Skript zur Vorlesung

Hilbertraum-Methoden

SoSe 2018

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] N. I. Achieser, I. M. Glasmann, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum*, Akademie-Verlag, Berlin, 1975.

[2] S. Brehmer, *Hilbert-Räume und Spektralmaße*, Akademie-Verlag, Berlin, 1979.

[3] P. Junghanns, Funktionalanalysis - Skript zur Vorlesung WS 2015/16, http://www-user.tu-chemnitz.de/~peju/skripte/lehre/fa.html

[4] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I, Functional Analysis*, Academic Press, 1980.

[5] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teil I, Grundlagen*, B. G. Teubner, 2000.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Der Hilbertraum

Es sei $\mathbf{H}$ ein linearer Raum (i.a. über dem Körper der komplexen Zahlen). Eine Abbildung $\mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ heißt **Skalarprodukt** oder **inneres Produkt** auf $\mathbf{H}$, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(S1) $\langle x,x \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}$ und $\langle x,x \rangle = 0 \iff x = \Theta$,

(S2) $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle} \quad \forall\, x,y \in \mathbf{H}$,

(S3) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x,z \rangle + \beta \langle y,z \rangle \quad \forall\, x,y,z \in \mathbf{H},\ \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{C}$.

Es gilt die **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$|\langle x,y \rangle| \leq \sqrt{\langle x,x \rangle}\sqrt{\langle y,y \rangle} \quad \forall\, x,y \in \mathbf{H}. \tag{1.1}$$

Unter Verwendung dieser Ungleichung kann man zeigen, dass

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} \tag{1.2}$$

eine Norm auf $\mathbf{H}$ ist. Ein linearer Raum $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ mit Skalarprodukt heißt **Hilbertraum**, wenn $(\mathbf{H}, \|.\|)$ ein Banachraum ist, d.h., wenn der metrische Raum $(\mathbf{H}, d)$ mit $d(x,y) := \|x-y\|$ vollständig ist. Wir werden uns im Weiteren vorwiegend mit unendlichdimensionalen Hilberträumen befassen, für die also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein linear unabhängiges System mit n Elementen existiert.

Satz 1.1 *Es sei $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ ein Hilbertraum.*

(a) *Die Abbildung $\langle .,. \rangle : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ ist stetig.*

(b) *Ist $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ ein linearer Teilraum von $\mathbf{H}$, so ist*

$$\mathbf{L}^\perp := \{x \in \mathbf{H} : \langle x,y \rangle = 0\ \forall\, y \in \mathbf{L}\}$$

ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{H}$. Dabei gilt $\mathbf{L} \cap \mathbf{L}^\perp = \{\Theta\}$.

(c) *Es sei $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{H}$. Dann lässt sich jedes $x \in \mathbf{H}$ auf eindeutige Weise in der Form $x = y + z$ mit $y \in \mathbf{L}$ und $z \in \mathbf{L}^\perp$ darstellen. Dabei gilt*

$$\|x-y\| = \inf\{\|x-w\| : w \in \mathbf{L}\}.$$

Der Vektor y heißt **orthogonale Projektion** *von x auf $\mathbf{L}$. Man schreibt $\mathbf{H} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{L}^\perp$ und nennt $\mathbf{L}^\perp$ das* **orthogonale Komplement** *zu $\mathbf{L}$ in $\mathbf{H}$.*

(d) *Es sei* $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ *ein linearer Teilraum. Dann gilt* $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{H}$ *genau dann, wenn aus* $x^* \in \mathbf{H}$ *und* $\langle x^*, x \rangle = 0 \; \forall \, x \in \mathbf{L}$ *folgt* $x^* = \Theta$.

Ein System $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}_0\} = \{b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots\} =: \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{H}$ heißt **linear unabhängig**, wenn jedes endliche Teilsystem linear unabhängig ist. Das System B nennt man ein **Orthonormalsystem** (ONS), wenn $\langle b_j, b_k \rangle = \delta_{jk}$ für alle $j, k = 0, 1, 2, \ldots$ gilt. Man beachte, dass ein ONS automatisch linear unabhängig ist.

Folgerung 1.2 (Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren) *Es sei* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ein linear unabhängiges System. Wir setzen*

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\langle b_0, b_0 \rangle}} \, b_0 \, .$$

Dann gilt $\langle a_0, a_0 \rangle = 1$. *Wir bestimmen* $\beta_{10} \in \mathbb{C}$ *so, dass*

$$\widetilde{a}_1 = b_1 + \beta_{10} a_0$$

orthogonal zu a_0 *ist, d.h.* $\beta_{10} = - \langle b_1, a_0 \rangle$. *Da* $\widetilde{a}_1 \neq \Theta$ *gilt, können wir*

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_1 \rangle}} \, \widetilde{a}_1$$

setzen. Sind $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \operatorname{span} \{b_0, \ldots, b_{m-1}\}$ *so bestimmt, dass*

$$\langle a_j, a_k \rangle = \delta_{jk} \, , \quad j, k = 0, 1, \ldots, m-1 \, ,$$

gilt, so setzen wir

$$\widetilde{a}_m = b_m + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{mk} a_k \quad \textit{mit} \quad \beta_{mk} = - \langle b_m, a_k \rangle$$

und

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{\langle \widetilde{a}_m, \widetilde{a}_m \rangle}} \, \widetilde{a}_m \, .$$

Auf diese Weise erhalten wir ein ONS $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *mit der Eigenschaft*

$$\operatorname{span} \{a_0, \ldots, a_n\} = \operatorname{span} \{b_0, \ldots, b_n\} \, , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Folgerung 1.3 (Fouriertransformation) *Sind* $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ein ONS in* $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{L}_m = \operatorname{span} \{e_0, \ldots, e_m\} \, , \quad m = 0, 1, 2, \ldots \, ,$$

und

$$\mathbf{L} = \overline{\left\{ \sum_{k=0}^{m} \alpha_k e_k : \alpha_k \in \mathbb{C}, \, m = 0, 1, 2, \ldots \right\}} \, ,$$

dann ist

$$\sum_{k=0}^{m} \langle x, e_k \rangle \, e_k$$

die **beste Approximation** *an* $x \in \mathbf{H}$ *durch Elemente aus* $\mathbf{L}_m$. *Die Zahlen* $\gamma_k = \langle x, e_k \rangle$ *werden die* **Fourierkoeffizienten** *von* x *bzgl. des ONS* $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ *genannt. Dabei gilt die* **Bessel'sche Ungleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall \, x \in \mathbf{H} \, .$$

Ist $\mathbf{L} = \mathbf{H}$, *so gilt*

$$\lim_{m\to\infty} \left\| x - \sum_{k=0}^{m} \langle x, e_k\rangle \, e_k \right\| = 0\,, \text{ d.h. } x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k\rangle \, e_k\,, \ \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

In diesem Fall gilt die **Parseval'sche Gleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,,$$

und man nennt $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ein* **vollständiges Orthonormalsystem** (*VONS*) *in* $\mathbf{H}$ *und die Abbildung* $\mathcal{F} : \mathbf{H} \longrightarrow \ell^2$, $x \mapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n=0}^{\infty}$ **Fouriertransformation**.

- Nach Satz 1.1,(d) ist ein ONS $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ genau dann vollständig, wenn aus $x \in \mathbf{H}$ und $\langle x, e_n\rangle = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ folgt $x = \Theta$.
- Ist $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein ONS und gilt für alle $x \in \mathbf{H}$ die Parseval'sche Gleichung, so ist $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein VONS.

Beispiel 1.4 *Der Raum der quadratisch summierbaren Zahlenfolgen*

$$\ell^2 = \left\{ x = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} : \xi_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty \right\}$$

versehen mit dem inneren Produkt

$$\langle x, y\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n}\,, \quad x = (\xi_n)_{n=0}^{\infty}\,,\ y = (\eta_n)_{n=0}^{\infty}\,,$$

ist ein Hilbertraum (*vgl. [3, Folg. 0.8]*). *Das System* $\{x_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ *mit* $x_k = (\delta_{nk})_{n=0}^{\infty}$ *ist VONS in* $\left(\ell^2, \langle .,.\rangle_{\ell^2}\right)$. *Ist* $(\mathbf{H}, \langle .,.\rangle)$ *ein Hilbertraum mit dem VONS* $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, *so ist die oben beschriebene Fouriertransformation* $\mathcal{F} : \mathbf{H} \longrightarrow \ell^2$ *wegen der Parseval'schen Gleichung ein isometrischer Isomorphismus.*

Beispiel 1.5 *Wir betrachten den Hilbertraum* $\mathbf{L}^2(-1,1)$ *der Klassen quadratisch summierbarer Funktionen* $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit dem inneren Produkt*

$$\langle f, g\rangle = \langle f, g\rangle_{\mathbf{L}^2(-1,1)} = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\, dt\,.$$

Das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren, angewendet auf das linear unabhängige System $\{b_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *mit* $b_n(t) = t^n$, *führt auf das VONS* $\{L_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *der normierten* **Legendre-Polynome** $L_n(t)$.

1.2 Lineare und beschränkte Operatoren

Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ lineare Räume über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder der komplexen Zahlen. Bekanntlich nennen wir eine Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $x \mapsto f(x)$ **linear**, wenn für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ die Beziehung

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

gilt. Oft nennen wir eine solche lineare Abbildung auch linearen Operator und schreiben $f(x)$ in der Form Ax. Die Menge aller linearen Operatoren zwischen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ bezeichnen wir mit $L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Sie ist mit der Definition

$$(\alpha A+\beta B)x=\alpha(Ax)+\beta(Bx)\,,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{K}\,,\ A,B\in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})\,,$$

selbst wieder ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

Satz 1.6 *Es seien* $(\mathbf{X},\|.\|_{\mathbf{X}})$ *und* $(\mathbf{Y},\|.\|_{\mathbf{Y}})$ *zwei normierte Räume über* $\mathbb{K}$ *sowie* $A\in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. *Die Abbildung* $A:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}$, $x\mapsto Ax$ *ist genau dann stetig, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(a) $A:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}$ *ist gleichmäßig stetig.*

(b) $A:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}$ *ist im Punkt* $\Theta\in\mathbf{X}$ *stetig.*

(c) *Es existiert eine Konstante* $M\in\mathbb{R}$ *mit der Eigenschaft*

$$\|Ax\|_{\mathbf{Y}}\le M\,\|x\|_{\mathbf{X}}\quad\forall\,x\in\mathbf{X}\,. \tag{1.3}$$

Wenn es nicht zu Missverständnissen kommen kann, verzichten wir im Weiteren auf die Indizierung der Normen. Die Menge der Operatoren $A\in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, für die eine (und somit jede) der Aussagen (a)-(d) des Satzes 1.6 erfüllt ist, bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Definieren wir für $A\in\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})}:=\sup\left\{\|Ax\|:x\in\mathbf{X},\ \|x\|\le 1\right\}\,, \tag{1.4}$$

so wird $\big(\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\|.\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})}\big)$ zu einem normierten Raum, dem Raum der **beschränkten linearen Operatoren**. Im Fall $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$ schreiben wir $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ statt $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{X})$.

Satz 1.7 ([3], Satz 1.5, Satz 1.30) *Der Raum* $(\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\|.\|_{\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}})$ *ist genau dann ein Banachraum, wenn* $\mathbf{Y}$ *ein Banachraum ist.*

Für $A\in\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ ist der **Nullraum** $N(A):=\{x\in\mathbf{X}:Ax=\Theta\}$ von A stets ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{X}$. Das **Bild** $\{Ax:x\in\mathbf{X}\}$ ist ein linearer Teilraum von $\mathbf{Y}$ und wird mit $R(A)$ bezeichnet. Die Elemente von $L(\mathbf{X},\mathbb{K})$ nennt man **lineare Funktionale**. Der Raum $\big(\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbb{K}),\|.\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbb{K})}\big)$ der linearen stetigen Funktionale heißt **dualer Raum** zu $\mathbf{X}$ und wird mit $\mathbf{X}^*$ bezeichnet.

Theorem 1.8 (Riesz'sches Darstellungstheorem) *Es seien* $\mathbf{H}$ *ein Hilbertraum und* $f\in\mathbf{H}^*$. *Dann existiert genau ein* $x_f\in\mathbf{H}$, *so dass*

$$f(x)=\langle x,x_f\rangle\quad\forall\,x\in\mathbf{H}\,.$$

Dabei gilt $\|f\|_{\mathbf{H}^*}=\|x_f\|_{\mathbf{H}}$.

Man kann also $\mathbf{H}^*$ mit $\mathbf{H}$ über die Abbildung $f\mapsto x_f$ identifizieren. Dabei gilt für $f,g\in\mathbf{H}^*$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ die Zuordnung $\alpha f+\beta g\mapsto\overline{\alpha}\,x_f+\overline{\beta}\,x_g$.

Kapitel 2

Spezielle Klassen von Operatoren

2.1 Selbstadjungierte Operatoren

Für $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist $A^* \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ definiert durch

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \forall\, x, y \in \mathbf{H}\,.$$

Dabei gilt $(A^*)^* = A$ und $\|A\| = \|A^*\|$. Wir nennen $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ **selbstadjungiert**, wenn $A^* = A$ gilt. Im Weiteren sei, falls nichts Anderes gesagt wird, $\mathbf{H}$ ein Hilbertraum über dem Körper der komplexen Zahlen.

Satz 2.1 *Der Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in \mathbf{H}$ gilt.*

Satz 2.2 *Ist $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ selbstadjungiert, so gilt*

$$\|A\| = \sup\left\{ |\langle Ax, x \rangle| : x \in \mathbf{H},\ \|x\| = 1 \right\}\,.$$

Da für selbstadjungierte Operatoren $A, B \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ gilt $(A\,B)^* = B^* A^* = B\,A$, ist das Produkt zweier selbstadjungierter Operatoren genau dann selbstadjungiert, wenn sie vertauschbar sind, d.h., wenn $B\,A = A\,B$ ist. Wir nennen $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ invertierbar, wenn $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ existiert. In diesem Fall gilt $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$. Das **Spektrum** $\sigma(A)$ des Operators A ist die Menge der $\lambda \in \mathbb{C}$, für die der Operator $A - \lambda I$ nicht invertierbar ist. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert** von A , wenn $N(A - \lambda I) \neq \{\Theta\}$, und ein $x \in N(A - \lambda I) \setminus \{\Theta\}$ **Eigenvektor** zum Eigenwert λ . Mit $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ bezeichnen wir die sogenannte **Resolventenmenge** des Operators $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$.

- Es gilt $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \|A\|\}$. Die Resolventenmenge ist offen und somit das Spektrum kompakt. Das ergibt sich aus der Tatsache, dass die Menge $G\mathcal{L}(\mathbf{H})$ der invertierbaren Operatoren offen ist in $\mathcal{L}(\mathbf{H})$. Ist nämlich $E \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ mit $\|E\| < 1$, so gilt $(I - E)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} E^n$. Für beliebige $A, E \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ mit $\|E\| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1}$ folgt die Invertierbarkeit von $A + E$ dann aus $A + E = A(I + A^{-1}E)$ und $\left\|A^{-1}E\right\| < 1$. Insbesondere sieht man damit, dass $A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$ für $|\lambda| > \|A\|$ invertierbar ist, d.h.,

  $$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \|A\|\}\,.$$

  Sind nun $\lambda \in \rho(A)$ und $0 < |\varepsilon| < \left(\left\|A - \lambda I)^{-1}\right\|\right)^{-1}$, so folgt die Invertierbarkeit von $A - (\lambda + \varepsilon)I = (A - \lambda I)\left[I - \varepsilon(A - \lambda I)^{-1}\right]$, also $\lambda + \varepsilon \in \rho(A)$.

Wir bemerken, dass für einen linearen Teilraum $\mathbf{H}_0 \subset \mathbf{H}$ stets $\left(\mathbf{H}_0^\perp\right)^\perp = \overline{\mathbf{H}}_0$ gilt.

Satz 2.3 *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$.*

(a) *Es gilt $N(A^*) = R(A)^\perp$ und $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$.*

(b) *$A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist genau dann invertierbar, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass*

$$\|A\,x\| \geq \varepsilon\,\|x\| \quad \text{und} \quad \|A^*x\| \geq \varepsilon\,\|x\| \quad \forall\, x \in \mathbf{H}$$

gilt.

(c) *Ein selbstadjungierter Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist also genau dann invertierbar, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass*

$$\|A\,x\| \geq \varepsilon\,\|x\| \quad \forall\, x \in \mathbf{H}$$

gilt.

(d) *Für einen selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander orthogonal. Ferner gilt $\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$ mit*

$$m_A = \inf\{\langle Ax, x\rangle : x \in \mathbf{H},\, \|x\| = 1\} \quad \text{und} \quad M_A = \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in \mathbf{H},\, \|x\| = 1\}\ .$$

Definition 2.4 *Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ heißt* **positiv**, *wenn $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbf{H}$ gilt.*

Wegen Satz 2.1 ist also jeder positive Operator selbstadjungiert. Für zwei selbstadjungierte Operatoren $A, B \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ schreiben wir $A \leq B$ bzw. $B \geq A$, wenn $B - A$ positiv ist, also $\langle A\,x, x\rangle \leq \langle B\,x, x\rangle$ für alle $x \in \mathbf{H}$ erfüllt ist.

Satz 2.5 *Für einen positiven Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ gilt*

$$|\,\langle A\,x, y\rangle\,|^2 \leq \langle A\,x, x\rangle\,\langle A\,y, y\rangle\ , \quad x, y \in \mathbf{H}$$

(**verallgemeinerte Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**).

Satz 2.6 *Sind $A, B, C \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ selbstadjungierte Operatoren und $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, so gilt:*

(a) $A \leq B\,,\ B \leq C \Longrightarrow A \leq C$

(b) $A \leq B \Longrightarrow A + C \leq B + C$

(c) $A \leq B\,,\ B \leq A \Longrightarrow A = B$

(d) $A \geq \Theta \Longrightarrow T^*A\,T \geq \Theta$

(e) $A \geq \Theta \Longrightarrow A^n \geq \Theta\,,\ n \in \mathbb{N}$

(f) $\gamma \in \mathbb{R}\,,\ \Theta \leq A \leq \gamma I \Longrightarrow A^2 \leq \gamma\,A$

Aus $m_A I \leq A \leq M_A I$ folgt $0 \leq A - m_A I \leq (M_A - m_A)I$, also

$$(A - m_A I)^2 \leq (M_A - m_A)(A - m_A I) = (M_A I - A)(A - m_A I) + (A - m_A I)^2$$

und somit $(M_A I - A)(A - m_A I) \geq \Theta$.

Satz 2.7 *Ist $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ selbstadjungiert, so gilt $m_A, M_A \in \sigma(A)$ (vgl. Satz 2.3).*

Eine Folge von Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ nennt man **stark konvergent**, wenn ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ existiert, so dass $\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0 \ \forall\, x \in \mathbf{H}$ gilt. Man schreibt dann auch $A_n \longrightarrow A$.

Eine Folge von Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ heißt **beschränkt**, wenn die Zahlenfolge $(\|A_n\|)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist. Eine Folge selbstadjungierter Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $n \in \mathbb{N}$, nennen wir **monoton**, wenn entweder $A_n \le A_{n+1} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ oder $A_n \ge A_{n+1} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 2.8 *Jede beschränkte und monotone Folge selbstadjungierter Operatoren ist stark konvergent.*

Man beachte: Der starke Grenzwert einer Folge selbstadjungierter Operatoren ist selbstadjungiert, was durch Grenzübergang in der Gleichung $\langle A_n x, y\rangle = \langle x, A_n y\rangle$ zu sehen ist.

- Für eine stetige Funktion $k : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir den Operator $K : \mathbf{L}^2(0,1) \longrightarrow \mathbf{L}^2(0,1)$ mit
$$(Kx)(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)\,ds\,.$$
Im Fall $\overline{k(t,s)} = k(s,t)$, $(t,s) \in [0,1]^2$ ist dieser Operator selbstadjungiert. Dabei gilt $\|K\| \le \sup\left\{|k(t,s)| : (t,s) \in [0,1]^2\right\}$. Ist $k(t,s)$ von der Form
$$k(t,s) = \sum_{r=1}^{N} \overline{g_r(t)}g_r(s)$$
mit stetigen Funktionen $g_r : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, so ist K positiv.

- Das Spektrum des Verschiebungsoperators
$$V : \ell^2 \longrightarrow \ell^2\,, \quad (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (0, \xi_0, \xi_1, \ldots)$$
ist gleich der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$.

2.2 Orthoprojektoren

Nach Satz 1.1 existiert zu jedem abgeschlossenen linearen Teilraum $\mathbf{M} \subset \mathbf{H}$ eines Hilbertraumes $\mathbf{H}$ das orthogonale Komplement $\mathbf{M}^\perp$, so dass $\mathbf{H} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{M}^\perp$. Jedes $x \in \mathbf{H}$ lässt sich dann auf eindeutige Weise in der Form $x = x_{\mathbf{M}} + x_{\mathbf{M}^\perp}$ mit $x_{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}$ und $x_{\mathbf{M}^\perp} \in \mathbf{M}^\perp$ darstellen. Der durch $P_{\mathbf{M}}x = x_{\mathbf{M}}$ definierte Operator $P_{\mathbf{M}} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ heißt **Orthoprojektor** von $\mathbf{H}$ auf $\mathbf{M}$.

Folgerung 2.9 *Für $P = P_{\mathbf{M}}$ gilt $P^2 = P$ und $\|P\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} = 1$, falls $P \ne \Theta$ (d.h. $P \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$).*

Folgerung 2.10 *Ein linearer Operator $P : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ ist genau dann ein Orthoprojektor, wenn für alle $x, y \in \mathbf{H}$ gilt*
$$\left\langle P^2 x, y\right\rangle = \langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle\,,$$
also genau dann, wenn $P^2 = P$ und $P^* = P$.

Ist P Orthoprojektor, so gilt
$$\Theta \le P \le I\,.$$

Außerdem haben wir
$$x = Px \iff \|x\| = \|Px\|\,.$$

Satz 2.11 *Es seien $P_{\mathbf{L}}, P_{\mathbf{M}} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ zwei Orthoprojektoren.*

(a) *Das Produkt* $P_{\mathbf{L}}P_{\mathbf{M}}$ *ist genau dann ein Projektor, wenn* $P_{\mathbf{L}}P_{\mathbf{M}} = P_{\mathbf{M}}P_{\mathbf{L}}$ *gilt. In diesem Fall ist* $P_{\mathbf{L}}P_{\mathbf{M}} = P_{\mathbf{L}\cap\mathbf{M}}$.

(b) *Es gilt* $\mathbf{L}\perp\mathbf{M}$ *genau dann, wenn* $P_{\mathbf{L}}P_{\mathbf{M}} = \Theta$.

(c) *Die Summe* $P_{\mathbf{L}} + P_{\mathbf{M}}$ *ist genau dann ein Orthoprojektor, wenn* $\mathbf{L}\perp\mathbf{M}$ *ist.*

(d) *Die Differenz* $P_{\mathbf{L}} - P_{\mathbf{M}}$ *ist genau dann ein Orthoprojektor, wenn* $\mathbf{M} \subset \mathbf{L}$ *erfüllt ist.*

(e) *Die Inklusion* $\mathbf{M} \subset \mathbf{L}$ *ist sowohl äquivalent zu* $\|P_{\mathbf{M}}x\| \le \|P_{\mathbf{L}}x\| \ \forall\, x \in \mathbf{H}$ *als auch äquivalent zu* $P_{\mathbf{M}} \le P_{\mathbf{L}}$.

In Anlehnung an Satz 2.11,(b) nennen wir zwei Orthoprojektoren P und Q **orthogonal**, falls $P\,Q = \Theta$ gilt.

Folgerung 2.12 *Sind* $P_0, P_1, \ldots, P_n$ *Orthoprojektoren, so ist ihre Summe* $P_0 + P_1 + \ldots + P_n$ *genau dann ein Orthoprojektor, wenn sie paarweise orthogonal sind. Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$ *paarweise orthogonaler Orthoprojektoren konvergiert stark gegen einen Orthoprojektor.*

Wir sagen, dass $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ **schwach** gegen $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ konvergiert, falls

$$\lim_{n\to\infty} \langle A_n x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbf{H}$$

gilt.

Satz 2.13 *Es sei* $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge von Orthoprojektoren* $P_n : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$.

(a) *Ist diese Folge* $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ *monoton, so konvergiert sie stark gegen einen Orthoprojektor* $P : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$.

(b) *Konvergiert die Folge* $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ *schwach gegen einen Orthoprojektor, so konvergiert sie auch stark.*

Unter der **Öffnung** zweier linearer Teilräume $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \subset \mathbf{H}$ versteht man die Zahl

$$\mathcal{O}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) := \|P_2 - P_1\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} \ ,$$

wobei $P_j = P_{\overline{\mathbf{M}}_j}$, $j = 1, 2$.

Folgerung 2.14 *Für zwei lineare Teilräume* $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \subset \mathbf{H}$ *gilt*

(a) $\mathcal{O}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \mathcal{O}(\overline{\mathbf{M}}_1, \overline{\mathbf{M}}_2) = \mathcal{O}(\mathbf{M}_1^{\perp}, \mathbf{M}_2^{\perp})$,

(b) $\mathcal{O}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = \max\left\{ \sup_{x\in\overline{\mathbf{M}}_2, \|x\|=1} \|(I - P_1)x\| \, , \sup_{y\in\overline{\mathbf{M}}_1, \|y\|=1} \|(I - P_2)y\| \right\}$.

Satz 2.15 *Ist die Öffnung zweier linearer Teilräume kleiner als 1, so haben beide Räume gleiche Dimension.*

Definition 2.16 *Einen linearen Teilraum* $\mathbf{M} \subset \mathbf{H}$ *nennen wir* **invarianten Teilraum** *des Operators* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, *falls* $A\,x \in \mathbf{M} \ \forall\, x \in \mathbf{M}$. *Ein linearer Teilraum* $\mathbf{M} \subset \mathbf{H}$ *heißt* **reduzierender Teilraum** *des Operators* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, *wenn* $\mathbf{M}$ *und* $\mathbf{M}^{\perp}$ *invariante Teilräume von* A *sind.*

Sei $P = P_{\overline{M}}$ und $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$.

- $\mathbf{M}$ invariant bzgl. $A \Longrightarrow \overline{M}$ invariant bzgl. $A \iff PAP = AP$
- $\mathbf{M}^\perp$ invariant bzgl. $A \iff PAP = PA \iff \overline{\mathbf{M}}$ invariant bzgl. A^*
- $\overline{\mathbf{M}}$ reduzierend bzgl. $A \iff \overline{\mathbf{M}}$ invariant bzgl. A und A^*
- $A = A^*$: $\overline{\mathbf{M}}$ reduzierend bzgl. $A \iff \overline{\mathbf{M}}$ invariant bzgl. $A \iff PA = AP$
- $\mathbf{M}$ reduzierend bzgl. $A \Longrightarrow Ax = PAPx + (I-P)A(I-P)x \; \forall\, x \in \mathbf{H}$

Beispiel 2.17 *Es sei* $\mathbf{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$. *Für* $x = (\xi_n)_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *definieren wir* $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k t^k$, $t \in \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, *so dass* $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ *und* $\xi_k = \widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathbf{i}s})e^{-\mathbf{i}ks}\,ds$ *gilt, wenn man das innere Produkt in* $\mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ *als* $\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\mathbf{i}s})\overline{g(e^{\mathbf{i}s})}\,ds$ *definiert. Für* $a \in \mathbf{C}(\mathbb{T})$ *sei* $T^o(a) : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ *der durch* $\left(T^o(a)x\right)_j = \widehat{(af)}_j$, $j \in \mathbb{Z}$, *definierte Operator. Dieser ist linear und beschränkt. Außerdem gilt* $T^o(a)x = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{a}_{j-k}\xi_k\right)_{j\in\mathbb{Z}}$, *und* $T^o(a)$ *ist genau dann selbstadjungiert, wenn* $a(t)$ *reellwertig ist. Der Teilraum* $\ell^2_+(\mathbb{Z}) = \left\{x = (\xi_n)_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \xi_k = 0,\, k < 0\right\}$ *ist genau dann ein invarianter Teilraum des Operators* $T^o(a)$, *wenn* $\widehat{a}_k = 0 \;\forall\, k < 0$ *gilt. Der Operator* $T(a) : \ell^2_+(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2_+(\mathbb{Z})$, $x \mapsto P_+T^o(a)x$, *wobei* $P_+\,(\xi_n)_{n=-\infty}^{\infty} = (\ldots, 0, \ldots, 0, \xi_0, \xi_1, \ldots)$, *heißt* **Toeplitz-Operator** *mit dem Symbol* $a(t)$. *(*$\ell^2_+(\mathbb{Z})$ *kann natürlich mit* ℓ^2 *identifiziert werden, vgl. Bsp. 1.4)*

2.3 Isometrische und unitäre Operatoren

Es seien $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ und $(\mathbf{H}_j, \langle .,. \rangle_j)$, $j = 1, 2$, Hilberträume.

Definition 2.18 *Eine surjektive Abbildung* $V : \mathbf{H}_1 \longrightarrow \mathbf{H}_2$ *nennen wir eine* **Isometrie** *oder* **isometrischen Operator**, *wenn*

$$\langle Vx, Vy\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1 \quad \forall\, x, y \in \mathbf{H}_1$$

gilt. Eine Isometrie $U : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ *heißt* **unitärer Operator**.

Folgerung 2.19 *Ein isometrischer Operator ist invertierbar und linear.*

Folgerung 2.20 *Sind* $V \in L(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$, $R(V) = \mathbf{H}_2$ *und* $\langle Vx, Vx\rangle_2 = \langle x, x\rangle_1 \;\forall\, x \in \mathbf{H}_1$, *so ist* $V : \mathbf{H}_1 \longrightarrow \mathbf{H}_2$ *eine Isometrie.*

Definition 2.21 *Man nennt einen Operator* $V \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *eine* **partielle Isometrie** , *falls*

$$\langle Vx, Vx\rangle = \langle x, x\rangle \quad \forall\, x \in N(V)^\perp .$$

Satz 2.22 *Ist* $V \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, *so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *V ist eine partielle Isometrie.*

(b) $V = VV^*V$.

(c) *V^*V ist ein Orthoprojektor.*

Beispiel 2.23 *Es sei* $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ *ein VONS in* $\mathbf{H}$. *Dann ist der Operator*

$$V : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_{n+1} \rangle \, e_n$$

eine partielle Isometrie.

Kapitel 3

Spektraleigenschaften selbstadjungierter und kompakter Operatoren

3.1 Stetige Funktionen selbstadjungierter Operatoren

Mit $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge aller algebraischen Polynome mit reellen Koeffizienten. Ist $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ein selbstadjungierter Operator, so sei $\mathbf{C}_A(\mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : [m_A, M_A] \longrightarrow \mathbb{R}$. Für $f \in \mathbf{C}_A(\mathbb{R})$ setzen wir

$$m_A(f) = \min\{f(t) : m_A \le t \le M_A\}\,, \quad M_A(f) = \max\{f(t) : m_A \le t \le M_A\}$$

und

$$\gamma_A(f) = \max\{|f(t)| : m_A \le t \le M_A\}\,.$$

Weiterhin werden wir die Bezeichnung $\operatorname{comm}(A)$ für die Menge aller Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathbf{H})$, die mit $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ vertauschbar sind, verwenden.

Satz 3.1 *Ist $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ auf dem Spektralintervall $[m_A, M_A]$ des selbstadjungierten Operators $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ nichtnegativ, so gilt $p(A) \ge \Theta$.*

Satz 3.2 *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ selbstadjungiert. Die Abbildung $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $p \mapsto p(A)$ kann auf eindeutige Weise zu einer linearen und multiplikativen Abbildung*

$$\mathbf{C}_A(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})\,, \quad f \mapsto f(A)$$

fortgesetzt werden, die $\|f(A)\| \le \gamma_A(f)$ erfüllt. Dabei gilt für alle Funktionen $f \in \mathbf{C}_A(\mathbb{R})$ und $g \in \mathbf{C}([m_A(f), M_A(f)], \mathbb{R})$

(a) $m_A(f)I \le f(A) \le M_A(f)I$,

(b) $\operatorname{comm}(A) \subset \operatorname{comm}(f(A))$,

(c) $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$.

Bemerkung 3.3 *Die im Satz 3.2 erwähnte Multiplikativität der Abbildung $f \longrightarrow f(A)$ bedeutet, dass für alle $f, g \in \mathbf{C}_A(\mathbb{R})$ gilt $(fg)(A) = f(A)g(A)$.*

Folgerung 3.4 *Die Abbildung $\mathbf{C}_A(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $f \mapsto f(A)$ ist positiv, d.h., $f(t) \ge 0\ \forall\, t \in [m_A, M_A]$ impliziert $f(A) \ge \Theta$.*

Folgerung 3.5 *Zu jedem positiven Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ gibt es genau einen positiven Operator $B \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ mit $B^2 = A$, nämlich $B = \sqrt{A}$.*

Folgerung 3.6 *Sind die positiven Operatoren $A, B \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ vertauschbar, so ist auch AB positiv.*

Folgerung 3.7 *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ selbstadjungiert. Dann sind die Operatoren*

$$|A| \quad \textit{und} \quad A^{\pm} = \frac{1}{2}(|A| \pm A)$$

positive Operatoren, und es gilt

$$|A| = \sqrt{A^2} \quad \textit{und} \quad A^+ A^- = \Theta\,.$$

Es sei bemerkt, dass man $|A| = \sqrt{A^* A}$ für alle Operatoren $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ definieren kann. Für $A^* = A$ fällt diese Definition mit der obigen zusammen.

Satz 3.8 (Polardarstellung) *Zu jedem Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ existiert genau ein Operator $V \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ mit $A = V\sqrt{A^* A}$ und $N(A) \subset N(V)$. Dabei ist der Operator V eine partielle Isometrie, $\sqrt{A^* A} = V^* A$, und $I - V^* V = P_{N(A)}$.*

3.2 Spektralzerlegung selbstadjungierter Operatoren

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $e_\lambda(t) = \begin{cases} 1 & : \quad t < \lambda\,, \\ 0 & : \quad \lambda \le t\,, \end{cases}$ und

$$e_{\lambda,n}(t) = \begin{cases} 1 & : \quad t < \lambda - \frac{1}{n}\,, \\ n(\lambda - t) & : \quad \lambda - \frac{1}{n} \le t \le \lambda\,, \\ 0 & : \quad \lambda < t\,. \end{cases}$$

Dann gilt für einen selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, für $n \in \mathbb{N}$, und für $\lambda \le \mu$ (siehe Folgerung 3.4)

(Ea) $e_{\lambda,n}(A) \le e_{\mu,n}(A)$,

(Eb) $\Theta \le e_{\lambda,n}(A) \le e_{\lambda,n+1}(A) \le I$,

(Ec) $I - e_{\lambda,2n}(A) \le [I - e_{\lambda,n}(A)]^2 \le I - e_{\lambda,n}(A)$.

Satz 2.8 und (Ea) liefern die Existenz eines Operators $E_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ mit

$$e_{\lambda,n}(A) \longrightarrow E_\lambda =: e_\lambda(A)\,. \tag{3.1}$$

Satz 3.9 *Sind $f \in \mathbf{C}_A(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $\lambda \le \mu$, so gilt*

(a) *$a(E_\mu - E_\lambda) \le f(A)(E_\mu - E_\lambda)$, falls $a \le f(t)$, $t \in [\lambda, \mu]$,*

(b) *$f(A)(E_\mu - E_\lambda) \le b(E_\mu - E_\lambda)$, falls $f(t) \le b$, $t \in [\lambda, \mu]$.*

Satz 3.10 *Die Operatoren E_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, sind Orthoprojektoren mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *$E_\lambda = \Theta$ für $\lambda \le m_A$ und $E_\lambda = I$ für $M_A < \lambda$,*

(b) *$(A - \lambda I)E_\lambda \le \Theta \le (A - \lambda I)(I - E_\lambda)$,*

(c) $E_\lambda \le E_\mu$ *für* $\lambda \le \mu$,

(d) $\lambda(E_\mu - E_\lambda) \le A(E_\mu - E_\lambda) \le \mu(E_\mu - E_\lambda)$ *für* $\lambda \le \mu$,

(e) $E_\lambda x = \Theta$, *falls* $A\,x = \lambda x$.

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt: Die Räume* $R(E_\lambda)$ *sind reduzierende Teilräume für jeden Operator* $B \in \operatorname{comm}(A)$.

Satz 3.11 *Zu jedem selbstadjungierten Operator* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *und zu jeder Zahl* $\lambda \in \mathbb{R}$ *gibt es genau einen mit* A *vertauschbaren Orthoprojektor* $E_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *der (b) und (e) von Satz 3.10 erfüllt. Dabei gilt*

$$A(I - E_0) = A^+ , \quad A\,E_0 = -A^- , \tag{3.2}$$

und

$$A(I - 2E_0) = |A| , \quad A = |A|(I - 2E_0) . \tag{3.3}$$

Folgerung 3.12 *Für jeden selbstadjungierten Operator* $B \in \operatorname{comm}(A)$ *mit* $\pm A \le B$ *gilt* $|A| \le B$, *d.h.,* $|A|$ *ist der kleinste selbstadjungierte Operator mit diesen Eigenschaften.*

Folgerung 3.13 *Im Sinne der starken Operatorkonvergenz existieren die einseitigen Grenzwerte*

$$E_{\lambda-0} = \lim_{\mu\uparrow\lambda} E_\mu , \quad E_{\lambda+0} = \lim_{\mu\downarrow\lambda} E_\mu , \quad E_{+\infty} = \lim_{\mu\uparrow+\infty} E_\mu , \quad E_{-\infty} = \lim_{\mu\downarrow-\infty} E_\mu$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, *wobei* $E_{\lambda-0} = E_\lambda \le E_{\lambda+0}$ *gilt.*

Mit $\mathcal{O}(\mathbf{H}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{H})$ bezeichen wir die Menge der Orthoprojektoren in $\mathbf{H}$.

Definition 3.14 *Eine Abbildung* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbf{H})$, $\lambda \longrightarrow E_\lambda$ *nennen wir* **Spektralschar**, *falls* $E_\lambda \le E_\mu$ *für* $\lambda \le \mu$ *und* $E_{-\infty} = \Theta$, $E_\infty = I$. *Diese Schar heißt linksseitig stetig, wenn* $E_{\lambda-0} = E_\lambda$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *erfüllt ist.*

Satz 3.15 *Es seien* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *selbstadjungiert und* $\lambda \longrightarrow E_\lambda$ *die entsprechende, durch* (3.1) *definierte Spektralschar. Dann gilt*

(a) $R(E_{\lambda+0} - E_\lambda) = N(A - \lambda I)\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$,

(b) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A) \iff \exists\, \varepsilon > 0$: $E_\lambda = E_\mu\ \forall\, \mu \in (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$.

Die Zahlen aus $\sigma(A)$, die keine Eigenwerte von A sind, werden Punkte des **stetigen Spektrums** $\sigma_c(A)$ des Operators A genannt, die Menge $\sigma_p(A)$ der Eigenwerte von A heißt dagegen **Punktspektrum**. Folglich gilt $\lambda \in \sigma_c(A)$ genau dann, wenn $E_{\lambda+0} = E_\lambda$ und $E_{\lambda+\varepsilon} \ne E_{\lambda-\varepsilon}$ für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt sind.

Beispiel 3.16 *Es seien* $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(-1, 1)$ *und* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *definiert durch* $(A\,x)(t) = t\,x(t)$. *Wir zeigen, dass dann* $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [-1, 1]$ *gilt.*

Es seien $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $Z = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \mathcal{Z}[a, b]$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und

$$S(f, Z, \mu) = \sum_{j=1}^{n} f(\mu_j) \left(E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}\right)$$

eine entsprechende **Riemann-Stieltjes-Summe** bezüglich der Spektralschar E_λ , wobei $\mu = \{\mu_j : j = 1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_{j-1} \le \mu_j < \lambda_j$. Mit $d(Z) = \max\{|\lambda_j - \lambda_{j-1}| : j = 1, \ldots, n\}$ bezeichnen wir den Durchmesser der Zerlegung Z .

Definition 3.17 *Wir nennen eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$* **Riemann-Stieltjes-integrierbar** *bzw.* **gleichmäßig Riemann-Stieltjes-integrierbar** *auf $[a,b]$ bzgl. E_λ, wenn für jede Folge von Zerlegungen $(Z_m)_{m=1}^\infty$, $Z_m \in \mathcal{Z}[a,b]$, mit $\lim_{m\to\infty} d(Z_m) = 0$ eine beliebige Folge zugehöriger Riemann-Stieltjes-Summen $(S(f, Z_m, \mu^m))_{m=1}^\infty$ in der starken bzw. Normtopologie konvergiert. In diesem Fall setzen wir*

$$\int_a^{b-0} f(\lambda)\, dE_\lambda := \lim_{m\to\infty} S(f, Z_m, \mu^m)$$

und

$$\int_a^b f(\lambda)\, dE_\lambda := \int_a^{b-0} f(\lambda)\, dE_\lambda + f(b)\,(E_{b+0} - E_b)\ .$$

Satz 3.18 *Bezüglich einer linksseitig stetigen Spektralschar E_λ ist jede stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig Riemann-Stieltjes-integrierbar.*

Es sei E_λ eine linksseitig stetige Spektralschar. Wir setzen $\mathcal{J}_a^b(f) := \int_a^{b-0} f(\lambda)\, dE_\lambda$, $f \in \mathbf{C}([a,b],\mathbb{R})$. Für $f, g \in \mathbf{C}([a,b],\mathbb{R})$ sind dann folgende Regeln gültig:

(a) $\mathcal{J}_a^b(f) = \mathcal{J}_a^c(f) + \mathcal{J}_c^b(f)$, $a < c < b$.

(b) $\mathcal{J}_a^b(f)\,(E_d - E_c) = \mathcal{J}_c^d(f)$, $a \le c < d \le b$.

(c) $\mathcal{J}_a^b(f+g) = \mathcal{J}_a^b(f) + \mathcal{J}_a^b(g)$, $\mathcal{J}_a^b(\alpha f) = \alpha \mathcal{J}_a^b(f)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) $\mathcal{J}_a^b(fg) = \mathcal{J}_a^b(f)\mathcal{J}_a^b(g)$.

(e) $\mathcal{J}_a^b(f) \ge \Theta$, falls $f(t) \ge 0\ \forall\, t \in [a,b]$.

Jedem Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ kann man einen **Realteil** $\mathsf{Re}\, A = \frac{1}{2}(A + A^*)$ und einen **Imaginärteil** $\mathsf{Im}\, A = \frac{1}{2\mathbf{i}}(A - A^*)$ zuordnen. Es gilt dann

$$A = \mathsf{Re}\, A + \mathbf{i}\, \mathsf{Im}\, A \quad \text{und} \quad A^* = \mathsf{Re}\, A - \mathbf{i}\, \mathsf{Im}\, A\,.$$

Dabei sind $\mathsf{Re}\, A$ und $\mathsf{Im}\, A$ selbstadjungierte Operatoren. Umgekehrt folgt aus $A = A_1 + \mathbf{i}\, A_2$ mit selbstadjungierten Operatoren $A_j \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, dass $A_1 = \mathsf{Re}\, A$ und $A_2 = \mathsf{Im}\, A$.

Wir nennen einen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ **normal**, wenn $A^*A = A\,A^*$ gilt. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist genau dann normal, wenn $\mathsf{Re}\, A$ und $\mathsf{Im}\, A$ kommutieren, was auch äquivalent ist zu

$$A^*A = A\,A^* = (\mathsf{Re}\, A)^2 + (\mathsf{Im}\, A)^2\,.$$

Für einen selbstadjungierten Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ und eine Funktion $f = f_1 + \mathbf{i}\, f_2 \in \mathbf{C}_A(\mathbb{C})$ mit $f_j \in \mathbf{C}_A(\mathbb{R})$ ist der Operator

$$f(A) = f_1(A) + \mathbf{i}\, f_2(A)$$

wohldefiniert, wobei $f_1(A) = \mathsf{Re}\, f(A)$ und $f_2(A) = \mathsf{Im}\, f(A)$. Außerdem gilt

(a) $f(A)^* = \overline{f}(A)$,

(b) $(\lambda f + \mu g)(A) = \lambda f(A) + \mu g(A)$, $f, g \in \mathbf{C}_A(\mathbb{C})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

(c) $(fg)(A) = f(A)g(A)$, $f, g \in \mathbf{C}_A(\mathbb{C})$.

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ein selbstadjungierter Operator. Definieren wir $e^{\mathbf{i}\,A} = \cos(A) + \mathbf{i}\, \sin(A) =: V$, so folgt $V^*V = V\,V^* = I$, d.h., V ist ein **unitärer Operator**.

Satz 3.19 *Sind $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ selbstadjungiert, $f \in \mathbf{C}[a,b]$, $a \le m_A \le M_A < b$ und E_λ die Spektralschar von A, so gilt*

$$f(A) = \int_a^b f(\lambda)\, dE_\lambda$$

und $\operatorname{comm}(A) = \operatorname{comm}\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3.3 Kompakte Operatoren

Ein linearer Operator $T : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ heißt **kompakt**, wenn er jede beschränkte Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in \mathbf{H}$ in eine präkompakte Folge $(T\,x_n)_{n=1}^{\infty}$ überführt. Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt **präkompakt**, wenn jede Teilfolge von $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge enthält. Die Menge aller linearen und kompakten Operatoren bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(\mathbf{H})$. Es gilt $\mathcal{K}(\mathbf{H}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{H})$, und $\mathcal{K}(\mathbf{H})$ ist eine abgeschlossene Menge (bzgl. der Operatornormtopologie). Sind $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ and $\dim R(T) < \infty$, so ist $T \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$.

Beispiel 3.20 *Ist $h : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Lebesgue-messbare Funktion mit*

$$\iint_{[0,1]^2} |h(t,s)|^2 \, ds \, dt < \infty ,$$

so ist der durch

$$(Tu)(t) = \int_0^1 h(t,s) u(s) \, ds$$

definierte Operator $T : \mathbf{L}^2(0,1) \longrightarrow \mathbf{L}^2(0,1)$ ein kompakter Operator. Das ergibt sich z.B. wie folgt: Mit $\chi_j^{(n)}(t)$ bezeichnen wir die charakteristische Funktion des Intervals $\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, $j = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und Zahlen $\lambda_{jk}^{(n)} \in \mathbb{C}$, so dass

$$\iint_{[0,1]^2} \left| h(t,s) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk}^{(n)} \chi_j^{(n)}(t) \chi_k^{(n)}(s) \right|^2 ds \, dt < \varepsilon^2 .$$

Der Operator $\widetilde{T} : \mathbf{L}^2(0,1) \longrightarrow \mathbf{L}^2(0,1)$ mit

$$(\widetilde{T}u)(t) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk}^{(n)} \chi_j^{(n)}(t) \chi_k^{(n)}(s) u(s) \, ds$$

hat endlichdimensionales Bild (der Bildraum wird von den $\chi_j^{(n)}(t)$ aufgespannt), ist somit kompakt und genügt der Relation $\left\| \widetilde{T} - T \right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}^2(0,1))} < \varepsilon$. Wählen wir also eine Nullfolge (ε_m) positiver Zahlen, so finden wir Operatoren $\widetilde{T}_m \in \mathcal{K}(\mathbf{L}^2(0,1))$, die in der Norm gegen T konvergieren. Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}(\mathbf{L}^2(0,1))$ in der Operatornormtopologie liefert die Kompaktheit des Operators T.

Satz 3.21 *Für $T \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$ ist $R(I - T)$ abgeschlossen.*

Folgerung 3.22 *Sind $T \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so ist $R(T - \lambda I)$ abgeschlossen.*

Satz 3.23 *Für einen Operator $T \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$ gilt:*

(a) *Sind $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\dim N(T - \lambda I) = \infty$, so ist $\lambda = 0$.*

(b) *Der einzig mögliche Häufungspunkt der Menge der Eigenwerte von T ist die Null.*

(c) *Sind $\lambda \in \mathbb{C}$ und $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $x_n \in \mathbf{H}$, eine Punktfolge mit $x_0 \neq \Theta$, $(T - \lambda I)x_0 = \Theta$ und $(T - \lambda I)x_{n+1} = x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, so ist $\lambda = 0$.*

Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(A) $T \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$,

(B) $T^*T \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$,

(C) $T^* \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$.

Folgerung 3.24 *Es sei $T \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$. Dann gilt* $\dim N(T-\lambda I) < \infty$ *für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und die Menge $\sigma(T) \setminus \{0\}$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten, die sich nur in 0 häufen können. Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von T , so ist $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von T^* . Es ist $0 \in \sigma(T)$, falls* $\dim \mathbf{H} = \infty$.

Für einen kompakten Operator $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ und $A = I - T$ haben wir also:

1. Die **Fredholmsche Alternative**: $Ax = y$ ist genau dann für jedes $y \in \mathbf{H}$ in $\mathbf{H}$ lösbar, wenn die Gleichung eindeutig lösbar ist.

2. **Endlich viele Lösbarkeitsbedingungen**: $Ax = y \in \mathbf{H}$ ist genau dann in $\mathbf{H}$ lösbar, wenn $y \in N(A^*)^\perp$ gilt. Dabei ist $\dim N(A^*) < \infty$.

Satz 3.25 *Für jeden kompakten und selbstadjungierten Operator $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ existieren eine endliche Folge oder eine Nullfolge reeller Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ mit $|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$ und paarweise orthonormale Vektoren $e_k \in \mathbf{H}$, so dass*

$$T\,x = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k \rangle\, e_k \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

Definiert man $P_k x = \langle x, e_k \rangle\, e_k$, $x \in \mathbf{H}$, so ist P_k ein Orthoprojektor, und es gilt $P_k P_j = \Theta$ für $k \neq j$ sowie

$$T = \sum_k \lambda_k P_k\,,$$

wobei im Fall unendlich vieler Eigenwerte die Reihe in der Operatornorm konvergiert.

Satz 3.26 *Ein linearer Operator $T : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ ist genau dann kompakt, wenn eine Folge linearer Operatoren mit endlichdimensionalem Bild existiert, die in der Operatornorm gegen T konvergiert.*

Beispiel 3.27 *Der Operator $K : \mathbf{L}^2_\sigma(-1,1) \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma(-1,1)$, wobei $\sigma(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$, definiert durch*

$$(Ku)(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \ln|s-t|\, u(s)\, \sigma(s)\, ds$$

ist kompakt. Wir geben seine Diagonaldarstellung entsprechend Satz 3.25 an.

Kapitel 4

Spektralintegrale

4.1 Im Allgemeinen unbeschränkte Operatoren

Einen Operator $A : D(A) \subset \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ nennen wir **linear**, wenn sein **Definitionsbereich** $D(A)$ ein linearer Teilraum von $\mathbf{H}$ ist und wenn für alle $x, y \in D(A)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt $A(\lambda\, x + \mu\, y) = \lambda\, A\, x + \mu\, A\, y$. Die Menge aller dieser linearen Operatoren bezeichnen wir mit $L(\mathbf{H})$. Ein Operator $A \in L(\mathbf{H})$ heißt **Einschränkung** von $B \in L(\mathbf{H})$ (oder B ist **Fortsetzung** von A , in Zeichen: $A \subset B$ oder $B \supset A$), falls $D(A) \subset D(B)$ und $A\, x = B\, x \;\forall\, x \in D(A)$ gilt. Wir definieren für $A, B \in L(\mathbf{H})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$

- $D(\lambda\, A) = D(A)$ und $(\lambda\, A)x = \lambda\, A\, x$, $x \in D(A)$,
- $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ und $(A + B)x = A\, x + B\, x$, $x \in D(A + B)$,
- $D(AB) = \{x \in D(B) : B\, x \in D(A)\}$ und $(AB)x = A(B\, x)$, $x \in D(AB)$.

Folglich ist $D(A - \lambda\, I) = D(A) \;\; \forall\, A \in L(\mathbf{H}), \lambda \in \mathbb{C}$. Sind $A_n \in L(\mathbf{H})$, $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, falls

- $D(A) = \left\{ x \in \mathbf{H} : \exists\, n_0 = n_0(x) \text{ mit } x \in \bigcap\limits_{n=n_0}^{\infty} D(A_n) \right\}$ und

$$A\, x = \lim_{n\to\infty} A_n x \quad \forall\, x \in D(A) \, .$$

Offenbar gilt $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in L(\mathbf{H})$. Außerdem definieren wir für $A \in L(\mathbf{H})$

- $\mathrm{comm}(A) = \{B \in \mathcal{L}(\mathbf{H}) : B\, x \in D(A),\; AB\, x = BA\, x \;\forall\, x \in D(A)\}$.

Beispiel 4.1 *Wir betrachten zwei Beispiele unbeschränkter Operatoren:*

(a) $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, $D(A) = \left\{ x \in \mathbf{H} : \int_{\mathbb{R}} t^2 |x(t)|^2 dt < \infty \right\}$, $(A\, x)(t) = t\, x(t)$.

(b) $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, $D(B) = \mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ x \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}) : \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |t^n x^{(m)}(t)| < \infty, \forall\, n, m \in \mathbb{N}_0 \right\}$,

$(B\, x)(t) = -x''(t) + t^2 x(t)$.

Definition 4.2 *Sind* $A \in L(\mathbf{H})$ *und* $\overline{D(A)} = \mathbf{H}$, *so kann der* **adjungierte Operator** $A^* \in L(\mathbf{H})$ *eindeutig mittels*

$$D(A^*) = \left\{ y \in \mathbf{H} : \sup\left\{ |\left\langle Ax, y \right\rangle| : x \in D(A),\; \|x\| = 1 \right\} < \infty \right\}$$

und

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \quad \forall\, x \in D(A)\,,\ \forall\, y \in D(A^*)\,,$$

definiert werden.

Aus $A \subset B$ folgt $B^* \subset A^*$.

Definition 4.3 *Es seien $A \in L(\mathbf{H})$ und $\overline{D(A)} = \mathbf{H}$. Die Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt* **regulärer Punkt** *von A, wenn ein Operator $R_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ existiert, so dass*

$$R_\lambda(A - \lambda\, I)x = x\ \forall\, x \in D(A) \quad \textit{und} \quad (A - \lambda\, I)R_\lambda x = x\ \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

Die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, die keine regulären Punkte von A sind wird **Spektrum** *von A genannt und mit $\sigma(A)$ bezeichnet. Die Menge $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ heißt* **Resolventenmenge** *von A.*

Man beachte: Erfüllt R_λ die Definition 4.3, so gilt $D(A) = R(R_\lambda)$.

Satz 4.4 *Sind $A \in L(\mathbf{H})$ und $\overline{D(A)} = \mathbf{H}$, so sind $\rho(A)$ offen und somit $\sigma(A)$ abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{C}$. Außerdem gilt*

$$\mathrm{comm}(A) = \mathrm{comm}(R_\lambda) \quad \forall\, \lambda \in \rho(A)\,.$$

Sind $\lambda, \mu \in \rho(A)$, so gilt

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\mu R_\lambda \quad \textit{und} \quad R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda\,.$$

Falls $\lambda \in \rho(A)$, so schreibt man auch $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, weil in diesem Fall $A - \lambda I : D(A) \longrightarrow \mathbf{H}$ eine Bijektion mit beschränktem inversen Operator ist.

Definition 4.5 *Wir nennen den Operator $A \in L(\mathbf{H})$* **symmetrisch**, *falls*

$$\overline{D(A)} = \mathbf{H} \quad \textit{und} \quad \langle A\, x, y\rangle = \langle x, A\, y\rangle\ \ \forall\, x, y \in D(A)$$

gilt. Der Operator $A \in L(\mathbf{H})$ heißt **selbstadjungiert**, *wenn $A = A^*$ ist.*

Satz 4.6 *Für $A \in L(\mathbf{H})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *A ist symmetrisch.*

(b) $A \subset A^*$.

(c) $\overline{D(A)} = \mathbf{H}$ *und* $\langle A\, x, x\rangle \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in D(A)$.

Ein Operator $A \in L(\mathbf{H})$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn

$$\overline{D(A)} = \mathbf{H}\,, \quad \langle A\, x, x\rangle \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in D(A) \quad \textit{und} \quad D(A^*) \subset D(A)$$

erfüllt sind.

Als **Graph** von $A \in L(\mathbf{H})$ bezeichnet man die Menge

$$\Gamma(A) = \{(x, A\, x) : x \in D(A)\} \subset \mathbf{H} \times \mathbf{H}\,.$$

Für $A, B \in L(\mathbf{H})$ sind $A \subset B$ und $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$ äquivalente Bedingungen. Wir versehen $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ mit dem inneren Produkt

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle_{\mathbf{H}\times\mathbf{H}} := \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle\ .$$

Der Operator $A \in L(\mathbf{H})$ heißt **abgeschlossen**, wenn $\Gamma(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ ist. Das ist äquivalent zu

$$x_n \in D(A)\,,\ x_n \longrightarrow x\,,\ y_n = A\, x_n \longrightarrow y \implies x \in D(A)\,,\ y = A\, x\,.$$

Das **Theorem vom abgeschlossenen Graphen** besagt, dass ein abgeschlossener Operator $A \in L(\mathbf{H})$ mit $D(A) = \mathbf{H}$ zu $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ gehört.

Folgerung 4.7 *Sind* $A \in L(\mathbf{H})$ *selbstadjungiert,* $B \in L(\mathbf{H})$ *symmetrisch und* $A \subset B$ *, so gilt* $A = B$ *. Ist* $A \in L(\mathbf{H})$ *symmetrisch mit* $D(A) = \mathbf{H}$ *, so gilt* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *.*

Definition 4.8 *Ein Operator* $A \in L(\mathbf{H})$ *wird* **abschließbar** *genannt, wenn es einen abgeschlossenen Operator* $B \in L(\mathbf{H})$ *mit* $A \subset B$ *gibt.*

Satz 4.9 *Falls* A *abschließbar ist, so existiert eine kleinste abgeschlossene Fortsetzung* $\overline{A}$ *, die* **Abschließung** *von* A *, in dem Sinne, dass* $\overline{A} \subset B$ *für jede abgeschlossene Fortsetzung* B *von* A *gilt. Ist* $A \in L(\mathbf{H})$ *abschließbar, so gilt* $\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}$ *.*

Beispiel 4.10 *Wir zeigen, dass zu jedem unendlichdimensionalen Hilbertraum ein nicht abschließbarer linearer Operator existiert.*

Bemerkung 4.11 *Ist* $A \in L(\mathbf{H})$ *ein abgeschlossener Operator mit* $\overline{D(A)} = \mathbf{H}$ *, so gehört* λ *zu* $\rho(A)$ *genau dann, wenn* $A - \lambda I : D(A) \longrightarrow \mathbf{H}$ *eine Bijektion ist.*

4.2 Selbstadjungierte Operatoren

Satz 4.12 *Es seien* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion,* E_λ *eine linksseitig stetige Spektralschar,* $J_n(f) = \int_{-n}^{n-0} f(\lambda)\, dE_\lambda$ *,* $D(A) = \left\{ x \in \mathbf{H} : \exists \lim\limits_{n\to\infty} J_n(f)x \right\}$ *und* $A\,x = \lim\limits_{n\to\infty} J_n(f)x$ *. Dann ist* $A = J(f) \in L(\mathbf{H})$ *ein selbstadjungierter Operator, für den wir auch*

$$A = J(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE_\lambda := \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n-0} f(\lambda)\, dE_\lambda$$

schreiben. Falls f *beschränkt ist, so gilt* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *.*

Satz 4.13 *Es sei* $A \in L(\mathbf{H})$ *ein selbstadjungierter Operator. Dann gilt:*

(a) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

(b) $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ *ist ein normaler Operator für* $\lambda \in \rho(A)$ *und selbstadjungiert für* $\lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$.

(c) *Es existiert eine eindeutig bestimmte linksseitig stetige Spektralschar* E_λ *mit*

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda\,.$$

Außerdem ist

$$\mathrm{comm}(A) = \mathrm{comm}(E_\lambda)\,.$$

Folgendes Lemma wird für den Beweis von Satz 4.13,(c) benötigt.

Lemma 4.14 *Es sei* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *.*

(a) *Ist* $A = V\sqrt{A^*A}$ *die Polarzerlegung von* A *(vgl. Satz 3.8), so ist* $A^* = V^*\sqrt{A\,A^*}$ *die Polarzerlegung von* A^* *. Außerdem gilt* $\sqrt{A\,A^*} = V\sqrt{A^*A}V^*$ *.*

(b) *Ist* A *ein normaler Operator, so existiert ein unitärer Operator* $V \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ *mit* $V\,A = A\,V$ *und* $A = V\sqrt{A^*A}$ *.*

Kapitel 5

Differentialoperatoren in $\mathbf{L}^2(a,b)$

Wir erinnern daran, dass wir mit $\Gamma(A)$ den Graphen des Operators $A \in L(\mathbf{H})$ bezeichnen. Ferner definieren wir $V : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H} \times \mathbf{H}$, $(x,y) \mapsto (-y,x)$, wobei wir $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ mit dem inneren Produkt $\langle (x,y),(z,w) \rangle := \langle x,z \rangle + \langle y,w \rangle$ ausstatten.

Lemma 5.1 *Es seien $A \in L(\mathbf{H})$ und $\overline{D(A)} = \mathbf{H}$. Dann gilt:*

(a) $\Gamma(A^*) = [V(\Gamma(A))]^\perp$.

(b) *A^* ist abgeschlossen.*

(c) *A ist genau dann abschließbar, wenn $\overline{D(A^*)} = \mathbf{H}$ gilt. In diesem Fall ist $\overline{A} = (A^*)^* =: A^{**}$.*

(d) *Ist A abschließbar, so gilt $(\overline{A})^* = A^*$.*

(e) *Der Operator A ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\Gamma(A) = [V(\Gamma(A))]^\perp$ gilt. In diesem Fall ist $\Gamma(A) + V(\Gamma(A)) = \mathbf{H} \times \mathbf{H}$.*

Lemma 5.2 *Es seien $F : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $F_j : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, lineare Funktionale auf dem linearen Raum $\mathbf{X}$, wobei*

$$\bigcap_{j=1}^{n} N(F_j) \subset N(F)$$

gelte. Dann existieren $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{C}$, so dass $F = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j F_j$.

Im Weiteren seien $-\infty \le a < b \le \infty$ und $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(a,b)$. Eine Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **absolut stetig**, wenn ein $c \in (a,b)$ und eine lokal integrierbare Funktion $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ (in Zeichen: $g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$) existieren, so dass

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(y)\, dy \quad \forall\, x \in (a,b) .$$

In diesem Fall schreiben wir $g = f'$. Mit $\mathcal{A}_n(a,b)$ bezeichnen wir die Menge aller $n-1$ mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$, für die $f^{(n-1)} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ absolut stetig ist.

Satz 5.3 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $c_0 = c_0(n,\varepsilon)$, so dass*

$$\int_0^1 |f^{(j)}(x)|^2\, dx \le \varepsilon \int_0^1 |f^{(n)}(x)|^2\, dx + c_0 \int_0^1 |f(x)|^2\, dx \quad \forall\, f \in \mathcal{A}_n(0,1)\,,\ \forall\, j = 0,1,\ldots,n-1 .$$

Folgerung 5.4 *Sind $f \in \mathcal{A}_n(a,b) \cap \mathbf{L}^2(a,b)$ und $f^{(n)} \in \mathbf{L}^2(a,b)$, so gilt auch $f^{(j)} \in \mathbf{L}^2(a,b)$, $j = 1, \ldots, n-1$, $-\infty < a < b < \infty$.*

Wir definieren $\mathbf{W}_r^2(a,b) := \left\{ f \in \mathcal{A}_r(a,b) \cap \mathbf{L}^2(a,b) : f^{(r)} \in \mathbf{L}^2(a,b) \right\}$ (Sobolevraum r-ter Ordnung).

Folgerung 5.5 *Ist $f \in \mathbf{W}_r^2(a,b)$, so folgt $f^{(j)} \in \mathbf{C}[a,b]$, $j = 0, 1, \ldots, r-1$, wobei $f^{(j)}(\infty) = 0$ ($f^{(j)}(-\infty) = 0$), falls $b = \infty$ ($a = -\infty$), $j = 0, 1, \ldots, r-1$.*

Mit $D : \mathcal{A}_1(a,b) \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ bezeichnen wir den Differentialoperator $Df = f'$, und wir definieren $\mathbf{C}_0^\infty(a,b) := \{ f \in \mathbf{C}^\infty(a,b) : \operatorname{supp} f \subset (a,b) \}$,

$$D(A_r^0) = \mathbf{C}_0^\infty(a,b), \quad A_r^0 f = (-\mathbf{i}D)^r f$$

sowie

$$D(A_r) = \mathbf{W}_r^2(a,b), \quad A_r f = (-\mathbf{i}D)^r f.$$

Satz 5.6 *Es gilt*

(a) *A_r^0 ist symmetrisch,*

(b) $R(A_r^0) = \left\{ g \in \mathbf{C}_0^\infty(a,b) : \int_a^b x^j g(x)\,dx = 0,\ j = 0, 1, \ldots, r-1 \right\} =: \mathbf{C}_{0,r}^\infty(a,b)$,

(c) $\left(A_r^0\right)^* = A_r$, $A_r^* = \overline{A_r^0}$,

(d) $D(\overline{A_r^0}) = \left\{ f \in \mathbf{W}_r^2(a,b) : f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, r-1 \right\} =: \mathbf{W}_r^{2,0}(a,b)$.

Folgerung 5.7 *Ist $(a,b) = \mathbb{R}$, so ist der Operator A_r selbstadjungiert. Ist aber $(a,b) \neq \mathbb{R}$, so sind $\overline{A_r^0}$ und A_r keine selbstadjungierten Operatoren.*

Folgerung 5.8 *Im Fall $(a,b) = \mathbb{R}$ gilt $\sigma(A_{2r}) = [0, \infty)$ und $\sigma(A_{2r-1}) = \mathbb{R}$.*

Wir bemerken, dass in Satz 5.3 das Intervall $(0,1)$ durch ein beliebiges beschränktes Intervall (a,b) ersetzt werden kann, wobei die Konstante c_0 nicht von a und b abhängt, wenn nur $b-a \geq \ell_0$ mit einer geeigneten positiven Konstanten ℓ_0 gilt. Hieraus folgt, dass

$$\int_a^b |f^{(j)}(x)|^2\,dx \leq \varepsilon \int_a^b |f^{(n)}(x)|^2\,dx + c_0 \int_a^b |f(x)|^2\,dx \quad \forall\, f \in \mathcal{A}_n(a,b),\ \forall\, j = 0, 1, \ldots, n-1$$

und Folgerung 5.4 auch für unbeschränkte Intervalle (a,b) gelten.

Begründung: Im Beweis von Satz 5.3 hatten wir die Ungleichung

$$\int_\alpha^\beta |f'(x)|^2\,dx \leq \frac{2 \cdot 3^4}{L^2} \int_\alpha^\beta |f(x)|^2\,dx + 2L^2 \int_\alpha^\beta |f''(x)|^2\,dx$$

erhalten, wobei $L = \beta - \alpha > 0$ ist. Anwendung dieser Ungleichung auf $\alpha = a + \frac{(b-a)(j-1)}{m}$, $\beta = a + \frac{(b-a)j}{m}$ und Aufaddieren für $j = 1, \ldots, m$ ergibt

$$\int_a^b |f'(x)|^2\,dx \leq \frac{2 \cdot 3^4 \cdot m^2}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)|^2\,dx + \frac{2(b-a)^2}{m^2} \int_a^b |f''(x)|^2\,dx.$$

Ist nun $b - a \geq \ell_0 := \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, so wählen wir $m \in \{2, 3, \ldots\}$ so, dass

$$\frac{2(b-a)^2}{m^2} \leq \varepsilon \leq \frac{2(b-a)^2}{(m-1)^2}$$

gilt, und erhalten

$$\int_a^b |f'(x)|^2\,dx \le \frac{6^4}{\varepsilon}\int_a^b |f(x)|^2\,dx + \varepsilon\int_a^b |f''(x)|^2\,dx\,.$$

Damit kann man den Induktionsbeweis für Satz 5.3 dann fortsetzen.

Wir nennen einen symmetrischen Operator $A \in L(\mathbf{H})$ **positiv definit**, falls eine Konstante $\gamma > 0$ existiert, so dass $\langle Ax, x\rangle \ge \gamma^2 \|x\|^2$ für alle $x \in D(A)$ gilt.

Beispiel 5.9 *Im Fall $-\infty < a < b < \infty$ sind die Operatoren A_{2r}^0 und $\overline{A_{2r}^0}$ positiv definit. Z.B. im Fall $(a,b) = \mathbb{R}$ oder $(a,b) = (0,\infty)$ ist der Operator $\overline{A_{2r}^0}$ nicht positiv definit.*

Für $x, y \in D(A)$ definieren wir $\langle x, y\rangle_A := \langle Ax, y\rangle$. Ist $A \in L(\mathbf{H})$ positiv definit, so ist $\langle .,.\rangle_A$ ein inneres Produkt auf $D(A)$. Die Vervollständigung des Raumes $\mathbf{H}_A^0 := (D(A), \langle .,.\rangle_A)$ ist isometrisch isomorph zu einem linearen Teilraum $\mathbf{H}_A$ von $\mathbf{H}$. Dies kann man wie folgt zeigen:

1. Bekanntlich kann man die Vervollständigung $\widetilde{\mathbf{X}}$ von $\mathbf{H}_A^0$ als den Raum der Äquivalenzklassen $[(x_n)]_\sim$ beschreiben, deren Elemente Cauchyfolgen in $\mathbf{H}_A^0$ sind, wobei die Äquivalenzrelation "$\sim$" definiert ist durch

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_A = 0\,.$$

Das innere Produkt in $\widetilde{\mathbf{X}}$ ist gegeben durch

$$\langle [(x_n)]_\sim, [(y_n)]_\sim\rangle_{\widetilde{\mathbf{X}}} := \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle_A\ .$$

Der Teilraum $\widetilde{\mathbf{X}}_0 = \left\{[(x)]_\sim : x \in \mathbf{H}_A^0\right\}$ der Äquivalenzklassen mit konstantem Repräsentanten ist dicht in $\widetilde{\mathbf{X}}$ und isometrisch isomorph zu $\mathbf{H}_A^0$.

2. Die Abbildung $J : \widetilde{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathbf{H}$, $[(x_n)]_\sim \mapsto \lim_{\mathbf{H}} x_n$ ist wohldefiniert, denn aus $[(x_n)]_\sim \in \widetilde{\mathbf{X}}$ folgt wegen $\|x_n - x_m\|_A \ge \gamma \|x_n - x_m\|$, dass (x_n) Cauchyfolge in $\mathbf{H}$ ist und $\lim_{\mathbf{H}} x_n$ existiert unabhängig von der Wahl des Repräsentanten (x_n) der Äquivalenzklasse.

3. Die Abbildung $J : \widetilde{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathbf{H}$ ist linear und injektiv. Die Injektivität ergibt sich wie folgt: Ist $J[(x_n)]_\sim = \Theta$, so folgt nach Definition der Abbildung J, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ ist. Andererseits ist (x_n) Cauchyfolge in $\mathbf{H}_A^0$, so dass $\left([(x_k)_{n=1}^\infty]_\sim\right)_{k=1}^\infty$ Cauchyfolge in $\widetilde{\mathbf{X}}$ ist. Damit existiert ein $[(z_n)]_\sim \in \widetilde{\mathbf{X}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} [(x_k)_{n=1}^\infty]_\sim = [(z_n)]_\sim$ (Konvergenz in $\widetilde{\mathbf{X}}$). Für ein beliebiges $[(y)_{n=1}^\infty]_\sim \in \widetilde{\mathbf{X}}_0$ gilt nun

$$\langle [(x_k)_{n=1}^\infty]_\sim\,, [(y)_{n=1}^\infty]_\sim\rangle_{\widetilde{\mathbf{X}}} = \langle x_k, y\rangle_A = \langle Ax_k, y\rangle = \langle x_k, Ay\rangle \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)\,,$$

so dass auch

$$\langle [(z_n)_{n=1}^\infty]_\sim\,, [(y)_{n=1}^\infty]_\sim\rangle_{\widetilde{\mathbf{X}}} = 0$$

für alle $[(y)_{n=1}^\infty]_\sim$ aus der in $\widetilde{\mathbf{X}}$ dichten Menge $\widetilde{\mathbf{X}}_0$ gilt. Somit ist $[(z_n)]_\sim$ gleich dem Nullelement in $\widetilde{\mathbf{X}}$, was bedeutet, Dass $\lim\limits_{n\to\infty} \|z_n\|_A = 0$ und somit auch $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_A = 0$ gilt, d.h., $[(x_n)]_\sim = [(\Theta)]_\sim$.

4. Wir setzen $\mathbf{H}_A := \left\{J[(x_n)]_\sim : [(x_n)]_\sim \in \widetilde{\mathbf{X}}\right\}$, und für $x, y \in \mathbf{H}_A$ definieren wir

$$\langle x, y\rangle_A := \left\langle J^{-1}x, J^{-1}y\right\rangle_{\widetilde{\mathbf{X}}}\ .$$

(Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt, da für $x, y \in \mathbf{H}_A^0$ dieses innere Produkt den oben definierten Wert annimmt.) Dann sind $\left(\mathbf{H}_A, \langle .,.\rangle_A\right)$ und $\left(\widetilde{\mathbf{X}}, \langle .,.\rangle_\sim\right)$ zueinander isometrisch isomorph (über die Abbildung $J : \widetilde{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathbf{H}_A$), weshalb wir $\mathbf{H}_A$ als Vervollständigung von $\mathbf{H}_A^0$ betrachten können.

Dieser Hilbert-Raum $(\mathbf{H}_A, \langle .,. \rangle_A)$ wird **energetischer Raum** des positiv definiten Operators $A \in L(\mathbf{H})$ genannt. Die Norm in $\mathbf{H}_A$ bezeichnen wir wieder mit $\|.\|_A$, d.h., $\|x\|_A = \sqrt{\langle x,x \rangle_A}$. Wir haben also $D(A) = \mathbf{H}_A^0 \subset \mathbf{H}_A \subset \mathbf{H}$, und $\mathbf{H}_A^0$ ist dicht in $\mathbf{H}_A$.

Sind nun $x \in \mathbf{H}_A$ und $[(x_n)]_\sim = J^{-1}x$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} \|x_k - x\|_A = \lim_{k\to\infty} \left\|J^{-1}x_k - J^{-1}x\right\|_\sim = 0 \tag{5.1}$$

(beachte: $J^{-1}x_k$ ist die Äquivalenzklasse, die die konstante Folge $(x_k)_{n=1}^\infty$ enthält). Aus $\|x_n\|_A \leq \gamma^{-1}\|x_n\|$ und (5.1) folgt durch Grenzübergang

$$\|x\| \leq \gamma^{-1}\|x\|_A \quad \forall\, x \in \mathbf{H}_A\,. \tag{5.2}$$

Außerdem gilt

$$\langle x,y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle \quad \forall\, x \in D(A)\,,\ \forall\, y \in \mathbf{H}_A\,. \tag{5.3}$$

Im Weiteren sei $A \in L(\mathbf{H})$ positiv definit.

Satz 5.10 *Ein Element $x \in \mathbf{H}$ gehört genau dann zu $\mathbf{H}_A$, wenn eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ mit $x_n \in D(A)$ existiert, die eine Cauchy-Folge in $\mathbf{H}_A^0$ ist und für die $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ gilt. Dabei ist auch $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_A = 0$.*

Beispiel 5.11 *Sei $-\infty < a < b < \infty$. Der energetische Raum des Operators $\overline{A_{2r}^0}$ ist gleich $\mathbf{W}_r^{2,0}(a,b)$.*

Satz 5.12 *Es existiert genau ein selbstadjungierter Operator $B \in L(\mathbf{H})$ mit $D(B) \subset \mathbf{H}_A$ und $\langle Bx, y \rangle = \langle x, y \rangle_A$ $\forall\, x \in D(B)$ und $\forall\, y \in \mathbf{H}_A$. Außerdem gilt $\langle Bx, x \rangle \geq \gamma^2\|x\|^2$, $x \in D(B)$, und $D(B) = D(A^*) \cap \mathbf{H}_A$.*

Wir bemerken, dass $D(B) = \{x \in \mathbf{H}_A : \exists\, \widetilde{x} \in \mathbf{H} \text{ mit } \langle x,y \rangle_A = \langle \widetilde{x}, y \rangle \ \forall\, y \in \mathbf{H}_A\}$ und $Bx = \widetilde{x}$. Offenbar gilt für $x \in D(A)$ unter Berücksichtigung von (5.3)

$$\langle Bx, y \rangle = \langle x,y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle \quad \forall\, y \in \mathbf{H_A}\,,$$

so dass $Bx = Ax$. Folglich ist $A \subset B$. Den Operator B nennt man **Friedrichs'sche Fortsetzung** des Operators A (in Zeichen: $B =: A^F$).

Beispiel 5.13 *Sei $-\infty < a < b < \infty$. Aus Satz 5.12, Satz 5.6,(c),(d) und Beispiel 5.11 folgt*

$$D\big((A_{2r}^0)^F\big) = D\big((A_{2r}^0)^*\big) \cap \mathbf{W}_r^{2,0}(a,b) = D(A_{2r}) \cap \mathbf{W}_r^{2,0}(a,b) = \mathbf{W}_{2r}^2(a,b) \cap \mathbf{W}_r^{2,0}(a,b)\,.$$

Ferner folgt aus $A_{2r}^0 \subset (A_{2r}^0)^F$ auch $\overline{A_{2r}^0} \subset (A_{2r}^0)^F$, also $\left(\overline{A_{2r}^0}\right)^F = (A_{2r}^0)^F$. Die Friedrichs'sche Erweiterung $\left(\overline{A_{2r}^0}\right)^F$ von $\overline{A_{2r}^0}$ ist also gleich $(A_{2r}^0)^F$ und gegeben durch

$$D\big((A_{2r}^0)^F\big) = \left\{ f \in \mathbf{W}_{2r}^2(a,b) : f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0\,,\ j = 0,1,\ldots,r-1 \right\} = W_{2r}^2(a,b)$$

und

$$(A_{2r}^0)^F f = (-\mathbf{i}D)^{2r} f\,.$$

- Sind $\mathbf{H}$ ein reeller Hilbertraum, $A \in L(\mathbf{H})$ positiv definit, $y \in \mathbf{H}$ und minimiert $x_0 \in D(A)$ das Funktional $F(x) = \langle Ax, x \rangle - 2\langle x, y \rangle$, $x \in D(A)$, so gilt $Ax_0 = y$.

  Begründung: Sei $F(x_0) \leq F(x)$ $\forall\, x \in D(A)$ für ein $x_0 \in D(A)$. Dann folgt

  $$g(0) \leq g(\alpha) := F(x_0 + \alpha z) \quad \forall\, z \in D(A)\,,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

  wobei

  $$F(x_0 + \alpha z) = F(x_0) + 2\alpha\langle Ax_0 - y, z \rangle + \alpha^2\langle Az, z \rangle\,.$$

  Damit ist $g'(0) = 2\langle Ax_0 - y, z \rangle = 0$ $\forall\, z \in D(A)$, woraus $Ax_0 = y$ folgt.

- Umgekehrt folgt aus obigen Überlegungen auch, dass $x_0 \in D(A)$ und $Ax_0 = y$ impliziert $F(x) > F(x_0)\ \forall\, x \in D(A) \setminus \{x_0\}$.

- Das Minimierungsproblem

$$F(x) := \|x\|_A^2 - 2\,\langle y, x\rangle \longrightarrow \min\,, \quad x \in \mathbf{H}_A$$

  besitzt eine eindeutige Lösung $x_0 \in \mathbf{H}_A$, die man **verallgemeinerte Lösung** der Gleichung $Ax = y$ nennt. Dabei gilt $A^F x_0 = y$.

  Begründung: Für $x \in \mathbf{H}_A$ gilt $|\,\langle y, x\rangle\,| \le \|y\| \cdot \|x\| \le \gamma^{-1}\,\|y\| \cdot \|x\|_A$. Somit existiert ein $x_0 \in \mathbf{H}_A$ mit $\langle y, x\rangle = \langle x_0, x\rangle_A\ \forall\, x \in \mathbf{H}_A$. Es folgt

$$F(x) = \|x\|_A^2 - 2\,\langle x_0, x\rangle_A = \|x - x_0\|_A^2 - \|x_0\|_A^2$$

  und somit die Behauptung.

- Wir bemerken, dass $y = A^F x_0$ gilt. Man nennt $x_0 \in \mathbf{H}_A$ die **verallgemeinerte Lösung** der Gleichung $Ax = y$.

Index