

Belegaufgaben zur Vorlesung Hilbertraummethode
(zum Erwerb eines Scheins ohne Note)

1. Zeigen Sie, dass jede beschränkte und monotone Folge selbstadjungierter Operatoren stark konvergiert. (Satz 2.8)
2. Zeigen Sie, dass jede monotone Folge von Orthoprojektoren stark gegen einen Orthoprojektor konvergiert. (Satz 2.14)
3. Man zeige, dass für zwei beliebige Orthoprojektoren $P, Q \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ die Folge $(PQ)^n$ stark gegen $P_{R(P) \cap R(Q)}$ konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie

- (a) $\Theta \leq (PQP)^{n+1} \leq (PQP)^n$,
- (b) $(PQ)^{n+1} = (PQP)^n Q \rightarrow A \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, wobei $A^2 = A$,
- (c) $R(P) \cap R(Q) \subset R(A) \subset R(P)$,
- (d) $x \notin R(Q) \implies \|Ax\| \leq \|Qx\| < \|x\| \implies x \notin R(A) \implies R(A) = R(P) \cap R(Q)$,
- (e) $A = QA$ ist selbstadjungiert.

4. Beweisen Sie die grundlegenden Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals und die Formel

$$f(A) = \int_a^{b-0} f(\lambda) dE_\lambda.$$

(1.-5. in Abschnitt 3.2 und Satz 3.19)

5. Es seien $A, B \in L(\mathbf{H})$ abgeschlossene Operatoren. Zeigen Sie:
 - (a) Ist $B \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$, so ist AB abgeschlossen.
 - (b) Ist $A : D(A) \rightarrow \mathbf{H}$ bijektiv, so ist AB abgeschlossen.
6. Geben Sie äquivalente Bedingungen für die Symmetrie und die Selbstadjungiertheit eines Operators $A \in L(\mathbf{H})$ an und begründen Sie Ihre Aussagen. (Satz 4.6)
7. Wie definiert man für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine linksseitig stetige Spektralschar E_λ das Integral $J(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dE_\lambda$. Zeigen Sie, dass $J(f)$ stets selbstadjungiert ist, und dass $J(f) \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ gilt, falls f beschränkt ist. (Satz 4.12)
8. Definieren Sie den Differentialoperator A_r^0 . Was ist das Definitionsgebiet von $\overline{A_r^0}$? Begründen Sie Ihre Aussage. (vgl. Satz 5.6,(c),(d))
9. Es seien $A, B \in L(\mathbf{H})$ symmetrisch, $x \in D(A) \cap D(B)$ und

$$\sigma_x(A) = \|(A - \langle Ax, x \rangle I)x\|, \quad \sigma_x(B) = \|(B - \langle Bx, x \rangle I)x\|.$$

Zeigen Sie, dass dann $\sigma_x(A)\sigma_x(B) \geq |\operatorname{Im} \langle Ax, Bx \rangle|$ gilt.