Probeklausur Gewöhnliche Differentialgleichungen

- **Arbeitszeit**: 120 min
- **Hilfsmittel**: Formelsammlung (ohne durchgerechnete Beispiele)
- Der Lösungsweg sollte klar erkennbar sein. Alle Aussagen sind zu begründen!

1. Geben Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$ folgender Differentialgleichungen an:
   (a) $y' \cos x - y \sin x - \sin(2x) = 0\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,,$
   (b) $y'' - 6y' + 8y = e^{4x}\,,$
   (c) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,,$
   (d) $y' = \frac{y}{x} - e^{-\frac{y}{x}}\,,\ x \neq 0\,.$

2. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$2 \sin y + y' x \cos y = 0$$

   mit Hilfe eines integrierenden Faktors. Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$, die der Bedingung $y(1) = \frac{\pi}{4}$ genügt. Geben Sie das maximale Lebensintervall dieser Lösung an.

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $(u(t), v(t))$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{u} = 3u + 3v + t\,, \quad \dot{v} = -u - v + 1\,.$$

4. Finden Sie mit Hilfe des Ansatzes $L(x_1, x_2) = f(x_1^2 + x_2^2)$ eine Ljapunov-Funktion für den Gleichgewichtspunkt $x^* = \Theta$ des Systems

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2\,, \quad \dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1\,.$$

   Entscheiden Sie anhand dieser Ljapunov-Funktion, ob der Nullpunkt ein stabiler, asymptotisch stabiler oder instabiler Gleichgewichtspunkt des obigen Systems ist.

5. Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\dot{x}_1 = -x_1^2 - x_2\,, \quad \dot{x}_2 = -x_2^2 + x_1\,.$$

   Ist auf diese Gleichgewichtspunkte das Theorem von Hartman/Grobman anwendbar? Wenn ja, was kann man dann über den Stabilitätscharakter des jeweiligen Gleichgewichtspunktes aussagen?

6. Geben Sie für das dynamische System

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \quad (t, x) \mapsto \begin{bmatrix} x_1 e^{-t} \\ x_2 e^{x_1(1-e^{-t})} \end{bmatrix}$$

   eine Gerade g an, die attraktive Menge ist. Ist diese Gerade auch Attraktor?