**Lösungen (in Kurzform) zur Probeklausur Gewöhnliche Differentialgleichungen**

1. (a) Die allgemeine Lösung der homogonene Gleichung $y' = y\tan x$ ist $y_h(x) = \dfrac{c}{\cos x}$. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist $y_s(x) = -\cos x$.

   **Lösung**: $y(x) = \dfrac{c}{\cos x} - \cos x\,,\ c \in \mathbb{R}$ (4P)

   **Bemerkung**: Natürlich sind z.B. auch $-\dfrac{\cos(2x)}{2\cos x}$ oder $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ (spezielle) Lösungen der inhomogenen Gleichung.

   (b) Die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ sind $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 2$, so dass $y_h(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{2x}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist. Als Lösungsansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung wählen wir (Resonanzfall!) $y_s(x) = Axe^{4x}$ und erhalten $A = \frac{1}{2}$.

   **Lösung**: $y(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{2x} + \dfrac{xe^{4x}}{2}\,,\ c_k \in \mathbb{R}$ (4P)

   **Bemerkung**: Man kann auch die Methode der Variation der Konstanten anwenden.

   (c) Die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + 1 = 0$ sind $\lambda_{1/2} = \pm\mathrm{i}$, so dass $y_h(x) = c_1\cos x + c_2\sin x$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist. Variation der Konstanten $y(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos x} \end{bmatrix},$$

   so dass

$$\begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\cos x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tan x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Es folgt $c_1(x) = \ln(\cos x) + d_1$, $c_2(x) = x + d_2$.

   **Lösung**: $y(x) = [\ln(\cos x) + d_1]\cos x + (x + d_2)\sin x\,,\ d_k \in \mathbb{R}$ (5P)

   (d) Die Substitution $u = \dfrac{y}{x}$ führt zu $e^u u' = -\dfrac{1}{x}$, d.h.

$$e^u = \ln|x|^{-1} + c$$

   bzw.

$$u(x) = \ln\left(\ln|x|^{-1} + c\right) \quad \text{für} \quad \ln|x|^{-1} + c > 0\,,\ \text{d.h. } |x| < e^c\,.$$

   **Lösung**: $y(x) = x\ln\left(\ln|x|^{-1} + c\right)\,,\ |x| < e^c\,,\ c \in \mathbb{R}$ (3P)

2. Ein integrierender Faktor ist z.B. $\mu(x) = x$. Die allgemeine Lösung wird beschrieben durch $x^2\sin y = c$, $c \in \mathbb{R}$. Im Fall $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$ erhält man $c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ und somit $y(x) = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}x^2}$.

   Das maximale Lebensintervall dieser Lösung ergibt sich aus den Bedingungen $x > 0$ und $0 < \dfrac{1}{\sqrt{2}x^2} < 1$. Dieses Lebensintervall ist also gleich $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}, \infty\right)$. (6P)

   **Bemerkung**: Ein integrierender Faktor ist auch $\mu(y) = \dfrac{1}{\sqrt{\sin y}}$.

3. Das homogene System $\dot{u} = 3u + 3v$, $\dot{v} = -u - v$ hat die allgemeine Lösung

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Variation der Konstanten liefert

$$
\begin{aligned}
\dot{c}_1 + 3e^{2t}\dot{c}_2 &= t\,, \\
-\dot{c}_1 - e^{2t}\dot{c}_2 &= 1\,,
\end{aligned}
$$

also $-2\dot{c}_1 = t+3$, $2\dot{c}_2 e^{2t} = t+1$. Integration ergibt

$$
c_1(t) = -\frac{(t+3)^2}{4} + d_1\,, \quad c_2(t) = -\left(\frac{t+1}{4} + \frac{1}{8}\right) e^{-2t} + d_2\,.
$$

**Lösung**:

$$
\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \left(d_1 - \frac{(t+3)^2}{4}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(d_2 e^{2t} - \frac{t+1}{4} - \frac{1}{8}\right) \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad d_k \in \mathbb{R}\,,
$$

also (6P)

$$
u(t) = d_1 + 3d_2 e^{2t} - \frac{t^2}{4} - \frac{9t}{4} - \frac{27}{8}\,, \quad v(t) = -d_1 - d_2 e^{2t} + \frac{t^2}{4} + \frac{7t}{4} + \frac{21}{8}\,.
$$

4. Wegen

$$
\dot{L}(x) = \begin{bmatrix} f'\left(x_1^2 + x_2^2\right) 2x_1 & f'\left(x_1^2 + x_2^2\right) 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_2 \\ -x_2^3 + x_1 \end{bmatrix} = -f'\left(x_1^2 + x_2^2\right) 2\left(x_1^4 + x_2^4\right)
$$

kann man $f(s) = s$ wählen und erhält, dass $\Theta$ asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt des Systems ist. (3P)

5. Das Geschwindigkeitsfeld ist gegeben durch $v(x) = \begin{bmatrix} -x_1^2 - x_2 \\ x_1 - x_2^2 \end{bmatrix}$. Die Gleichung $v(x) = \Theta$ liefert die zwei Gleichgewichtspunkte $x^{(1)} = \Theta$ und $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Wir haben

$$
v'(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

mit den Eigenwerten $\pm\mathrm{i}$ und

$$
v'(x^{(2)}) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

mit den Eigenwerten $\pm\sqrt{3}$. Somit ist lediglich auf $x^{(2)}$ das Theorem von Hartman/Grobman anwendbar. Der Gleichgewichtspunkt $x^{(2)}$ ist ein Sattelpunkt. (4P)

6. Aus $\lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 e^{x_1} \end{bmatrix}$ folgt, dass die $x_2$-Achse attraktive Menge ist, da sie wegen

$$
\Phi\left(t, \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}
$$

auch invariant bzgl. $\Phi$ ist. Die letzte Beziehung zeigt auch, dass jeder Punkt der $x_2$-Achse Gleichgewichtspunkt ist und diese Gerade somit keinen dichten Orbit enthält, also kein Attraktor ist. (3P)