Übungen zum Kurs
Gewöhnliche Differentialgleichungen

7. Übung – Stabilitätstheorie

---

1. Man zeige, dass für das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 \end{aligned}$$

und das entsprechende im Nullpunkt linearisierte System die Abbildung

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - \dfrac{x_3^2}{3} \\ x_3 \end{bmatrix}$$

eine Realisierung des Theorems von Hartman-Grobman darstellt, d.h., für den Fluss $\Phi(t, x)$ des nichtlinearen Systems gilt $H(\Phi(t, x)) = e^{tA} H(x)$, wobei A die Matrix des linearisierten Systems ist.

2. Diskutieren Sie das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtspunkte des Systems $\dot{x} = v(x)$. Hinweis: Benutzen Sie das Hartman-Grobman-Theorem.

(a) $v(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2\,x_2 \end{bmatrix}$,

(b) $v(x) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1^2 + 2 \\ 2\,x_2^2 - 2\,x_1 x_2 \end{bmatrix}$,

(c) $v(x) = \begin{bmatrix} -4\,x_1 - 2\,x_2 + 4 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$.

3. Zeigen Sie mit Hilfe einer Ljapunov-Funktion der Gestalt

$$L(x_1, x_2) = c_1(x_1 - x_1^0)^2 + c_2(x_2 - x_2^0)^2\,,$$

wobei $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ der zu untersuchende Gleichgewichtspunkt ist, dass der Nullpunkt für das System

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + F(x)$$

im Falle

(a) $F(x) = \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_1 x_2^2 \\ -x_2^3 - x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$ asymptotisch stabil,

(b) $F(x) = \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1 x_2^2 \\ x_2^3 + x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$ instabil,

(c) $F(x) = \begin{bmatrix} -x_1 x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$ stabil, aber nicht asymptotisch stabil

ist.