mathbf{H}\,. \tag{0.3}$$

Unter Verwendung dieser Ungleichung kann man zeigen, dass durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{0.4}$$

eine Norm auf $\mathbf{H}$ definiert wird. Ein Raum $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ mit Skalarprodukt heißt **Hilbertraum**, wenn $(\mathbf{H}, \|.\|)$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ein Banachraum ist.

Folgerung 0.8 *Es sei* $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ *ein Raum mit Skalarprodukt.*

(a) *Die Abbildung* $\mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ *ist stetig.*

(b) *Ist* $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$, *so ist*
$$\mathbf{L}^\perp := \{x \in \mathbf{H} : \langle x,y \rangle = 0 \ \forall\, y \in \mathbf{L}\}$$
ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{H}$.

Folgerung 0.9 *Es sei* $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ *ein Hilbertraum.*

(a) *Ist* $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ *ein abgeschlossener linearer Teilraum von* $\mathbf{H}$, *so lässt sich jedes* $x \in \mathbf{H}$ *auf eindeutige Weise in der Form* $x = y + z$ *mit* $y \in \mathbf{L}$ *und* $z \in \mathbf{L}^\perp$ *darstellen. Dabei gilt*
$$\|x - y\| := \inf\{\|x - w\| : w \in \mathbf{L}\} .$$
Der Vektor y *heißt* **orthogonale Projektion** *von* x *auf* $\mathbf{L}$ *und* $\mathbf{L}^\perp$ **orthogonales Komplement** *zu* $\mathbf{L}$. *Dabei gilt* $\mathbf{L} \cap \mathbf{L}^\perp = \{\Theta\}$. *Man schreibt* $\mathbf{H} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{L}^\perp$ *und sagt, dass* $\mathbf{H}$ *die* **direkte orthogonale Summe** *von* $\mathbf{L}$ *und* $\mathbf{L}^\perp$ *ist.*

(b) *Es sei* $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ *ein linearer Teilraum. Dann gilt* $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{H}$ *genau dann, wenn* **kein** $x^* \in \mathbf{H} \backslash \{\Theta\}$ *existiert, so dass* $\langle x, x^* \rangle = 0$ *für alle* $x \in \mathbf{L}$ *gilt.*

Ein System $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots\} = \{b_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbf{H}$ heißt **linear unabhängig**, wenn jedes endliche Teilsystem linear unabhängig ist. Das System B nennt man ein **Orthonormalsystem** (ONS), wenn $\langle b_j, b_k \rangle = \delta_{jk}$ für alle $j,k = 0,1,2,\ldots$ gilt. Man beachte, dass ein ONS automatisch linear unabhängig ist.

Folgerung 0.10 (Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren) *Es sei* $\{b_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbf{H}$ *ein linear unabhängiges System. Wir setzen*
$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\langle b_0, b_0 \rangle}}\, b_0 .$$
Dann gilt $\langle a_0, a_0 \rangle = 1$. *Wir bestimmen* $\beta_{10} \in \mathbb{C}$ *so, dass*
$$\widetilde{a}_1 = b_1 + \beta_{10} a_0$$
orthogonal zu a_0 *ist, d.h.* $\beta_{10} = -\langle b_1, a_0 \rangle$. *Da* $\widetilde{a}_1 \neq \Theta$ *gilt, können wir*
$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_1 \rangle}}\, \widetilde{a}_1$$
setzen. Sind $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \operatorname{span}\{b_0, \ldots, b_{m-1}\}$ *so bestimmt, dass*
$$\langle a_j, a_k \rangle = \delta_{jk} , \quad j,k = 0,1,\ldots,m-1 ,$$
gilt, so setzen wir
$$\widetilde{a}_m = b_m + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{mk} a_k \quad \textit{mit} \quad \beta_{mk} = -\langle b_m, a_k \rangle$$
und
$$a_m = \frac{1}{\sqrt{\langle \widetilde{a}_m, \widetilde{a}_m \rangle}}\, \widetilde{a}_m .$$
Auf diese Weise erhalten wir ein ONS $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *mit der Eigenschaft*
$$\operatorname{span}\{a_0, \ldots, a_n\} = \operatorname{span}\{b_0, \ldots, b_n\} , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Folgerung 0.11 *Es seien* $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *ein ONS in* $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{L}_m = \operatorname{span}\{e_0, \ldots, e_m\}\,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

und

$$\mathbf{L} = \left\{ \sum_{k=0}^{m} \alpha_k e_k : \alpha_k \in \mathbb{C},\, m = 0, 1, 2, \ldots \right\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{L}_m\,.$$

Dann ist

$$\sum_{k=0}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k$$

die **beste Approximation** *an* $x \in \mathbf{H}$ *durch Elemente aus* $\mathbf{L}_m$. *Die Zahlen* $\gamma_k = \langle x, e_k \rangle$ *werden die* **Fourierkoeffizienten** *von* x *bzgl. des ONS* $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *genannt. Dabei gilt die* **Bessel'sche Ungleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \le \|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

Es ist $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{H}$ *äquivalent zu*

$$\lim_{m\to\infty} \left\| x - \sum_{k=0}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = 0\,, \text{ d.h. } x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k\,,\ \forall\, x \in \mathbf{H}\,,$$

bzw. zur **Parseval'schen Gleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

Im Fall $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{H}$ *nennt man* $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *ein* **vollständiges Orthonormalsystem** (*VONS*) *in* $\mathbf{H}$.

Folgerung 0.12 *Ist* $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *ein VONS im Hilbertraum* $\mathbf{H}$, *so ist die Abbildung* $\mathcal{F} : \mathbf{H} \longrightarrow \ell^2$, $x \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n=0}^{\infty}$ *ein* **isometrischer Isomorphismus**, *den man* **Fouriertransformation** *nennt.*

0.2 Lineare und beschränkte Operatoren

Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ lineare Räume über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder der komplexen Zahlen. Bekanntlich nennen wir eine Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $x \mapsto f(x)$ **linear**, wenn für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ die Beziehung

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

gilt. Oft nennen wir eine solche lineare Abbildung auch **linearen Operator** und schreiben $f(x)$ in der Form Ax. Die Menge aller linearen Operatoren zwischen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ bezeichnen wir mit $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Sie ist mit der Definition

$$(\alpha A + \beta B)x := \alpha(Ax) + \beta(Bx)\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}\,,\ A, B \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\,,$$

selbst wieder ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

Satz 0.13 *Es seien* $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{X}})$ *und* $(\mathbf{Y}, \|.\|_{\mathbf{Y}})$ *zwei normierte Räume über* $\mathbb{K}$ *sowie* $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *ist eine stetige Abbildung.*

(b) $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *ist im Punkt* Θ *stetig.*

(c) *Es existiert eine Konstante* $M \geq 0$ *mit der Eigenschaft*

$$\|Ax\|_{\mathbf{Y}} \leq M\, \|x\|_{\mathbf{X}} \quad \forall\, x \in \mathbf{X}. \tag{0.5}$$

(d) $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *ist gleichmäßig stetig.*

Die Menge der Operatoren $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, für die eine (und somit jede) der Aussagen (a)-(d) des Satzes 0.13 erfüllt ist, bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Definieren wir für $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$

$$\|A\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}} := \sup\left\{\|Ax\| : x \in \mathbf{X},\ \|x\| \leq 1\right\}, \tag{0.6}$$

so wird $(\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \|.\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}})$ zu einem normierten Raum, dem Raum der **beschränkten linearen Operatoren**. Die Zahl $\|A\| = \|A\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}}$ ist die kleinste aller Zahlen M, für die $\|Ax\| \leq M\, \|x\|$ $\forall\, x \in \mathbf{X}$ gilt.

Satz 0.14 $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *ist genau dann ein Banachraum, wenn* $\mathbf{Y}$ *ein Banachraum ist.*

Die Elemente von $L(\mathbf{X}, \mathbb{K})$ nennt man **lineare Funktionale**. Der Raum $(\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{K}), \|.\|_{\mathbf{X}\to\mathbb{K}})$ der linearen stetigen Funktionale heißt **dualer Raum** zu $\mathbf{X}$ und wird mit $\mathbf{X}^*$ bezeichnet.

Lemma 0.15 (Riesz'sches Darstellungstheorem) *Es seien* $(\mathbf{H}, \langle ., . \rangle)$ *ein Hilbertraum und* $f \in \mathbf{H}^*$. *Dann existiert genau ein* $x_f \in \mathbf{H}$, *so dass*

$$f(x) = \langle x, x_f \rangle \quad \forall\, x \in \mathbf{H}.$$

Dabei gilt $\|f\|_{\mathbf{H}^*} = \|x_f\|_{\mathbf{H}}$.

Man kann also $\mathbf{H}^*$ mit $\mathbf{H}$ identifizieren. Dabei ist zu beachten, dass eine Linearkombination $\alpha f + \beta g$, $f, g \in \mathbf{H}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit dem Element $\overline{\alpha}\, x_f + \overline{\beta}\, x_g \in \mathbf{H}$ identifiziert wird.

Für Folgen $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ linearer beschränkter Operatoren unterscheiden wir drei Konvergenzbegriffe:

- **Normkonvergenz**: $\exists\, A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} = 0$
  (in Zeichen: $A = \lim_{n\to\infty} A_n$)
- **starke Konvergenz**: $\exists\, A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\|_{\mathbf{Y}} = 0 \;\; \forall\, x \in \mathbf{X}$
  (in Zeichen: $A_n \longrightarrow A$)
- **schwache Konvergenz**: $\exists\, A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \lim_{n\to\infty} f(A_n x) = f(Ax) \;\; \forall\, x \in \mathbf{X}, \;\; \forall\, f \in \mathbf{Y}^*$
  (in Zeichen: $A_n \rightharpoonup A$)

Satz 0.16 (Banach-Steinhaus) *Es seien* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *Banachräume,* $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ *eine in* $\mathbf{X}$ *dichte Teilmenge und* $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $n \in \mathbb{N}$. *Die Folge* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert genau dann stark, wenn* $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ *für jedes* $x \in \mathbf{X}_0$ *eine Cauchyfolge und die Zahlenfolge* $(\|A_n\|)_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt sind.*

Es seien $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ normierte Räume über dem Zahlenkörper $\mathbb{K}$ und $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $B \in L(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$. Unter dem Produkt BA der Operatoren A und B versteht man die Abbildung $BA : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Z}$, $x \mapsto (B \circ A)x = B(Ax)$, d.h. die Verknüpfung der beiden Abbildungen $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ und $B : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$. Offenbar ist dann auch $BA \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$. Folgendes ist leicht einzusehen:

- Ist außerdem $C \in L(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$, so gilt $C(BA) = (CB)A$.
- Sind $A, A_1, A_2 \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ und $B, B_1, B_2 \in L(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ sowie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, so gilt
$$B(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \alpha_1(BA_1) + \alpha_2(BA_2)$$
und
$$(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)A = \alpha_1(B_1 A) + \alpha_2(B_2 A).$$
- Sind $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ und $B \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, so gilt auch $BA \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$, wobei
$$\|BA\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Z}} \le \|B\|_{\mathbf{Y}\to\mathbf{Z}} \|A\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}} .$$
- Die Abbildung $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \times \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$, $(A, B) \mapsto BA$ ist stetig.

Beschreibt der Operator $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ eine bijektive Abbildung, so bezeichnen wir mit $A^{-1} : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ den Operator, der die entsprechende Umkehrabbildung realisiert. Es gilt dann also $A^{-1}A = I_{\mathbf{X}}$ und $AA^{-1} = I_{\mathbf{Y}}$, wobei $I_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, $x \mapsto x$ die identische Abbildung in $\mathbf{X}$ ist. In diesem Fall nennen wir den Operator $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ **invertierbar** und $A^{-1} : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ den zu A **inversen Operator**.

Lemma 0.17 *Ist $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ invertierbar, so ist $A^{-1} \in L(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$.*

Mit $N(A)$ bezeichnen wir den **Nullraum** des linearen Operators A (auch **Kern** von A genannt),
$$N(A) = \{x \in \mathbf{X} : Ax = \Theta_{\mathbf{Y}}\} .$$

Lemma 0.18 *Ein Operator $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ realisiert genau dann eine injektive Abbildung $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, wenn $N(A) = \{\Theta_{\mathbf{X}}\}$ gilt.*

Gilt $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$, so nennen wir den Operator $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ **stetig invertierbar**. Die Menge der stetig invertierbaren Operatoren $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{GL}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Satz 0.19 *Ist $\mathbf{X}$ ein Banachraum, so ist $I_{\mathbf{X}} - E \in \mathcal{GL}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ für alle $E \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ mit $\|E\| < 1$. Dabei gilt*
$$(I_{\mathbf{X}} - E)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} E^n \quad \text{und} \quad \left\|(I_{\mathbf{X}} - E)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|E\|} .$$

Folgerung 0.20 *Sind $\mathbf{X}$ oder $\mathbf{Y}$ ein Banachraum, so ist $\mathcal{GL}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.*

Satz 0.21 (Banach) *Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume. Realisiert der Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ eine bijektive Abbildung $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, so ist er stetig invertierbar.*

Es sei $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum des normierten Raumes $\mathbf{X}$. Dann wird auf $\mathbf{X}$ durch "$x \sim y \iff x - y \in \mathbf{M}$" eine Äquivalenzrelation definiert. Die entsprechenden Äquivalenzklassen sind von der Form

$$[x]_\sim = x + \mathbf{M} := \{x + z : z \in \mathbf{M}\} , \quad x \in \mathbf{X} .$$

Die Menge aller dieser Äquivalenzklassen heißt **Faktorraum** von $\mathbf{X}$ bez. $\mathbf{M}$ und wird mit $\mathbf{X}/\mathbf{M}$ bezeichnet. Wir definieren

$$\|[x]_\sim\| = \|[x]_\sim\|_{\mathbf{X}/\mathbf{M}} := \inf \{\|x + z\|_{\mathbf{X}} : z \in \mathbf{M}\} , \quad x \in \mathbf{X} ,$$

und

$$\alpha[x]_\sim + \beta[y]_\sim := [\alpha x + \beta y]_\sim , \quad x, y \in \mathbf{X}, \, \alpha, \beta \in \mathbb{K} .$$

Man nennt eine Abbildung zwischen metrischen Räumen eine **offene Abbildung**, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist.

Satz 0.22 *Für die obige Konstruktion gelten folgende Aussagen:*

(a) $\left(\mathbf{X}/\mathbf{M}, \|.\|_{\mathbf{X}/\mathbf{M}}\right)$ *ist ein normierter Raum.*

(b) *Ist* $\mathbf{X}$ *ein Banachraum, so auch* $\mathbf{X}/\mathbf{M}$.

(c) *Die Faktorabbildung* $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}/\mathbf{M}$, $x \mapsto [x]_\sim$ *ist stetig und offen.*

Beispiel 0.23 *Es seien* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *und* $\mathbf{M} = N(A)$. *Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : \mathbf{X}/\mathbf{M} \longrightarrow A(\mathbf{X}) , \; [x]_\sim \mapsto Ax$$

linear, stetig und bijektiv.