Prüfungskomplexe zur Vorlesung Hilbertraummethoden

1. Beschreiben Sie geometrische Eigenschaften des Hilbertraumes. (Satz 1.1) Wann nennt man einen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ selbstadjungiert, wann positiv? Zeigen Sie, dass untere und obere Schranke des Spektrums eines selbstadjungierten Operators zu seinem Spektrum gehören und dass jede beschränkte und monotone Folge selbstadjungierter Operatoren stark konvergiert. (Sätze 2.7 und 2.8)

2. Erläutern Sie den Begriff des linearen und beschränkten Operators und das Riesz'sche Darstellungstheorem. (Abschnitt 1.2) Was versteht man unter einem Orthoprojektor? Beweisen Sie Eigenschaften von Folgen und Reihen von Orthoprojektoren. (Folgerung 2.13 und Satz 2.14)

3. Was sind isometrische bzw. unitäre Operatoren? Zeigen Sie, dass jeder isometrische Operator invertierbar und linear ist. Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass ein Operator $V \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ eine partielle Isometrie ist, und begründen Sie Ihre Aussage. (Folgerung 2.22 und Satz 2.25)

4. Wie kann man für eine stetige Funktion f und einen selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ den Operator $f(A)$ definieren? (Satz 3.1 und Satz 3.2) Beweisen Sie eine der Eigenschaften (a), (b) oder (c) von $f(A)$ aus Satz 3.2.

5. Wie kann man $\sqrt{A}$ und $|A|$ definieren? (Folgerungen 3.5 und 3.7) Unter welcher Voraussetzung ist das Produkt zweier positiver Operatoren positiv? Begründen Sie Ihre Aussage. (Folgerung 3.6) Zeigen Sie, dass für jeden Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ genau eine Polarzerlegung $A = V\sqrt{A^*A}$ mit einer partiellen Isometrie $V \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ und $N(A) \subset N(V)$ existiert. (Satz 3.8)

6. Beschreiben Sie die Konstruktion der Spektralschar E_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, zu einem gegebenen selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ und beweisen Sie deren grundlegende Eigenschaften aus den Sätzen 3.10 und 3.15.

7. Definieren Sie das Riemann-Stieltjes-Integral bezüglich einer Spektralschar und begründen Sie, weshalb jede stetige Funktion gleichmäßig Riemann-Stieltjes-integrierbar ist. (Satz 3.18) Erläutern Sie die grundlegenden Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals und beweisen Sie die Formel
$$f(A) = \int_a^{b-0} f(\lambda)\, dE_\lambda \,.$$
(1.-5. in Abschnitt 3.2 und Satz 3.19)

8. Zeigen Sie die grundlegenden Eigenschaften des Spektrums eines kompakten Operators. (Satz 3.23 und Folgerung 3.24) Wie kann man daraus die Spektraldarstellung eines kompakten Operators ableiten? (Satz 3.25)

9. Wie definiert man den Begriff eines im Allgemeinen unbeschränkten linearen Operators? Was versteht man unter einer Einschränkung bzw. einer Erweiterung eines solchen Operators? Definieren Sie den adjungierten Operator zu einem Operator $A \in L(\mathbf{H})$ sowie Resolventenmenge und Spektrum von $A \in L(\mathbf{H})$. Zeigen Sie, dass die Resolventenmenge stets offen ist. (Satz 4.4) Geben Sie äquivalente Bedingungen für die Symmetrie und die Selbstadjungiertheit eines Operators $A \in L(\mathbf{H})$ an und begründen Sie Ihre Aussagen. (Satz 4.6)

10. Wie definiert man für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und eine linksseitig stetige Spektralschar E_λ das Integral $J(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda$. Zeigen Sie, dass $J(f)$ stets selbstadjungiert ist, und dass $J(f) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ gilt, falls f beschränkt ist. (Satz 4.12)

11. Definieren Sie die Differentialoperatoren A_r^0 und A_r. Zeigen Sie, dass $(A_r^0)^* = A_r$ und $A_r^* = \overline{A_r^0}$ gilt. Was ist das Definitionsgebiet von $\overline{A_r^0}$? Begründen Sie Ihre Aussage. (Satz 5.6,(c),(d))