Skript zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

WS 2010/11

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] K. Burg, H. Haf, F. Wille, Höhere Mathematik für Ingenieure, Band III, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen, B. G. Teubner Stuttgart, 1985, 1990, 1993, 2002.

[2] V. Capasso, Mathematical Structures of Epidemic Systems, Lecture Notes in Biomathematics, Springer-Verlag, 1993.

[3] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, 1983.

[4] K. Jänisch, Analysis für Physiker und Ingenieure – Funktionentheorie, Differentialgleichungen, Spezielle Funktionen, Springer-Verlag, 1983, 1990, 1995, 2001.

[5] L. Perko, Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, 1991.

[6] L. S. Pontrjagin, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Beispiele

1. **Einfachstes Populationsmodell**

$$P(t + \Delta t) - P(t) \approx k\, P(t)\, \Delta t\,, \quad k > 0 - \text{Vermehrungsrate.}$$

Für $\Delta t \longrightarrow 0$ ergibt sich das Anfangswertproblem (AWP)

$$P'(t) = k\, P(t)\,, \quad P(0) = P_0\,.$$

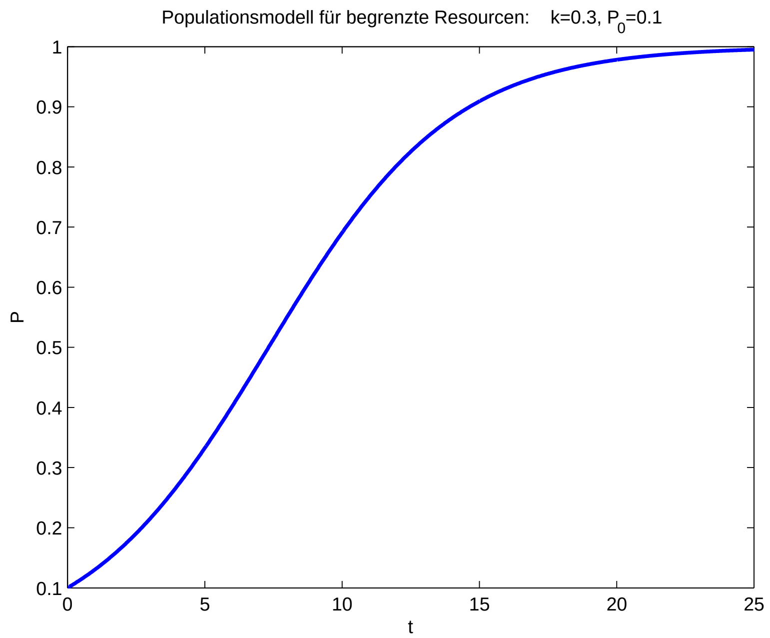
Die einzige Lösung dieses AWPs ist $P(t) = P_0 e^{k\,t}$, $t \in \mathbb{R}$.

2. **Populationsmodell für begrenzte Resourcen**

$$P'(t) = k[1 - P(t)]P(t)\,,\ P(0) = P_0 \geq 0\,, \quad k > 0$$

Lösung:

$$P(t) = \frac{P_0}{P_0 + (1 - P_0)e^{-k\,t}}$$



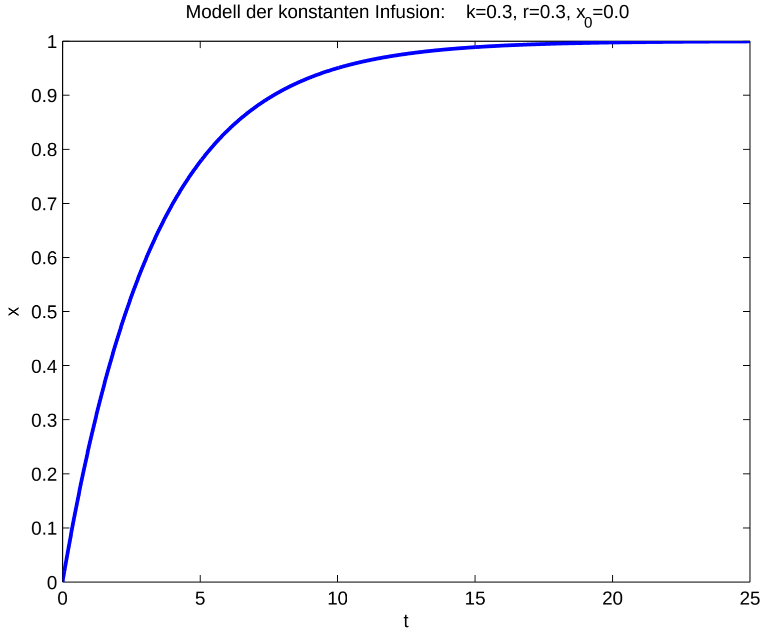
3. **Modell der konstanten Infusion**

   $x(t)$ - vorhandene Menge der Substanz, die mit konstanter Rate r in ein System eingebracht und mit einer Rate proportional zur vorhandenen Menge vom System abgebaut wird

$$\dot{x}(t) = -k\,x(t) + r\,, \quad k > 0$$

   Lösung des AWP's $x(0) = x_0$:

$$x(t) = x_0\,e^{-k\,t} + \frac{r}{k}\left(1 - e^{-k\,t}\right)$$



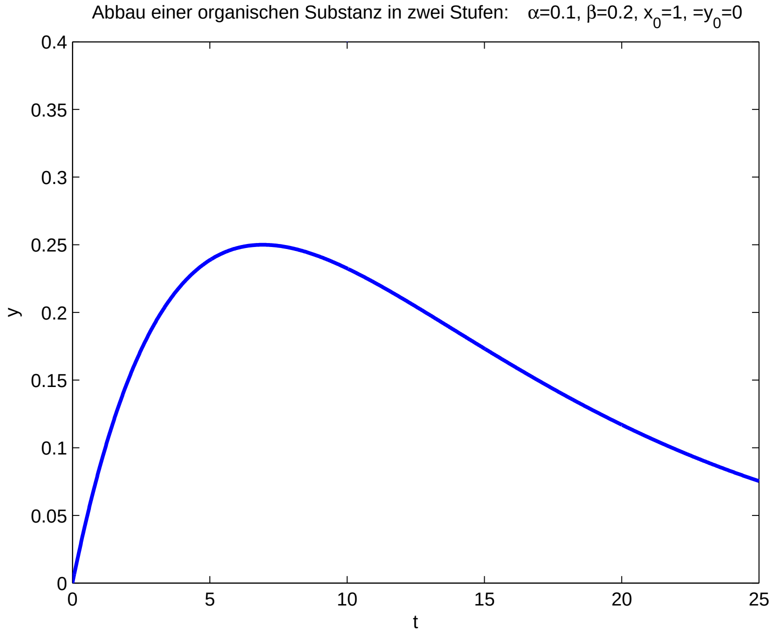
4. **Abbau einer organischen Substanz in zwei Stufen**

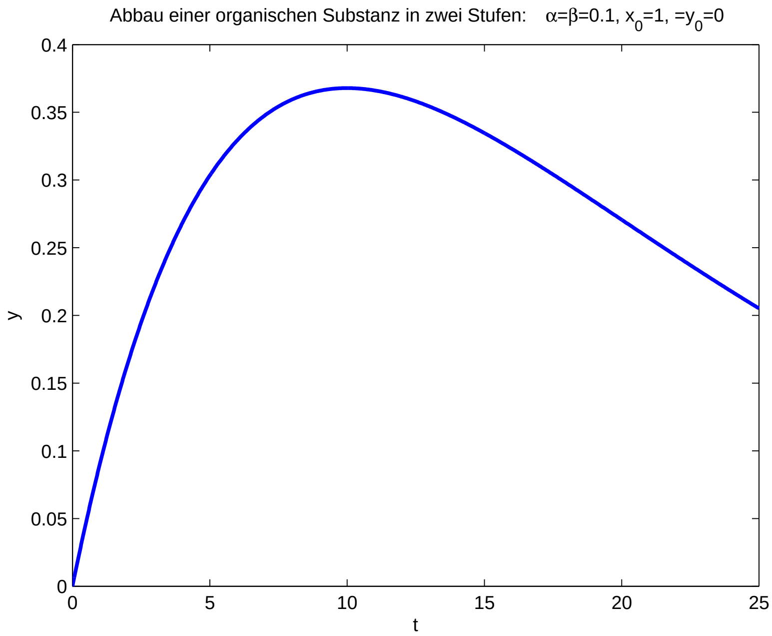
   Die Substanz x wird mit einer Rate proportional zur vorhandenen Menge im Organismus in eine Transportform y umgewandelt und dann mit einer ebensolchen Rate (z.B. durch die Zellmembran) ausgeschieden.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\alpha\,x(t)\\ \dot{y}(t) &= \alpha\,x(t) - \beta\,y(t)\,, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0\end{aligned}$$

   Lösung des AWP's $x(0) = x_0\,,\ y(0) = y_0$:

$$x(t) = x_0\,e^{-\alpha\,t}\,, \quad y(t) = \begin{cases}\left(y_0 - \dfrac{\alpha\,x_0}{\beta-\alpha}\right)e^{-\beta\,t} + \dfrac{\alpha\,x_0}{\beta-\alpha}\,e^{-\alpha\,t} & : \ \alpha \neq \beta\\ (\alpha\,x_0 t + y_0)e^{-\beta\,t} & : \ \alpha = \beta\end{cases}$$





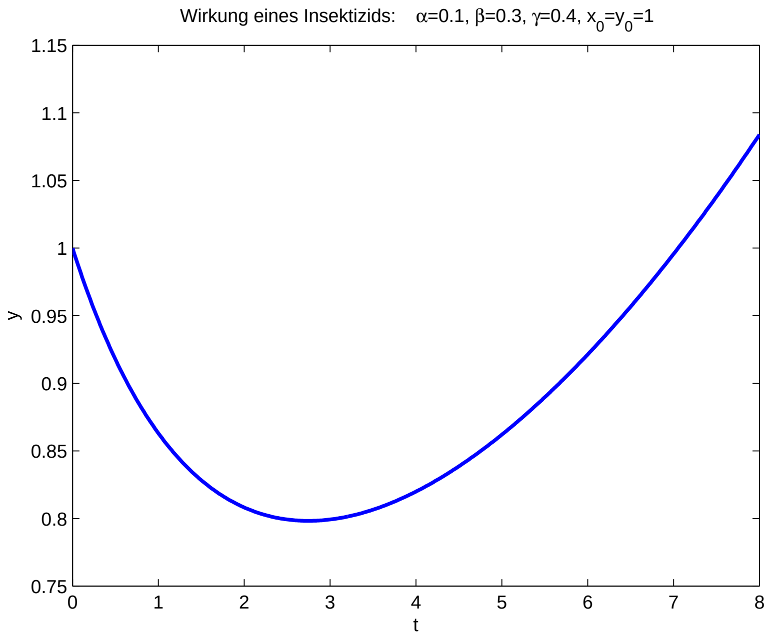
5. **Wirkung eines Insektizids**

Ein Insektizid impliziert eine Sterberate einer Insektenpopulation y proportional zur vorhandenen Menge x des Insektizids, welches selbst mit der Rate $\gamma\, x$ zerfalle. Ohne Wirkung dieses Insektizids möge sich die Insektenpopulation exponentiell vermehren.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\gamma\, x(t)\,, \quad \gamma > 0\\ \dot{y}(t) &= \alpha\, y(t) - \beta\, x(t)y(t)\,, \quad \alpha > 0,\, \beta > 0\end{aligned}$$

Lösung des AWP's $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$:

$$x(t) = x_0\, e^{-\gamma\, t}\,, \quad y(t) = y_0\, e^{A(t)} \quad \text{mit} \quad A(t) = \alpha\, t + \frac{\beta\, x_0}{\gamma}\left(e^{-\gamma\, t} - 1\right)$$



6. **Einfaches Räuber-Beute-Modell**

   $x(t)$ - Beute-Population, $y(t)$ - Räuber-Population

   Annahmen:

   - $x(t)$ entwickelt sich exponentiell bei Abwesenheit von y .
   - $y(t)$ stirbt exponentiell aus bei Abwesenheit von x .
   - Die Zahl der von y gefressenen x ist proportional der möglichen Anzahl von Begegnungen $x\,y$.

   Es ergibt sich folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \alpha\, x(t) - \beta\, x(t)y(t)\,, \\ \dot{y}(t) &= -\gamma\, y(t) + \delta\, x(t)y(t)\,. \end{aligned}$$

   Dabei sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ positive Parameter.

7. **Räuber-Beute-Modell mit begrenzter Weidekapazität**

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \alpha \left[1 - \frac{x(t)}{W}\right] x(t) - \beta\, x(t)y(t)\,, \\ \dot{y}(t) &= -\gamma\, y(t) + \delta\, x(t)y(t) - \mu[y(t)]^2\,. \end{aligned}$$

   Dabei sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta, W > 0$, $\mu \geq 0$. Im weiteren schreiben wir ein solches Differentialgleichungssystem kurz in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left[\alpha\left(1 - \frac{x}{W}\right) - \beta\, y\right] x\,, \\ \dot{y} &= [-\gamma + \delta\, x - \mu\, y]\, y\,. \end{aligned}$$

   Ferner vereinbaren wir, dass, falls nichts anderes gesagt wird, auftretende Parameter (wie $\alpha, \beta, \ldots$) stets positiv sind.

8. **Ein Konkurrenzmodell**

   - $x(t), y(t)$ - zwei Populationen mit gleicher Nahrungsquelle
   - $N(t) = \gamma_1 x(t) + \delta_1 y(t)$ - benötigte Nahrungsmenge pro Zeiteinheit
   - Ansatz:

$$\dot{x}(t) = \alpha \left(1 - \frac{N(t)}{A}\right) x(t)\,,$$

$$\dot{y}(t) = \beta \left(1 - \frac{N(t)}{B}\right) y(t)\,.$$

   Es folgt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [\alpha - \gamma(\gamma_1 x + \delta_1 y)]\, x\,, \\ \dot{y} &= [\beta - \delta(\gamma_1 x + \delta_1 y)]\, y\,, \end{aligned}$$

   wobei $\gamma = \alpha/A$ und $\delta = \beta/B$.

9. **Epidemie-Modelle**

   Eine Population unterteile sich in

   - $x(t)$ - Suszeptible, d.h. Mitglieder, die gesund, aber ansteckbar sind,
   - $y(t)$ - Infizierte,
   - $z(t)$ - aus dem Ausbreitungsprozess der Krankheit ausgeschiedene Mitglieder (Immunisierte, Tote).

   Annahmen:

   - verschwindende Latenzzeit,
   - Geburts- gleich Sterberate ($\Rightarrow$ konstante Populationsgröße),
   - Suszeptible werden nur bei Kontakten mit Infizierten angesteckt.

   (a) **Einfachstes Modell**:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\, x\, y\,, \\ \dot{y} &= \alpha\, x\, y - \beta\, y\,, \\ \dot{z} &= \beta\, y\,, \end{aligned}$$

   wobei $\alpha > 0$ - Ansteckungsrate, $\beta > 0$ - Beseitigungsrate. Es folgt $\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0$, d.h. $x + y + z = \text{const}$. Offenbar genügt es, die ersten beiden Gleichungen zu betrachten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\, x\, y\,, \\ \dot{y} &= \alpha\, x\, y - \beta\, y\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

   (b) **Modifiziertes Modell**:

   Wir gehen jetzt von einer Geburtenrate $\mu > 0$ aus, die gleich der Sterberate ist, und betrachten β als Gesundungsrate = Immunisierungsrate:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\, x\, y + \mu(x + y + z) - \mu\, x\,, \\ \dot{y} &= \alpha\, x\, y - \beta\, y - \mu\, y\,, \\ \dot{z} &= \beta\, y - \mu\, z\,. \end{aligned}$$

Es folgt wieder $\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}=0$, d.h. $x+y+z=N=\text{const}$, und wir brauchen nur die ersten beiden Gleichungen zu betrachten:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\, x\, y + \mu N - \mu\, x\,, \\ \dot{y} &= \alpha\, x\, y - \beta\, y - \mu\, y\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

(c) **Ein einfaches AIDS-Modell**:

- Die Sterberate $\mu+\mu_1$ Erkrankter ist größer als die Gesunder.
- Die Geburten werden reduziert um $\mu\,\alpha_1\, y$, da ein Anteil α_1 der Kinder von Infizierten bei der Geburt stirbt.
- Weiterhin ist eine vertikale Übertragung der Krankheit zu berücksichtigen. Die Rate der vertikalen Übertragung sei gleich q.

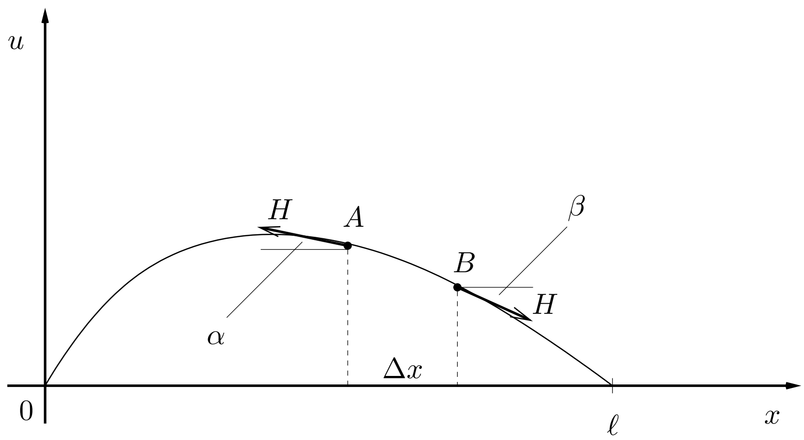
Es folgt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\, x\, y + \mu(N-\alpha_1 y - q\, y) - \mu\, x\,, \\ \dot{y} &= \alpha\, x\, y - \beta\, y - (\mu+\mu_1)y + \mu\, q\, y\,. \end{aligned}$$

Anfangswertprobleme: Bei den bisher betrachteten Beispielen sucht man i.Allg. Lösungen, die zu einem gegebenen Anfangszustand $x_0=x(0)$, $y_0=y(0)$, ... gehören.

7. **Das Problem der schwingenden Saite**

Wir setzen voraus, dass das Gewicht der Saite vernachlässigt werden kann und dass nur kleine Auslenkungen zu betrachten sind (d.h. Längen- und Spannungsänderungen sind vernachlässigbar).



Die gesuchte Auslenkung der Saite im Punkt x zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit $u(x,t)$. Die Summe der vertikalen Komponenten der Kräfte, die in den Punkten A und B wirken, ist gleich $F=H(\sin\alpha-\sin\beta)$. Da α und β nach Voraussetzung klein sind, gilt $\sin\alpha\approx\tan\alpha$ und $\sin\beta\approx\tan\beta$ und somit nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$F \approx H\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_B - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A\right) = H\,\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_C \Delta x\,.$$

Bezeichnen wir mit ρ die Dichte der Saite, so muss $F\approx\rho\,\Delta x\,\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_C$ gelten. Für $\Delta x\longrightarrow 0$ erhalten wir die (partielle) Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

mit einer positiven Konstanten $a^2 = \dfrac{H}{\rho}$ und den Randbedingungen

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0\,, \quad t \ge 0\,, \tag{1.4}$$

sowie den Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = f(x)\,, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x)\,, \quad 0 \le x \le \ell \tag{1.5}$$

(**Anfangs-Randwertproblem**).

Wir normieren ℓ auf π und machen den Ansatz (**Fouriersche Methode**)

$$u(x,t) = v(x)w(t)\,.$$

Aus (1.3) folgt

$$v(x)w''(t) = a^2 v''(x)w(t)\,,$$

so dass

$$\frac{w''(t)}{a^2 w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = \text{const} =: -\lambda$$

gelten muss. Wir erhalten die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$w''(t) + a^2\lambda w(t) = 0\,, \quad v''(x) + \lambda v(x) = 0\,. \tag{1.6}$$

Die Einbeziehung der Randbedingungen (1.4) liefert für die zweite dieser Differentialgleichungen die Randwertaufgabe

$$v'' + \lambda v = 0\,, \quad v(0) = v(\pi) = 0\,, \tag{1.7}$$

welches eigentlich ein **Eigenwertproblem** ist, da nur solche $\lambda \in \mathbb{R}$ interessieren, für die nichttriviale Lösungen von (1.7) existieren.

1.2 Die Lösung gewisser Differentialgleichungen

1. $x' = f(t)$
2. $x' = f(x)$ (Bsp. $x' = \cos^2 x$)
3. $x' = f(x)g(t)$ (Bsp. $x' + t\,x^2 = 0$, Spezialfall $x' = g(t)x$)
4. $x' = g(t)x + f(t)$ (Bsp. $x' = 2\,t\,x + (2t-1)e^t$ mit Variation der Konstanten)
5. $x'' = f(x)$ (Bsp. $x'' = -x$)
6. Wir betrachten das AWP $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = y_0 > 0$ zum Differentialgleichungssystem (1.1), Abschnitt 1.1. Division der zweiten Gleichung durch die erste ergibt

   $$y'(x) = \frac{\beta}{\alpha\, x} - 1\,,$$

   d.h. eine gewöhnliche Differentialgleichung vom Typ 1. Wir erhalten

   $$y(x) = \frac{\beta}{\alpha} \ln x - x + C\,,$$

d.h.

$$y(x) = y_0 + x_0 + \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{x}{x_0} - x\,.$$

Diskussion:

$$y'(x) = \frac{\beta}{\alpha\, x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x^* = \frac{\beta}{\alpha}\,,$$

$$y''(x^*) = -\frac{\beta}{\alpha\,(x^*)^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lok. Max.},$$

$$\lim_{x\to+0} y(x) = -\infty = \lim_{x\to+\infty} y(x)$$

Folgerungen:

- Ist $x_0 \le \beta/\alpha$, so klingt die Epidemie sofort ab.
- Ist $x_0 > \beta/\alpha$, so breitet sich die Epidemie bis $x = x^* = \beta/\alpha$ aus und klingt dann ab.
- Ein Teil der Population $x_1 > 0$ wird nicht von der Krankheit befallen.

1.3 Existenz und Eindeutigkeit

Zu einigen Beispielen im vorhergehenden Abschnitt haben wir Lösungen der entsprechenden AWP angegeben. Es stellt sich die Frage, ob diese Lösungen die einzigen sind.

- Für die einfachste Differentialgleichung

$$F'(t) = f(t)\,,$$

wobei die stetige Funktion $f(t)$ gegeben sei, können wir diese Frage sofort beantworten, da wir wissen, dass sich zwei Stammfunktionen zu einer Funktion nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

- Das Beispiel

$$\dot{x} = \sqrt{|x|}\,, \quad x(0) = 0$$

zeigt, dass die Eindeutigkeit der Lösung nicht immer gegeben ist, da sowohl $x(t) = 0$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$ als auch

$$x(t) = \begin{cases} 0 & : \ t \le 0\,, \\ \frac{t^2}{4} & : \ t > 0\,, \end{cases}$$

Lösungen dieses AWPs sind.

- Es kann auch sein, dass eine Lösung des AWPs nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert. So hat das AWP

$$\dot{x} = 1 + x^2\,, \quad x(0) = 0$$

die Lösung $x(t) = \tan t$, die nur für $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ existiert. (Vgl. auch das Beispiel $x' + t\,x^2 = 0$, $x(0) = x_0 < 0$ aus Abschnitt 1.2.)

Kapitel 2

Lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

2.1 Die matrixwertige Exponentialfunktion

Wir betrachten das AWP $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2$ für das System

$$\dot{x}_1 = -2\,x_1\,, \quad \dot{x}_2 = 3\,x_2\,.$$

Dieses System kann auch in der Form

$$\dot{x} = A\,x \quad \text{mit} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

geschrieben werden. Wir erhalten die Lösung

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1^0\,e^{-2t} \\ x_2^0\,e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix},$$

die man (vorerst formal) in der Form

$$x(t) = e^{tA}x^0$$

mit der Matrix

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

schreiben könnte. Das AWP $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2$ für

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 3\,x_2\,, \quad \dot{x}_2 = 2\,x_2$$

schreiben wir in der Form

$$\dot{x} = A\,x\,, \quad x(0) = x^0 \tag{2.1}$$

mit $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ mit den Eigenvektoren $v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $v^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Für die Matrix $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ gilt dann

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := P^{-1}A\,P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mittels der Koordinatentransformation $x = P\,y$ bzw. $y = P^{-1}x$ schreibt sich (2.1) als

$$\dot{y} = B\,y\,, \quad y(0) = y^0 := P^{-1}x^0\,, \tag{2.2}$$

also

$$\dot{y}_1 = -y_1\,, \quad \dot{y}_2 = 2\,y_2\,, \quad y_1(0) = y_1^0 := x_1^0 + x_2^0\,,\ y_2(0) = y_2^0 := x_2^0\,.$$

Mit der bereits oben eingeführten Schreibweise erhalten wir als Lösung von (2.2)

$$y(t) = e^{tB}y^0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix},$$

also

$$x(t) = P\,y(t) = P\,e^{tB}P^{-1}x^0 = \begin{bmatrix} (x_1^0 + x_2^0)e^{-t} - x_2^0\,e^{2t} \\ x_2^0 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Schreiben wir diese Lösung wieder in der Form $x(t) = e^{tA}x^0$, so müsste $e^{tA} = e^{tPBP^{-1}} = Pe^{tB}P^{-1}$ gelten. Im Weiteren werden wir sehen, dass eine solche Funktion e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tatsächlich definiert werden kann.

Eine jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kann als lineare Abbildung auf dem normierten Raum $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ mit $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ aufgefasst werden. Die Norm dieser Abbildung ist definiert als

$$\|A\| = \sup\left\{\|A\,x\| : x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \le 1\right\}.$$

Im Sinne der Konvergenz im normierten Raum $(\mathbb{R}^{n\times n}, \|.\|)$ definieren wir nun für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}\,A^2 + \ldots + \frac{1}{m!}\,A^m + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,A^k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\,A^k\,.$$

Satz 2.1 *Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist e^A wohldefiniert. Dabei gilt:*

(a) $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^AT\ \forall\, A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ T \in \mathcal{G}\mathbb{R}^{n\times n}$,

(b) $e^{A+B} = e^Ae^B\ \forall\, A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $A\,B = B\,A$.

Folgerung 2.2 *Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $t, s \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *Ist* $A = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$, *so* $e^{tA} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$.

(b) $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{tB}$, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(c) *Für* $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *gilt* $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$.

(d) *Ist* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, *so* $e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(e) *Für* $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *gilt*

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix}, \quad e^{tB} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{tC} = e^{at}\begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Satz 2.3 *Für beliebige* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *sowie für* $x(t) = e^{tA}x^0$, $t \in \mathbb{R}$, *gilt*

$$\dot{x}(t) = A\,e^{tA}x^0 = A\,x(t) \quad \textit{und} \quad x(0) = x^0 \,.$$

Folgerung 2.4 *Wir betrachten für eine gegebene Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und einen gegebenen Vektor* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = A\,x\,, \quad x(0) = x^0\,, \tag{2.3}$$

und definieren $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *durch* $\Phi(t,x) = e^{tA}x$. *Dann gilt*

(a) $\Phi(0,x) = x \;\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\Phi(t,\Phi(s,x)) = \Phi(t+s,x) \;\forall\, t,s \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^n$.

(c) $\varphi_{x^0}(t) = \Phi(t,x^0)$ *ist Lösung des AWPs* (2.3), *d.h., es gilt*

$$\dot{\varphi}_{x^0}(t) = A\,\varphi_{x^0}(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Diese Lösung ist eindeutig bestimmt.

Man nennt $\mathbb{R}^n$ den **Phasenraum** und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ den **erweiterten Phasenraum** sowie $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ den durch das Problem (2.3) definierten **Fluss** bzw. das zum Problem (2.3) gehörige **dynamische System**. Die Abbildung $\varphi(t) = \varphi_{x^0}(t) = \Phi(t,x^0)$, $t \in \mathbb{R}$, beschreibt einen Weg im $\mathbb{R}^n$, der durch den Punkt x^0 geht, die sogenannte **Flusslinie** durch x^0 . Das Bild (die Kurve) selbst bezeichnet man als **Orbit** (oder auch **Lösungskurve, Bahnkurve, Trajektorie**)

$$\varphi_{x^0}(\mathbb{R}) = \left\{\Phi(t,x^0) : t \in \mathbb{R}\right\}\,.$$

Unter dem **Phasenportrait** des Systems in (2.3) versteht man die Familie aller Orbits $\varphi_x(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Beispiel 2.5 *Wir betrachten nochmals die Systeme (vgl.* (2.1) *und* (2.2)*)*

$$\dot{x} = A\,x \quad \textit{und} \quad \dot{y} = B\,y$$

mit $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *und* $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1}A\,P$, *wobei* $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *und verschaffen uns eine Vorstellung von den Phasenportraits dieser beiden Systeme.*

2.2 Zweidimensionale lineare Systeme

Wir betrachten für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\dot{x} = A\,x\,. \tag{2.4}$$

Setzen wir $\det A \neq 0$ voraus, so ist Θ der einzige stationäre Punkt zu (2.4). Wir wollen uns jetzt einen Überblick über mögliche Phasenportraits in der Umgebung dieses Punktes verschaffen. Es genügt, die verschiedenen möglichen (reellen) Jordanschen Normalformen von A zu betrachten (vgl. Abschnitt 2.3):

1. $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \Longrightarrow \Phi(t,x) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t}x_1 \\ e^{\mu t}x_2 \end{bmatrix}$

   (a) $\lambda < 0 < \mu \Longrightarrow \Theta$ ist **Sattelpunkt**.

   (b) $\lambda \leq \mu < 0 \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = \Theta \Longrightarrow \Theta$ ist **stabiler Knoten**.

(c) $0 < \lambda \leq \mu \Longrightarrow \lim_{t\to-\infty} \Phi(t,x) = \Theta \Longrightarrow \Theta$ ist **instabiler Knoten**.

2. $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Longrightarrow \Phi(t,x) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} x_1 + t\, x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

   (a) $\lambda < 0 \Longrightarrow \Theta$ ist **stabiler Knoten**.

   (b) $\lambda > 0 \Longrightarrow \Theta$ ist **instabiler Knoten**.

3. $A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$

   $$\Longrightarrow \Phi(t,x) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} x_1 \cos\beta t - x_2 \sin\beta t \\ x_1 \sin\beta t + x_2 \cos\beta t \end{bmatrix} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\; e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t + \theta) \\ \sin(\beta t + \theta) \end{bmatrix},$$

   wobei $\cos\theta = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, $0 \leq \theta < \pi$.

   (a) $\alpha = 0 \Longrightarrow$ Die Orbits sind Kreise, Θ heißt **Zentrum**.

   (b) $\alpha < 0 \Longrightarrow \Theta$ ist **stabiler Fokus**.

   (c) $\alpha > 0 \Longrightarrow \Theta$ ist **instabiler Fokus**.

Zusammenfassung: Seien $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\delta = \det A$ und $\tau = \operatorname{trace} A = a_{11} + a_{22}$. Dann ist das charakteristische Polynom von A gegeben durch

$$p_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \tau\,\lambda + \delta\,.$$

Somit sind $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}\right)$ die Eigenwerte von A, und es gilt:

(a) Ist $\delta < 0$ ($\Rightarrow \lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$), so ist Θ ein Sattelpunkt.

(b) Sind $\delta > 0$ und $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ ($\Rightarrow \lambda_{1,2}$ sind reell und haben gleiches Vorzeichen), so ist Θ ein Knoten, und zwar ein stabiler für $\tau < 0$, ein instabiler für $\tau > 0$.

(c) Sind $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$ und $\tau \neq 0$ ($\Rightarrow \lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} \neq 0$, $\mathrm{Im}\,\lambda_{1,2} \neq 0$), dann ist Θ ein stabiler ($\tau < 0$) bzw. instabiler ($\tau > 0$) Focus.

(d) Sind $\delta > 0$ und $\tau = 0$ ($\Rightarrow \lambda_1 = \overline{\lambda_2} \neq 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} = 0$), so ist Θ ein Zentrum.

Ist $\delta = 0$, so nennt man Θ einen **entarteten Gleichgewichtspunkt**. In diesem Fall ist Θ **kein** isolierter Gleichgewichtspunkt.

Beispiel 2.6 *Für* $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *haben wir* $\lambda_{1,2} = \pm 2\mathbf{i}$. *Die Lösung des entsprechenden AWPs lautet*

$$\varphi_{x^0}(t) = \begin{bmatrix} x_1^0 \cos 2t - 2x_2^0 \sin 2t \\ \frac{1}{2} x_1^0 \sin 2t + x_2^0 \cos 2t \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix}.$$

Es folgt

$$[\varphi_1(t)]^2 + 4[\varphi_2(t)]^2 = (x_1^0)^2 + 4(x_2^0)^2 = \text{const}\,,$$

d.h. die Lösungskurven sind Ellipsen.

2.3 Die Jordansche Normalform, ein Stabilitätskriterium

Wir erinnern an einige Fakten aus der Linearen Algebra, die Jordansche Normalform betreffend:

(a) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und $\lambda_j = \alpha_j + \mathbf{i}\beta_j$, $\overline{\lambda_j} = \alpha_j - \mathbf{i}\beta_j$, $j = k+1, \ldots, k+m$, mit $k + 2m = n$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und $\beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann existiert eine Basis $\left\{u^1, \ldots, u^k, v^{k+1}, u^{k+1}, \ldots, v^{k+m}, u^{k+m}\right\}$ des Raumes $\mathbb{R}^n$, wobei die Vektoren u^j , $j = 1, \ldots, k$, und $w^{k+j} = u^{k+j} + \mathbf{i}v^{k+j}$, $j = 1, \ldots, m$, verallgemeinerte Eigenvektoren der Matrix A sind, so dass für die (invertierbare) Matrix $P = \left[u^1 \ \cdots \ u^k \ v^{k+1} \ u^{k+1} \ \cdots \ v^{k+m} \ u^{k+m}\right]$ die Beziehung

$$P^{-1} A\, P = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{bmatrix}$$

mit den Jordan-Blöcken B_j der Gestalt

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

im Fall eines reellen Eigenwertes $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, \ldots, k$, oder der Gestalt

$$\begin{bmatrix} D & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & D \end{bmatrix}$$

mit $D = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ und $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ im Fall eines komplexen Eigenwertes $\lambda = \alpha + \mathbf{i}\beta = \alpha_j + \mathbf{i}\beta_j$, $j = 1, \ldots, m$, gilt.

(b) Sind u^j , $j = 1, \ldots, k$, und $w^{k+j} = u^{k+j} + \mathbf{i}v^{k+j}$, $j = 1, \ldots, m$, verallgemeinerte Eigenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass das System $\left\{u^1, \ldots, u^k, v^{k+1}, u^{k+1}, \ldots, v^{k+m}, u^{k+m}\right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, so ist $A = S + N$, wobei

$$P^{-1} S P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & \\ & & & D_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & D_m \end{bmatrix} , \quad D_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} ,$$

gilt, die Matrix $N = A - S$ nilpotent von der Ordnung $r \leq n$ und mit der Matrix S vertauschbar ist, d.h., es gilt $N^r = \Theta$ und $S\,N = N\,S$. Es ist dann

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{t(S+N)} = e^{tS} e^{tN} = P e^{tP^{-1}SP} P^{-1} \left(I + t\,N + \cdots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\, N^{r-1} \right) \\ &= P \operatorname{diag}\left[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_k t}, e^{tD_1}, \ldots, e^{tD_m} \right] P^{-1} \left(I + t\,N + \cdots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\, N^{r-1} \right) , \end{aligned}$$

wobei (vgl. Folgerung 2.2,(c))

$$e^{tD_j} = e^{\alpha_j t} \begin{bmatrix} \cos(\beta_j t) & -\sin(\beta_j t) \\ \sin(\beta_j t) & \cos(\beta_j t) \end{bmatrix}.$$

Beispiel 2.7 *Wir berechnen $e^{tA}x^0$ für $x^0 \in \mathbb{R}^3$ und*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Folgerung 2.8 (Stabilitätskriterium) *Es gilt*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi_{x^0}(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \Phi(t, x^0) = \Theta \quad \forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n$$

genau dann, wenn die Realteile aller Eigenwerte von A negativ (positiv) sind.

Folgerung 2.9 *Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ n-fache Nullstelle von $p_A(\lambda)$, so können wir in der Aussage* (b) *die Vektoren*

$$u^j = e^j\,, \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

wählen und erhalten

$$A = \lambda I + N$$

mit einer nilpotenten Matrix N.

Beispiel 2.10 *Wir wenden Folgerung 2.9 auf die Matrix A des Beispiels 2.7 an.*

Beispiel 2.11 *Wir bestimmen die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = A\,x$, $x(0) = x^0$ für die Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.4 Inhomogene lineare Systeme

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = A\,x + f(t) \tag{2.5}$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = x^0\,. \tag{2.6}$$

Wir wissen, dass

$$\mathcal{L} = \left\{\varphi_c(t) = e^{tA}c : c \in \mathbb{R}^n\right\}$$

die Menge aller Lösungen der Gleichung (2.5) im Fall $f \equiv 0$ ist (vgl. Folgerung 2.4). Diese ist ein linearer Teilraum des Raumes $\mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Nach Folgerung 2.4 ist die **Anfangswertabbildung**

$$a_0 : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}^n\,, \quad \varphi \mapsto \varphi(0)$$

eine bijektive lineare Abbildung.

Folgerung 2.12 *Der Lösungsraum $\mathcal{L}$ des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = A\,x$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat die Dimension* $\dim \mathcal{L} = n$.

Für eine Lösung von (2.5) machen wir den Ansatz der **Variation der Konstanten**

$$\psi(t) = e^{tA}c(t)\,.$$

Es folgt

$$c(t) = c(0) + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds\,.$$

Wählen wir $c(0) = x^0$, so erhalten wir die eindeutig bestimmte Lösung des AWPs (2.5),(2.6).

Folgerung 2.13 *Das AWP* (2.5),(2.6) *hat die eindeutige Lösung*

$$\psi_{x^0}(t) = e^{tA}\left[x^0 + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds\right]\,.$$

Ist $\left\{\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)\right\}$ irgendeine Basis von $\mathcal{L}$, so lässt sich jede Lösung von $\dot{x} = A\,x$ in der Form $\Phi(t)c$ mit $\Phi(t) = \left[\begin{array}{ccc} \varphi^1(t) & \cdots & \varphi^n(t) \end{array}\right]$ und $c \in \mathbb{R}^n$ schreiben. Da das AWP $\dot{x} = A\,x$, $x(0) = x^0$ eindeutig lösbar ist, ergeben sich die Invertierbarkeit von $\Phi(0)$ und die Formel $\Phi(t) = \Phi(0)e^{tA}$. Die Lösung von (2.5),(2.6) kann damit in der Form

$$\psi_{x^0}(t) = \Phi(t)\left[\Phi(0)^{-1}x^0 + \int_0^t \Phi(s)^{-1} f(s)\,ds\right]$$

geschrieben werden.

2.5 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Es seien $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}$. Wir suchen eine Funktion $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = g(t) \tag{2.7}$$

genügt. Diese Gleichung können wir als Differentialgleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& x_2 \\ \dot{x}_2 &=& x_3 \\ &\vdots& \\ \dot{x}_{n-1} &=& x_n \\ \dot{x}_n &=& -a_1 x_n - \ldots - a_n x_1 + g(t) \end{array}$$

schreiben, d.h., als

$$\dot{x} = A\,x + f(t) \tag{2.8}$$

mit

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{array}\right] \quad \text{und} \quad f(t) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ g(t) \end{array}\right]\,. \tag{2.9}$$

Ist $\psi(t)$ Lösung von (2.7) , so ist $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \psi(t) & \psi'(t) & \cdots & \psi^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}^T$ Lösung von (2.8), und ist $\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{bmatrix}^T$ Lösung von (2.8), so ist $\psi(t) = \varphi_1(t)$ Lösung von (2.7).

2.5.1 Die Struktur der Lösung

Das charakteristische Polynom der Matrix A aus (2.9) ist gleich

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\,.$$

Man nennt A die **Begleitmatrix** des Polynoms $p(\lambda)$. Der Rang der Matrix $A - \lambda I$ für A aus (2.9) ist stets $\geq n-1$. Somit hat jeder Eigenwert der Matrix A die geometrische Vielfachheit 1 . Hieraus ergibt sich, dass folgende Funktionen eine Basis des Lösungsraumes (ein sogenanntes **Fundamentalsystem** von Lösungen) der homogenen ($g(t) \equiv 0$) Gleichung (2.7) bilden:

- Ist $\mu \in \mathbb{R}$ m-fache Nullstelle des Polynoms $p(\lambda)$, so nehme man die Funktionen

  $$t^k e^{\mu t}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1\,,$$

  zum Fundamentalsystem hinzu.

- Ist $\alpha + \mathbf{i}\beta$ mit $\beta > 0$ eine m-fache Nullstelle von $p(\lambda)$, so nehme man die Funktionen

  $$t^k e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,,\ t^k e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1\,,$$

  zum Fundamentalsystem hinzu.

Die Differenz zweier Lösungen der Gleichung (2.7) ist eine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung. Sind also $\{\varphi_k(t) : k = 1, \ldots, n\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Gleichung zu (2.7) und $\psi_s(t)$ eine **spezielle Lösung** der (inhomogenen) Gleichung (2.7), so ist die Lösungsmenge der Differentialgleichung (2.7) gleich

$$\mathcal{L} = \{c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t) + \psi_s(t) : c_j \in \mathbb{R}\}\,.$$

Man nennt $c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t) + \psi_s(t)$ die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung (2.7). Wie man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung finden kann, diskutieren wir am folgenden Beispiel und im Abschnitt 2.5.2.

Beispiel 2.14 *Wir betrachten die Differentialgleichung eines Federschwingers*

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + k\,x = F\cos(\omega_0 t)\,.$$

Dabei bezeichnen $m > 0$ die Größe der schwingenden Masse, $\rho \geq 0$ einen Reibungskoeffizienten und $k > 0$ die Federkonstante aus dem Hooke'schen Gesetz. Die rechte Seite beschreibt eine periodische äußere Kraft, die an der schwingenden Masse angreift. Wir schreiben diese Differentialgleichung in der Form

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta^2 x = F_0\cos(\omega_0 t)$$

mit $\alpha = \frac{\rho}{2m}$, $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$ sowie $F_0 = \frac{F}{m}$ und betrachten die Fälle

- *$\alpha \geq \beta$ (starke Dämpfung),*
- *$0 < \alpha < \beta$ (schwache Dämpfung),*
- *$\alpha = 0$ (harmonischer Federschwinger).*

Eine spezielle Lösung der (inhomogenen) Differentialgleichung bestimmen wir dabei mittels **Variation der Konstanten** *oder mittels eines speziellen* **Lösungsansatzes**.

2.5.2 Die Laplace-Transformation

Im Folgenden lernen wir eine Methode zur Lösung eines Anfangswertproblems für eine lineare Differentialgleichung bzw. für Systeme solcher Gleichungen kennen.

1. Es seien $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\sigma = \sigma(f) \in \mathbb{R}$ eine Zahl, so dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$(\mathcal{L}f)(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

für alle $s > \sigma$ existiert. Wir nennen dann $(\mathcal{L}f)(s)\,,\ s > \sigma$ **Laplace-Transformierte** der Funktion f . Für $(\mathcal{L}f)(s)$ schreiben wir auch $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$.

2. Es gilt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Big(\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)\Big)(s) = \alpha(\mathcal{L}f)(s) + \beta(\mathcal{L}g)(s)\,, \quad s > \sigma = \max\left\{\sigma(f), \sigma(g)\right\} .$$

3. Wir berechnen die Laplace-Transformierte für einige Funktionen $f(t)$:

   (a) $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \dfrac{1}{s-a}\,, \quad s > a\,,\ a \in \mathbb{R}\,,$

   (b) $\mathcal{L}\left\{\cosh(at)\right\} = \dfrac{s}{s^2 - a^2}\,, \quad s > |a|\,,\ a \in \mathbb{R}\,,$

   (c) $\mathcal{L}\left\{e^{\mathbf{i}at}\right\} = \dfrac{1}{s - \mathbf{i}a}\,, \quad s > 0\,,\ a \in \mathbb{R}\,,$

   (d) $\mathcal{L}\left\{\cos(at)\right\} = \dfrac{s}{s^2 + a^2}\,, \quad \mathcal{L}\left\{\sin(at)\right\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}\,, \quad s > 0\,,\ a \in \mathbb{R}\,,$

   (e) $\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\cos(\omega t)\right\} = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}\,, \quad \mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\sin(\omega t)\right\} = \dfrac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}\,,$
   $s > \alpha\,,\ \alpha, \omega \in \mathbb{R}\,.$

Man sagt, die Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist von **exponentieller Ordnung** $\sigma \in \mathbb{R}$, wenn eine Konstante c existiert, so dass $|f(t)| \le c\, e^{\sigma t}\,,\ t \ge 0$, gilt. Ist $f \in \mathbf{C}[0, \infty)$ von exponentieller Ordnung σ , so existiert $(\mathcal{L}f)(s)$ für $s > \sigma$.

4. **Differentiationssatz**: Ist $f \in \mathbf{C}^{(k)}[0, \infty)$ und gilt

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f^{(j)}(t) = 0 \quad \forall\, j = 0, \ldots, k-1\,,\ s > \sigma\,,$$

so ist

$$\mathcal{L}\left\{f^{(k)}(t)\right\} = s^k \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j} f^{(j)}(0)\,.$$

5. **Ähnlichkeitssatz**: Sind $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\,,\ s > \sigma$, und $a > 0$, so gilt

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)\,, \quad s > a\,\sigma\,.$$

6. **Dämpfungssatz**: Sind $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\,,\ s > \sigma$, und $a \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a)\,, \quad s > \sigma + a\,.$$

7. **Eindeutigkeitssatz**: Sei $f \in \mathbf{C}^{(1)}[0, \infty)$ von exponentieller Ordnung σ . Dann gilt: Aus $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = 0\,,\ s > \sigma$, folgt $f(t) = 0\,,\ t \ge 0$ (siehe z.B. [1, Satz 9.3]).

8. **Faltungssatz**: Sind $f, g \in \mathbf{C}[0,\infty)$ von exponentieller Ordnung σ und

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\,, \quad t \geq 0\,,$$

so ist

$$(\mathcal{L}(f * g))(s) = (\mathcal{L}f)(s) \cdot (\mathcal{L}g)(s)\,, \quad s > \sigma\,.$$

Beispiel 2.15 *Wir lösen das AWP (vgl. Beispiel 2.14)*

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \beta^2 x = F_0 \cos(\omega_0 t)\,, \quad x(0) = x_0\,,\ \dot{x}(0) = x_1\,,$$

für den Fall der schwachen Dämpfung $\beta > \alpha > 0$ durch Anwendung der Laplace-Transformation.

Kapitel 3

Dynamische Systeme und autonome Differentialgleichungssysteme

3.1 Der Begriff des dynamischen Systems

Definition 3.1 *Unter einem* **dynamischen System** *bzw. einem (globalen)* **Fluss** *auf der offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine stetige Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, welche den folgenden zwei Axiomen genügt (vgl. Folgerung 2.4):*

(F1) $\Phi(0, x) = x$ *für alle* $x \in M$,

(F2) $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$ *für alle* $t, s \in \mathbb{R}$ *und alle* $x \in M$.

Die Menge M heißt **Phasenraum** *und* $\mathbb{R} \times M$ **erweiterter Phasenraum**. *Unter der* **Flusslinie** *φ_x versteht man die Bewegung des Punktes $x \in M$ unter der Wirkung des Flusses Φ, d.h. die Abbildung $\varphi_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$, $t \mapsto \Phi(t, x)$. Das Bild $\varphi_x(\mathbb{R}) = \{\varphi_x(t) : t \in \mathbb{R}\}$ heißt* **Bahn**, **Orbit** *oder* **Trajektorie** *des Punktes x.*

Kennt man also alle Flusslinien φ_x, $x \in M$, so kennt man auch den Fluss Φ, und umgekehrt. Die Flussaxiome sind äquivalent zu

(F1) $\varphi_x(0) = x$ für alle $x \in M$,

(F2) $\varphi_y(s) = \varphi_x(s + t)$ für $y = \varphi_x(t)$ und für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und alle $x \in M$.

Haben zwei Orbits einen Punkt gemeinsam, so sind sie identisch. Das kann man auch so formulieren: Die Relation $x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \varphi_x(\mathbb{R})$ auf M ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind dabei die Trajektorien.

Definition 3.2 *Wir unterscheiden folgende Typen von Flusslinien:*

(a) *Ist die Flusslinie φ_x konstant (d.h. $\varphi_x(t) = x \ \forall\, t \in \mathbb{R}$ wegen (F1)), so heißt x* **Fixpunkt**, **Gleichgewichtspunkt** *oder* **stationärer Punkt**.

(b) *Eine Flusslinie φ_x heißt* **periodisch** *bzw. der zugehörige Punkt $x \in M$ heißt* **periodischer Punkt** *des Flusses Φ, wenn ein kleinstes $p_0 > 0$ existiert, so dass $\Phi(t + p_0, x) = \Phi(t, x)$ für ein $t \in \mathbb{R}$ gilt. (Aus dem zweiten Flussaxiom folgt, dass diese Beziehung dann für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.)*

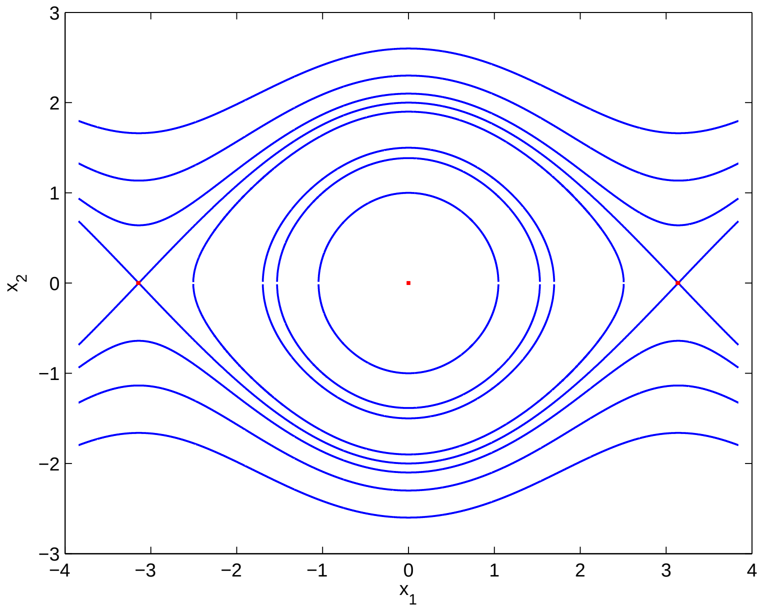
(c) *Die Flusslinie φ_x heißt* **injektiv**, *wenn die Abbildung $\varphi_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ injektiv ist.*

Satz 3.3 *Außer konstanten, periodischen und injektiven Flusslinien gibt es keine anderen Typen von Flusslinien.*

Beispiel 3.4 *Die Differentialgleichung des ungedämften Pendels $\ddot{y} + \sin y = 0$ ist äquivalent zu dem System*

$$\dot{x}_1 = x_2\,, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1\,. \tag{3.1}$$

Betrachtet man (numerisch berechnete) Lösungskurven dieses Systems, so findet man neben stationären Punkten sowohl periodische als auch injektive "Flusslinien". Wir haben in den weiteren Betrachtungen zu klären, ob diese Lösungskurven wirklich Flusslinien eines dynamischen Systems sind.



Lösungskurven des Systems (3.1)

Definition 3.5 *Unter dem* **Geschwindigkeitsfeld** $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *eines bzgl. $t \in \mathbb{R}$ differenzierbaren Flusses $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ versteht man das Vektorfeld*

$$v(x) = \frac{\partial \Phi(0, x)}{\partial t} = \dot{\varphi}_x(0)\,.$$

Im Fall eines bzgl. $t \in \mathbb{R}$ differenzierbaren Flusses sind die Flusslinien $\varphi_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = v(x)\,.$$

Wir gehen nun umgekehrt vor.

Definition 3.6 *Es sei $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Vektorfeld. Dann nennt man*

$$\dot{x} = v(x) \tag{3.2}$$

bzw. ausführlich geschrieben

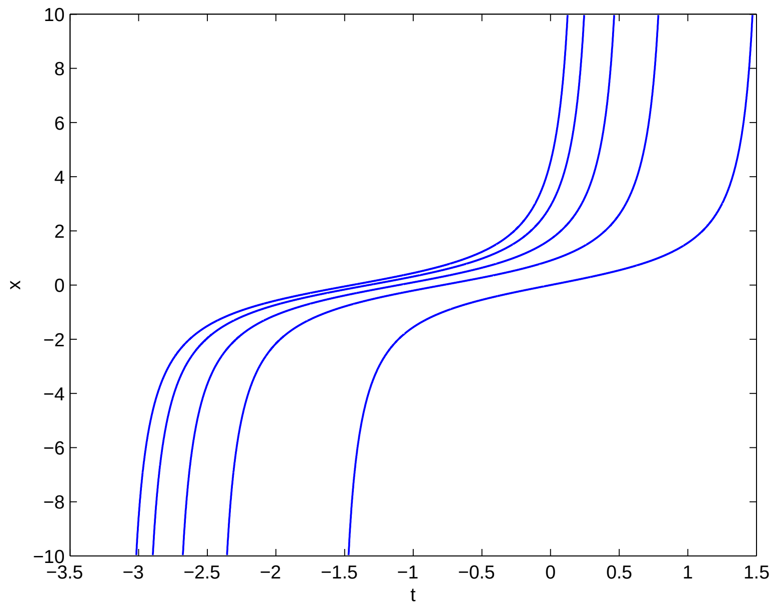
$$\dot{x}_j = v_j(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

ein **autonomes Differentialgleichungssystem**. *Unter einer* **Lösung** *von* (3.2) *versteht man einen differenzierbaren Weg* $\varphi : (a,b) \longrightarrow M$ *, so dass* $\dot\varphi(t) = v(\varphi(t))$ *für alle* $t \in (a,b)$ *gilt. Das Bild von* φ *, d.h.* $\{\varphi(t) : a < t < b\}$ *, heißt* **Lösungskurve** *oder* **Integralkurve** *von* (3.2)*. Diese Kurve bzw. die Lösung* $\varphi : (a,b) \longrightarrow M$ *nennt man* **maximal***, wenn das Definitionsinterval nicht auf ein Intervall* (α_0, β_0) *mit* $\alpha_0 < \alpha$ *oder* $\beta_0 > \beta$ *vergrößert werden kann, so dass auch* $\varphi : (\alpha_0, \beta_0) \longrightarrow M$ *Lösung von* (3.2) *ist.*

Beispiel 3.7 *Seien* $M = \mathbb{R}$ *,* $v(x) = 1 + x^2$ *(vgl. Abschnitt 1.3). Die Lösung* $\varphi(t) = \tan t$ *ist auf* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *erklärt und lässt sich nicht darüber hinaus differenzierbar fortsetzen. Aber das AWP*

$$\dot x = 1 + x^2 \,, \quad x(0) = x^0$$

hat die (eindeutige) maximale Lösung $\varphi_{x^0} : \left(-\frac{\pi}{2} - t_0, \frac{\pi}{2} - t_0\right) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ t \mapsto \tan(t + t_0)$ *, wobei* $t_0 = \arctan x^0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Lösungen zu Beispiel 3.7 für $x^0 = 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8$

3.2 Das Existenz- und Eindeutigkeitstheorem

3.2.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Wir erinnern an den Banachschen Fixpunktsatz.

1. Es seien (E,d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : E \longrightarrow E$ eine kontrahierende Abbildung, d.h., es gibt eine Zahl $q \in (0,1)$, so dass

$$d(f(x), f(y)) \le q\, d(x,y) \quad \forall\, x, y \in E$$

gilt. Dann ist $f : E \longrightarrow E$ auch stetig, d.h., aus $x_n \longrightarrow x$ in E folgt $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ in E .

2. Sind $x_0 \in E$ beliebig gewählt und $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (Methode der sukzessiven Approximation) so ist $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge, so dass ein $x^* \in E$ existiert mit $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$.

3. Aus $x_{n+1} = f(x_n)$ und aus der Stetigkeit von f folgt $x^* = f(x^*)$, d.h., der Punkt x^* ist Fixpunkt der Abbildung f.

4. Die kontrahierende Abbildung $f : E \longrightarrow E$ hat nur einen Fixpunkt.

5. Es gilt die a-priori-Abschätzung

$$d(x_n, x^*) \le \frac{q^n d(x_1, x_0)}{1-q}\,.$$

3.2.2 Lokale Existenz- und Eindeutigkeitsaussage

Im Weiteren sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

Definition 3.8 *Wir nennen ein Vektorfeld $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$* **lokal Lipschitz-stetig***, wenn für jede abgeschlossene Kugel $K_r(x^0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| \le r\right\} \subset M$ eine Konstante $L = L(r, x^0)$ existiert, so dass*

$$|v(x) - v(y)| \le L|x - y| \quad \forall\, x, y \in K_r(x^0) \tag{3.3}$$

gilt.

Bemerkung 3.9 *Ist $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so ist $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig.*

Wir betrachten das AWP

$$\dot{x} = v(x)\,, \quad x(0) = x^0 \in M\,. \tag{3.4}$$

Ist $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (3.4), so folgt durch Integration von 0 bis $t \in (a, b)$

$$\varphi(t) = x^0 + \int_0^t v(\varphi(s))\, ds\,, \quad t \in (a, b)\,. \tag{3.5}$$

Jede stetige Lösung dieser Gleichung ist auch Lösung von (3.4). Durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes auf die Integralgleichung (3.5) erhalten wir folgende lokale Existenz- und Eindeutigkeitsaussage.

Satz 3.10 *Ist $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, so existiert zu jedem $x^0 \in M$ ein $a > 0$, so dass das AWP (3.4) auf dem Intervall $(-a, a)$ eine eindeutige Lösung besitzt.*

Beispiel 3.11 *Wenden wir die Methode der sukzessiven Approximation auf die zu dem AWP $\dot{x} = x$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ $(M = \mathbb{R})$ gehörende Integralgleichung*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(s)\, ds$$

mit $\varphi_0(t) = x_0$ an, so erhalten wir

$$\varphi_n(t) = x_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{n!}\,.$$

3.2.3 Die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten

Lemma 3.12 *Es seien $a > 0$ und $u : [0,a] \longrightarrow [0,\infty)$ stetig. Ferner mögen Konstanten $B \geq 0$ und $K \geq 0$ existieren, so dass*

$$u(t) \leq B + K \int_0^t u(s)\,ds \quad \forall\, t \in [0,a]$$

gilt. Dann ist

$$u(t) \leq B\,e^{Kt} \quad \forall\, t \in [0,a]\,.$$

Satz 3.13 *Ist $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, so existieren zu jedem $x^0 \in M$ ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$, so dass für eine Lösung $\varphi(t) = \varphi_{x^0}(t)$ des AWPs (3.4) und für jede Lösung $\psi(t) = \varphi_{y^0}(t)$ des AWPs*

$$\dot{x} = v(x)\,, \quad x(0) = y^0 \in U_\varepsilon(x^0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < \varepsilon\right\}$$

gilt

$$|\psi(t) - \varphi(t)| \leq |y^0 - x^0| e^{K|t|}\,, \quad t \in (-\delta, \delta)\,.$$

(Insbesondere haben alle diese Lösungen $\psi(t)$ ein gemeinsames Definitionsintervall $(-\delta,\delta)$.) Dabei ist die Konstante $K > 0$ von $y^0 \in U_\varepsilon(x^0)$ unabhängig.

Die Werte $\varphi_x(t)$, $t \in (-\delta,\delta)$, hängen also in $x = x^0$ stetig von den Anfangswerten ab.

3.2.4 Existenz- und Eindeutigkeitstheorem. Der Begriff des lokalen Flusses

Theorem 3.14 *Sind $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, so existiert zu jedem $x^0 \in M$ genau eine maximale Lösung $\varphi_{x^0} : (a_{x^0}, b_{x^0}) \longrightarrow M$ des AWPs $\dot{x} = v(x)$, $x(0) = x^0$.*

Wir definieren mit den Bezeichnungen des Theorems 3.14

$$\mathcal{A} := \{(t,x) : x \in M\,,\ t \in (a_x, b_x)\} \subset \mathbb{R} \times M$$

und

$$\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow M\,, \quad (t,x) \mapsto \varphi_x(t)\,.$$

Dann gilt $0 \in (a_x, b_x)$ für alle $x \in M$ und

(Fℓ1) $\Phi(0,x) = x \ \ \forall\, x \in M\,.$

Für $t_0 \in (a_x, b_x)$ und $t \in (a_y, b_y)$ mit $y = \Phi(t_0, x)$ gilt $\varphi_x(t_0) = y$ und mit $\varphi(t) := \varphi_x(t + t_0)$

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_x(t+t_0) = v(\varphi_x(t+t_0)) = v(\varphi(t)) \quad \text{und} \quad \varphi(0) = y\,.$$

Aus Theorem 3.14 folgt

$$\Phi(t+t_0, x) = \varphi_x(t+t_0) = \varphi(t) = \varphi_y(t) = \Phi(t, \Phi(t_0,x))\,.$$

Also:

(Fℓ2) $\Phi(s, \Phi(t,x)) = \Phi(s+t, x) \ \ \forall\, x \in M$ und $\forall\, s,t \in \mathbb{R}$ mit $(t,x) \in \mathcal{A}$ und $(s, \Phi(t,x)) \in \mathcal{A}\,.$

Definition 3.15 *Eine stetige Abbildung $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow M$ nennen wir* **lokalen Fluss**, *wenn*

$$\mathcal{A} = \{(t,x) : x \in M,\, a_x < t < b_x\} \subset \mathbb{R} \times M$$

mit $-\infty \le a_x < 0 < b_x \le +\infty \;\forall\, x \in M$ die Eigenschaft hat, dass für jedes $x^0 \in M$ ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$ existieren, so dass $(-\delta,\delta) \times U_\varepsilon(x^0) \subset \mathcal{A}$ gilt, und wenn die zwei Flussaxiome ($\mathrm{F}_\ell 1$) und ($\mathrm{F}_\ell 2$) erfüllt sind. Die Abbildungen $\varphi_x : (a_x, b_x) \longrightarrow M$, $t \mapsto \Phi(t,x)$ heißen wieder **Flusslinien** *und $\Gamma_x = \{\varphi_x(t) : a_x < t < b_x\}$* **Orbit, Trajektorie oder Bahnkurve** *des Punktes $x \in M$. Das Intervall (a_x, b_x) nennen wir* **Lebensintervall** *von $x \in M$. Ist $-\infty < a_x$ ($b_x < \infty$), so sagt man, dass x endliches unteres (oberes) Alter hat.*

Satz 3.16 *Sind $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $\varphi_{x^0} : (a_{x^0}, b_{x^0}) \longrightarrow M$ die maximalen Lösungen von $\dot{x} = v(x)$, $x(0) = x^0$, so ist $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow M$, $(t,x) \mapsto \varphi_x(t)$ ein lokaler Fluss, wobei $\mathcal{A} = \{(t,x) : x \in M,\, a_x < t < b_x\}$.*

Bemerkung 3.17 *Ein beliebiger lokaler Fluss $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow M$ hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Jedes $x^0 \in M$ besitzt eine Umgebung $U_\varepsilon(x^0)$, so dass alle $x \in U_\varepsilon(x^0)$ ein gemeinsames Lebensintervall haben.*

(b) *Ist $M_0 \subset M$ kompakt, so haben alle $x \in M_0$ ein gemeinsames Lebensintervall.*

(c) *Hat $x \in M$ endliches unteres (oberes) Alter a_x (b_x) und ist $M_0 \subset M$ kompakt, so existiert ein $t^* \in (a_x, b_x)$ mit $\varphi_x(t) \notin M_0 \;\forall\, t \in (a_x, t^*)$ ($\forall\, t \in (t^*, b_x)$).*

3.2.5 Die Universalität autonomer Systeme

(a) Eine autonome Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)} = f(x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{3.6}$$

mit $f : M \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ kann äquivalent als autonomes Differentialgleichungssystem geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= x_3\,, \\ &\;\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n\,, \\ \dot{x}_n &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dabei ist $\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann Lösung von (3.6), wenn

$$(\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)}) : (a,b) \longrightarrow M$$

Lösung von (3.7) ist.

Folgerung 3.18 *Sind $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig, so existiert zu jedem $x^0 \in M$ genau eine maximale Lösung $\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ des AWPs*

$$(3.6)\,, \quad x(0) = x_1^0\,,\; x'(0) = x_2^0\,,\; \ldots\,,\; x^{(n-1)}(0) = x_n^0\,.$$

(b) Ein nichtautonomes Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = v(t, x) \tag{3.8}$$

mit $v : M \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist äquivalent zu dem System

$$\dot{x}_0 = 1\,, \quad \dot{x} = v(x_0, x_1, \ldots, x_n)\,. \tag{3.9}$$

Dabei ist $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann Lösung von (3.8), wenn $(t, \varphi) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $t \mapsto (t, \varphi(t))$ Lösung von (3.9) ist.

Folgerung 3.19 *Sind $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge und $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, so gibt es zu jedem $(t_0, x^0) \in M$ genau eine maximale Lösung $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des AWPs*

$$(3.8)\,, \quad x(t_0) = x^0\,.$$

3.2.6 Global integrierbare Vektorfelder

Definition 3.20 *Ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **global integrierbar***, wenn der entsprechende lokale Fluss auf $\mathbb{R} \times M$ definiert ist.*

Folgerung 3.21 *Es sei $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Existieren Konstanten $r_0 > 0$ und $\tau_0 > 0$, so dass*

$$|v(x)| \le \frac{|x|}{\tau_0} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus U_{r_0}(\Theta)\,,$$

so ist v global integrierbar.

3.2.7 Lineare Systeme (variable Koeffizienten)

(a) Für lokal Lipschitz-stetige Funktionen $a_{jk} : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ betrachten wir das lineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{3.10}$$

oder das zugehörige homogene System

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3.11}$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^n\,, \tag{3.12}$$

wobei $A(t) = \left[\ a_{jk}(t)\ \right]_{j=1,k=1}^{n\quad n}$ und $t_0 \in (a, b)$.

Folgerung 3.22 *Unter den gemachten Voraussetzungen besitzt das AWP* (3.10),(3.12) *eine eindeutige Lösung $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*

(b) Es seien $\mathbf{C}^{(1)}((a, b), \mathbb{R}^n)$ der lineare Raum der auf (a, b) stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und

$$\mathcal{L} = \left\{ \varphi \in \mathbf{C}^{(1)}((a, b), \mathbb{R}^n) : \dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t),\ t \in (a, b) \right\}$$

der Lösungsraum des homogenen Systems (3.11). Die Anfangswertabbildung

$$a_{t_0} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}^n\,, \quad \varphi \mapsto \varphi(t_0)$$

ist nach Folgerung 3.22 ein linearer Isomorphismus, so dass $\dim \mathcal{L} = n$ gilt. Eine Basis $\left\{\Phi^1, \ldots \Phi^n\right\}$ von $\mathcal{L}$ nennt man **Fundamentalsystem** von Lösungen des Systems (3.11). Mit $\Phi(t)$ bezeichnen wir die Matrix $\left[\begin{array}{ccc} \Phi^1(t) & \cdots & \Phi^n(t) \end{array}\right]$. Wiederum nach Folgerung 3.22 besitzt das System $\Phi(t_0)c = x^0$ für jedes $t_0 \in (a,b)$ und jedes $x^0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $c \in \mathbb{R}^n$. Also gilt

$$\det \Phi(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in (a,b)\,.$$

Ist umgekehrt $\det \Phi(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in (a,b)$ und ein beliebiges System $\left\{\Phi^1, \ldots, \Phi^n\right\} \subset \mathcal{L}$, so folgt mit $\varphi(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x^0$

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\Phi}(t)\Phi(t_0)^{-1}x^0 = A(t)\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x^0 = A(t)\varphi(t)$$

und $\varphi(t_0) = x^0$. Also ist $\left\{\Phi^1, \ldots, \Phi^n\right\}$ Fundamentalsystem von Lösungen von (3.11).

Folgerung 3.23 *Ein System* $\left\{\Phi^1, \ldots, \Phi^n\right\} \subset \mathcal{L}$ *von n Lösungen des homogenen Systems* (3.11) *ist genau dann ein Fundamentalsystem zu* (3.11), *wenn ein* $t_0 \in (a,b)$ *mit* $\det \Phi(t_0) \neq 0$ *existiert.* (*Es gilt dann* $\det \Phi(t) \neq 0$ *für alle* $t \in (a,b)$.)

(c) Wir betrachten die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0 \tag{3.13}$$

mit lokal Lipschitz-stetigen Funktionen $a_j : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $\varphi : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann Lösung von (3.13), wenn $(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}) : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lösung von (3.11) mit

$$A(t) = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{array}\right]$$

ist (vgl. auch Abschnitt 2.5). Nach Folgerung 3.23 ist ein System $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ von Lösungen von (3.13) genau dann ein Fundamentalsystem zu (3.13), wenn die **Wronski-Determinante**

$$W(t) = \det \left[\begin{array}{ccc} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{array}\right]$$

für ein $t = t_0 \in (a,b)$ und damit für alle $t \in (a,b)$ **nicht** verschwindet.

(d) Sind $\left\{\Phi^1, \ldots, \Phi^n\right\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen zu (3.11) und $\varphi^0(t)$ eine **spezielle Lösung** von (3.10), so ist $\Phi(t)c + \varphi^0(t)$, $c \in \mathbb{R}^n$ die **allgemeine Lösung** von (3.10). Aus (3.12) folgt dann

$$c = \Phi(t_0)^{-1}\left[x^0 - \varphi^0(t_0)\right].$$

Mittels der Methode der **Variation der Konstanten** findet man für das AWP (3.10), (3.12) auch die Lösungsdarstellung (vgl. Abschnitt 2.4)

$$\varphi(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}f(s)\,ds + \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x^0\,.$$

Kapitel 4

Randwertaufgaben

4.1 Grundlagen

Für Lipschitz-stetige Funktionen $a_j : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 0,1$, definieren wir den Operator $L : \mathbf{C}^{(2)}[a,b] \longrightarrow \mathbf{C}[a,b]$ durch

$$(Ly)(x) = y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x)\,.$$

Mit $\mathcal{L} \subset \mathbf{C}^{(2)}[a,b]$ bezeichnen wir den (linearen Teil-) Raum aller Lösungen der homogenen Gleichung

$$Ly = 0\,, \tag{4.1}$$

d.h.

$$\mathcal{L} = \left\{ y \in \mathbf{C}^{(2)}[a,b] : (Ly)(x) = 0 \;\forall\, x \in [a,b] \right\}.$$

Da man die Funktionen $a_j(x)$ über das Intervall $[a,b]$ hinaus Lipschitz-stetig fortsetzen kann, ist die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten auf ein Intervall $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ anwendbar und somit die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems

$$Ly = 0\,, \quad y(x_0) = y_0\,,\; y'(x_0) = y_1\,,$$

für $x_0 \in [a,b]$ gesichert. Damit können wir für jedes $x \in [a,b]$ die **Anfangswertabbildung**

$$A_x : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \quad y \mapsto \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix}$$

betrachten. Die Abbildung $A_x : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist ein linearer Isomorphismus. Außerdem definieren wir die **Transportabbildung**

$$\tau : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \quad \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y(b) \\ y'(b) \end{bmatrix},$$

wobei $y \in \mathcal{L}$ diejenige Lösung von (4.1) ist, die die Anfangswerte $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_1$ hat. Aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L} \arrow[dl, "A_a"'] \arrow[dr, "A_b"] & \\ \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "\tau"'] & & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

folgt $\tau = A_b \circ A_a^{-1}$, so dass auch $\tau : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein linearer Isomorphismus ist.

Wir betrachten nun Randbedingungen der Gestalt

$$R_a y := \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0\,, \quad R_b y := \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0 \tag{4.2}$$

mit $\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Für $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir mit V_γ die Gerade

$$V_\gamma = \left\{ \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \gamma_0 y_0 + \gamma_1 y_1 = 0 \right\}$$

(linearer Teilraum von $\mathbb{R}^2$). Eine Funktion $y \in \mathcal{L}$ genügt genau dann den Randbedingungen (4.2), wenn $\begin{bmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{bmatrix} \in V_\alpha$ und $\begin{bmatrix} y(b) \\ y'(b) \end{bmatrix} \in V_\beta$ gilt. Das ist gleichbedeutend damit, dass die Kurve

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} : x \in [a,b] \right\}$$

(die im erweiterten Phasenraum liegt) in $\{a\} \times V_\alpha$ "startet" und in $\{b\} \times V_\beta$ "endet". Da $\tau(V_\alpha)$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist, kann es nur dann nichttriviale Lösungen von (4.1), (4.2) geben, wenn $\tau(V_\alpha) = V_\beta$ gilt. Damit kann der Lösungsraum von (4.1), (4.2) nur 0- oder 1-dimensional sein, nämlich gleich

$$A_b^{-1}\left(\tau(V_\alpha) \cap V_\beta\right) = A_a^{-1}(V_\alpha) \cap A_b^{-1}(V_\beta)\,. \tag{4.3}$$

Satz 4.1 *Ist* $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ *ein Fundamentalsystem von Lösungen von* (4.1) *(d.h. eine Basis in* $\mathcal{L}$*), so besitzt das homogene Randwertproblem* (4.1), (4.2) *genau dann nur die triviale Lösung, wenn*

$$\det \begin{bmatrix} R_a\varphi_1 & R_a\varphi_2 \\ R_b\varphi_1 & R_b\varphi_2 \end{bmatrix} \neq 0 \tag{4.4}$$

gilt.

Bei der Betrachtung inhomogener Randbedingungen

$$R_a y = \alpha_2\,, \quad R_b y = \beta_2 \tag{4.5}$$

gehen die Unterräume V_α und V_β in zu diesen parallele Geraden über.

Folgerung 4.2 *Das inhomogene Randwertproblem* (4.1), (4.5) *ist genau dann eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene Randwertproblem* (4.1), (4.2) *nur die triviale Lösung besitzt.*

4.2 Sturm'sche Randwertaufgaben

Wir betrachten für $f \in \mathbf{C}[a,b]$ das Randwertproblem

$$Ly = f\,, \tag{4.6}$$

$$R_a y = \alpha_2\,, \quad R_b y = \beta_2\,. \tag{4.7}$$

Eine Lösung dieses Problems ist offenbar genau dann eindeutig, wenn das entsprechende homogene Problem (4.1), (4.2) nur die triviale Lösung besitzt. Das Problem (4.6), (4.7) lässt sich unter dieser Voraussetzung leicht halbhomogenisieren: Es sei $y^* \in \mathbf{C}^{(2)}[a,b]$ eine Funktion mit $R_a y^* = \alpha_2$ und $R_b y^* = \beta_2$. Wir setzen $z = y - y^*$. Dann ist (4.6), (4.7) äquivalent zu

$$Lz = f - Ly^* \,, \quad R_a z = R_b z = 0 \,.$$

Wir multiplizieren die Gleichung (4.6) mit

$$p(x) = \exp\left(\int_a^x a_1(s)\,ds\right)$$

und erhalten

$$py'' + pa_1 y' + pa_0 y = pf$$

bzw. wegen $(py')' = py'' + p'y' = py'' + pa_1 y'$

$$(py')' + pa_0 y = pf \,.$$

Wir können uns somit auf die Betrachtung der sog. **Sturm'schen Randwertaufgaben**

$$Ly = f \,, \quad R_a y = R_b y = 0 \tag{4.8}$$

mit $p', q : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und

$$Ly = (py')' + qy \,, \quad p(x) > 0 \,,\ a \le x \le b \,,$$

einschränken, wobei wir voraussetzen, dass (4.4) erfüllt ist. Es seien $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subset \mathcal{L}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $Ly = 0$ und

$$W(x) = \varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x)$$

die **Wronski-Determinante** dieses Systems. Es gilt dann

$$p(x)W'(x) = -p'(x)W(x) \,,$$

d.h. $[p(x)W(x)]' \equiv 0$, so dass

$$p(x)W(x) = p(a)W(a) \ne 0 \quad \forall\, x \in [a,b] \,. \tag{4.9}$$

Wir schreiben das Quadrat $[a,b]^2$ als Vereinigung der Dreiecke

$$D_1 = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le t \le b\big\} \quad \text{und} \quad D_2 = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : a \le t \le x \le b\big\}$$

und definieren die **Green'sche Funktion** $G(x,t)$ der Sturm'schen Randwertaufgabe (4.8) als

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_1(x)\varphi_2(t)}{p(a)W(a)} & : \quad (x,t) \in D_1 \,, \\ \dfrac{\varphi_1(t)\varphi_2(x)}{p(a)W(a)} & : \quad (x,t) \in D_2 \,. \end{cases}$$

Außerhalb der Diagonalen $\{(x,x) : a \le x \le b\}$ existieren offenbar die stetigen partiellen Ableitungen $\partial_1 G := G_x$ und $\partial_{11} G := G_{xx}$, wobei für $a < x < b$ die Beziehungen

$$\partial_1 G(x+0,x) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_2'(x)}{p(a)W(a)} \,, \quad \partial_1 G(x-0,x) = \frac{\varphi_1'(x)\varphi_2(x)}{p(a)W(a)}$$

erfüllt sind. Daraus ergibt sich unter Verwendung von (4.9) die “Sprungrelation”

$$\partial_1 G(x+0,x) - \partial_1 G(x-0,x) = \frac{1}{p(x)}\,, \quad a < x < b\,. \tag{4.10}$$

Nach Voraussetzung genügt das Fundamentalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ der Bedingung (4.4). Die Funktionen

$$\psi_1(x) = c_{11}\varphi_1(x) + c_{12}\varphi_2(x)\,, \quad \psi_2(x) = c_{21}\varphi_1(x) + c_{22}\varphi_2(x)$$

mit $c_{11} = R_a\varphi_2$, $c_{12} = -R_a\varphi_1$, $c_{21} = R_b\varphi_2$ und $c_{22} = -R_b\varphi_1$ bilden dann auch ein Fundamentalsystem für $Ly = 0$, da $\det[c_{jk}] \neq 0$ gilt. Außerdem ist $R_a\psi_1 = R_b\psi_2 = 0$. Wir können also im weiteren o.E.d.A. ein Fundamentalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ mit

$$R_a\varphi_1 = R_b\varphi_2 = 0 \tag{4.11}$$

zugrundelegen. Wir setzen

$$\varphi(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\,dt\,, \quad a \le x \le b\,.$$

Dann gilt

$$\varphi(x) = \int_a^x G(x,t)f(t)\,dt + \int_x^b G(x,t)f(t)\,dt$$

und somit

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= G(x,x)f(x) + \int_a^x \partial_1 G(x,t)f(t)\,dt - G(x,x)f(x) + \int_x^b \partial_1 G(x,t)f(t)\,dt \\
&= \int_a^b \partial_1 G(x,t)f(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung von $\varphi(x)$ erhalten wir auf analoge Weise unter Verwendung der Beziehung (4.10)

$$\begin{aligned}
\varphi''(x) &= \partial_1 G(x+0,x)f(x) - \partial_1 G(x-0,x)f(x) + \int_a^b \partial_{11} G(x,t)f(t)\,dt \\
&= \frac{f(x)}{p(x)} + \int_a^b \partial_{11} G(x,t)f(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Aus der Definition von $G(x,t)$ folgt für $x \neq t$

$$p(x)\partial_{11}G(x,t) + p'(x)\partial_1 G(x,t) + q(x)G(x,t) = 0$$

und somit

$$(L\varphi)(x) = f(x)\,.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
R_a\varphi &= \int_a^b \left[\alpha_0 G(a,t) + \alpha_1 \partial_1 G(a,t)\right] f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{p(a)W(a)} \int_a^b \left[\alpha_0\varphi_1(a) + \alpha_2\varphi_1'(a)\right] \varphi_2(t)f(t)\,dt = 0
\end{aligned}$$

und analog $R_b\varphi = 0$. Damit haben wir folgenden Satz bewiesen.

Satz 4.3 *Es seien $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $Ly = 0$, die die Bedingungen $R_a\varphi_1 = R_b\varphi_2 = 0$ und $(R_a\varphi_2)(R_b\varphi_1) \neq 0$ erfüllen. Ferner sei $G(x,t)$ die zugehörige Green'sche Funktion. Dann ist das Randwertproblem (4.8) eindeutig lösbar, und die Lösung ist gegeben durch*

$$\varphi(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)\,dt\,.$$

Beispiel 4.4 *Für die Randwertaufgabe*

$$y'' = f\,, \quad y(0) = y(1) = 0\,,$$

kann man das Fundamentalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ mit $\varphi_1(x) = x$ und $\varphi_2(x) = x - 1$ wählen, so dass $W(x) \equiv 1$ und

$$G(x,t) = \begin{cases} x(t-1) & : \ 0 \le x \le t \le 1\,, \\ t(x-1) & : \ 0 \le t \le x \le 1\,, \end{cases}$$

ist. Hieraus erhält man die Lösungsdarstellung

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt &= (x-1)\int_0^x tf(t)\,dt + x\int_x^1 (t-1)f(t)\,dt \\ &= \int_0^x F(t)\,dt - x\int_0^1 F(t)\,dt\,, \end{aligned}$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ bezeichnet. Betrachten wir die Randwertaufgabe

$$y'' = f\,, \quad y(0) = y'(1) = 0\,,$$

so erhalten wir mit $\varphi_1(x) = x$ und $\varphi_2(x) \equiv 1$ die Lösungsdarstellung

$$\varphi(x) = -\int_0^x tf(t)\,dt - x\int_x^1 f(t)\,dt = \int_0^x F(t)\,dt - xF(1)\,.$$

Beispiel 4.5 *Wir suchen die Lösung des Randwertproblems*

$$y'' - y = 1 =: f(x)\,, \quad y(0) = y'(a) = 0 \quad (a > 0)\,.$$

Mit $\varphi_1(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$ *und* $\varphi_2(x) = \dfrac{e^{x-a} + e^{a-x}}{2} = \cosh(x-a)$ *erhalten wir*

$$G(x,t) = \begin{cases} -\dfrac{\sinh x\, \cosh(t-a)}{\cosh a} & : \ 0 \le x \le t \le a\,, \\ -\dfrac{\sinh t\, \cosh(x-a)}{\cosh a} & : \ 0 \le t \le x \le a\,, \end{cases}$$

und

$$\varphi(x) = -\frac{\cosh(x-a)}{\cosh a}\int_0^x \sinh t\, f(t)\,dt - \frac{\sinh x}{\cosh a}\int_x^a \cosh(t-a)\, f(t)\,dt = \frac{\cosh(x-a)}{\cosh a} - 1\,.$$

4.3 Sturm-Liouville'sche Eigenwertaufgaben

Für den Differentialoperator L, definiert wie in (4.8), betrachten wir das Eigenwertproblem

$$Ly + \lambda y = 0\,, \quad R_a y = R_b y = 0\,. \tag{4.12}$$

Wir nennen $\lambda \in \mathbb{R}$ einen **Eigenwert**, wenn (4.12) eine nichttriviale Lösung $\varphi = \varphi_\lambda \in \mathbf{C}^2[a,b]$ besitzt. Man nennt φ_λ eine zugehörige **Eigenfunktion** und die Menge $\mathbf{E}_\lambda \subset \mathbf{C}^2[a,b]$ aller Lösungen von (4.12) den **Eigenunterraum** zum Eigenwert λ. Mit $\langle \varphi, \psi \rangle$ bezeichnen wir das innere Produkt zweier stetiger Funktionen $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\,.$$

- Für $\varphi, \psi \in \mathbf{C}^2[a,b]$ mit $R_a\varphi = R_b\varphi = R_a\psi = R_b\psi = 0$ gilt

$$\langle L\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L\psi \rangle\ .$$

- Würden wir auch komplexe Eigenwerte und komplexwertige Eigenfunktionen zulassen, so gäbe es trotzdem nur reelle Eigenwerte.

- Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert, so ist $\mathbf{E}_\lambda$ eindimensional.

Bemerkung 4.6 *Die Eigenwerte zu* (4.12) *bilden eine Folge* $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ *mit* $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ *und* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. *Ist* $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ *eine Folge zugehöriger normierter Eigenfunktionen, d.h.* $\displaystyle\int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,dx = 1$, *so gilt für alle* $f \in \mathbf{L}^2(a,b)$ *die Beziehung*

$$f = \sum_{n=0}^\infty \langle f, \varphi_n \rangle\, \varphi_n$$

in dem Sinne, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_n \rangle\, \varphi_n(x) \right|^2 dx = 0\,.$$

Kapitel 5

Lokale Stabilitätstheorie

5.1 Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten das (entkoppelte) lineare System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 \end{aligned} \tag{5.1}$$

bzw.

$$\dot{x} = A\,x \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Als Lösung des AWPs $x(0) = x^0$ erhalten wir

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} x_1^0 e^{-t} \\ x_2^0 e^{-t} \\ x_3^0 e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} x^0 .$$

Wir sehen, dass für

$$x^0 \in \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} =: E^s$$

gilt

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Für

$$x^0 \in \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} =: E^u$$

gilt dagegen

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Man nennt deshalb E^s den **stabilen** und E^u den **instabilen Unterraum** für das System (5.1).

Wir betrachten nun das (nichtlineare) System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1\\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2\\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_1^2\end{aligned} \tag{5.2}$$

bzw.

$$\dot{x} = v(x)$$

mit

$$v(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{bmatrix}.$$

Der einzige Gleichgewichtspunkt dieses Systems, d.h. ein Punkt x^* mit $v(x^*) = \Theta$, ist der Punkt $x^* = \Theta$. Nun gilt

$$v'(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2x_1 & -1 & 0 \\ 2x_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und somit ist $v'(x^*) = v'(\Theta) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$ - die Matrix zum linearen System (5.1).

Wir bestimmen die Lösung $\psi(t)$ des AWPs $x(0) = x^0$ für das System (5.2). Aus der ersten Gleichung in (5.2) folgt $\psi_1(t) = x_1^0 e^{-t}$, und es bleiben die beiden Gleichungen

$$\dot{x}_2 + x_2 = (x_1^0)^2 e^{-2t}, \quad \dot{x}_3 - x_3 = (x_1^0)^2 e^{-2t}$$

zu lösen. Wir erhalten

$$\psi_2(t) = x_2^0 e^{-t} + (x_1^0)^2 \left(e^{-t} - e^{-2t}\right), \quad \psi_3(t) = x_3^0 e^t + \frac{(x_1^0)^2}{3}\left(e^t - e^{-2t}\right),$$

also

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} x_1^0 e^{-t} \\ \left[x_2^0 + (x_1^0)^2\right] e^{-t} - (x_1^0)^2 e^{-2t} \\ \left[x_3^0 + \dfrac{(x_1^0)^2}{3}\right] e^t - \dfrac{(x_1^0)^2}{3} e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Offenbar gilt

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \Theta \quad \Longleftrightarrow \quad x_3^0 + \frac{(x_1^0)^2}{3} = 0$$

und

$$\lim_{t\to-\infty} \psi(t) = \Theta \quad \Longleftrightarrow \quad x_1^0 = x_2^0 = 0\,.$$

Man nennt deshalb

$$S := \left\{c \in \mathbb{R}^3 : c_3 = -\frac{c_1^2}{3}\right\}$$

die **stabile** und

$$U := \left\{c \in \mathbb{R}^3 : c_1 = c_2 = 0\right\}$$

die **instabile Mannigfaltigkeit** des Systems (5.2) im Gleichgewichtspunkt Θ. Wir sehen, dass E^s Tangentenebene an S ist und dass $E^u = U$ gilt.

Ferner gilt für $x_3^0 + \dfrac{(x_1^0)^2}{3} = 0$ auch

$$\psi_1(t) = x_1^0 e^{-t} \quad \text{und} \quad \psi_3(t) = -\frac{(x_1^0)^2}{3}\, e^{-2t}$$

und somit

$$\psi_3(t) + \frac{[\psi_1(t)]^2}{3} = 0\,.$$

Für $x_1^0 = x_2^0 = 0$ ist

$$\psi_1(t) = 0 \quad \text{und} \quad \psi_3(t) = x_3^0 e^t\,.$$

Aus $x^0 \in S$ (bzw. $x^0 \in U$) folgt also $\psi(t) \in S$ (bzw. $\psi(t) \in U$) für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Mengen S und U sind **invariant** bzgl. des Systems (5.2).

Nun zur allgemeinen Situation: Wir betrachten im $\mathbb{R}^n$ das lineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = A\,x \tag{5.3}$$

(d.h. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Es bezeichne $w^j = u^j + \mathbf{i}v^j$ ($u^j, v^j \in \mathbb{R}^n$) einen verallgemeinerten Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_j = \alpha_j + \mathbf{i}\beta_j$ ($\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j \geq 0$), d.h.

$$\exists\, \ell \in \mathbb{N} : (A - \lambda_j I)^\ell w^j = \Theta\,, \quad w^j \neq \Theta\,.$$

Ferner sei

$$B = \left\{u^1, \ldots, u^k, v^{k+1}, u^{k+1}, \ldots, v^m, u^m\right\}$$

eine Basis in $\mathbb{R}^n$ ($\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$ und $2(m-k) + k = 2m - k = n$, (vgl. Abschnitt 2.3,(a)).

Definition 5.1 *Man nennt*

$$E^s = \operatorname{span}\left\{u^j, v^j : \alpha_j < 0\right\}$$

den **stabilen**,

$$E^u = \operatorname{span}\left\{u^j, v^j : \alpha_j > 0\right\}$$

den **instabilen** *und*

$$E^c = \operatorname{span}\left\{u^j, v^j : \alpha_j = 0\right\}$$

den **zentralen Unterraum** *von $\mathbb{R}^n$ für das System (5.3).*

Beispiel 5.2 *Die Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

hat den Eigenvektor

$$w^1 = u^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad \textit{zum Eigenwert} \quad \lambda_1 = 3$$

und den Eigenvektor

$$w^2 = u^2 + \mathbf{i}v^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + \mathbf{i}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \textit{zum Eigenwert} \quad \lambda_2 = -2 + \mathbf{i}\,.$$

Also sind E^s die x_1x_2-Ebene und E^u die x_3-Achse.

Beispiel 5.3 *Für die Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

erhalten wir

$$\lambda_1 = 2\,,\ u^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \mathbf{i}\,,\ u^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\,,\ v^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\,,$$

so dass $E^s = \{\Theta\}$, E^u *die* x_3*-Achse und* E^c *die* x_1x_2*-Ebene sind.*

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Lösungen aus E^c nicht notwendig beschränkt bleiben müssen.

Beispiel 5.4 *Die Matrix* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *hat nur den Eigenwert* $\lambda_1 = 0$ *mit dem Eigenvektor* $u^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *und dem verallgemeinerten Eigenvektor* $u^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *, so dass* $E^c = \mathbb{R}^2$ *gilt. Die Lösung des AWPs* $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2$ *zum System (5.3) ist gleich*

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_1^0 t + x_2^0 \end{bmatrix}.$$

Da die verallgemeinerten Eigenunterräume einer Matrix A bezüglich A invariant sind, ergibt sich unter Verwendung von Folgerung 2.8 die folgende Aussage.

Folgerung 5.5 *Für die Lösung* $e^{tA}x^0$ *von* $\dot{x} = A\,x$, $x(0) = x^0$ *gilt:*

(a) *Ist* $x^0 \in E^s$ *, so* $e^{tA}x^0 \in E^s\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ *und* $\lim\limits_{t\to\infty} e^{tA}x^0 = \Theta$.

(b) *Ist* $x^0 \in E^u$ *, so* $e^{tA}x^0 \in E^u\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ *und* $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{tA}x^0 = \Theta$.

Satz 5.6 *Das Vektorfeld* $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *(*$M \subset \mathbb{R}^n$ *- Gebiet) sei stetig differenzierbar und* $\Phi : \mathcal{A} \subset \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ *sei der lokale Fluss zu dem autonomen System*

$$\dot{x} = v(x)\,. \tag{5.4}$$

Ferner sei $v(\Theta) = \Theta$ *, d.h.* Θ *ist stationärer Punkt von (5.4). Die Matrix* $A := v'(\Theta)$ *habe* k *Eigenwerte mit negativem Realteil und* $n-k$ *Eigenwerte mit positivem Realteil (entspr. ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt). Mit* E^s *und* E^u *bezeichnen wir den stabilen und instabilen Unterraum des Systems (5.3). Dann existieren ein* $\varepsilon > 0$ *und differenzierbare Funktionen* $h_s : E^s \cap U_\varepsilon(\Theta) \longrightarrow (E^s)^\perp$ *,* $h_u : E^u \cap U_\varepsilon(\Theta) \longrightarrow (E^u)^\perp$ *, so dass* $h_s'(\Theta) = \Theta$ *,* $h_u'(\Theta) = \Theta$ *und die Mengen*

$$S = \{(z, h_s(z)) : z \in E^s,\ |z| < \varepsilon\}\,, \quad U = \{(z, h_u(z)) : z \in E^u,\ |z| < \varepsilon\}$$

folgende Eigenschaften besitzen:

$$\Phi(t, x^0) \in S \quad \forall\, x^0 \in S, \forall\, t \geq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} \Phi(t, x^0) = \Theta \quad \forall\, x^0 \in S\,,$$

$$\Phi(t, x^0) \in U \quad \forall\, x^0 \in U, \forall\, t \leq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to-\infty} \Phi(t, x^0) = \Theta \quad \forall\, x^0 \in U\,.$$

Man nennt S die **stabile** und U die **instabile Mannigfaltigkeit** des Systems (5.4) im Gleichgewichtspunkt Θ. Diese Mannigfaltigkeiten sind also tangential im Gleichgewichtspunkt Θ zum stabilen bzw. instabilen Unterraum des Systems (5.3) mit $A = v'(\Theta)$.

Beispiel 5.7 *Wir demonstrieren die Beweisidee für Satz 5.6 an einem Beispiel und betrachten dazu das autonome System*

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2^2\,, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_1^2\,. \tag{5.5}$$

Hier ist also $n = 2$, $M = \mathbb{R}^2$, $v(x) = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2^2 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}$, $A = v'(\Theta) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *und somit* $k = n - k = 1$. *Der stabile Unterraum* E^s *ist gleich der* x_1*-Achse, der instabile Unterraum* E^u *gleich der* x_2*-Achse. Wir schreiben*

$$v(x) = v(\Theta) + v'(\Theta)x + F(x) = A\,x + F(x) \quad \mathit{mit} \quad F(x) = \begin{bmatrix} -x_2^2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$$

und definieren $U(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$. *Es sei* $\varphi(t) = \varphi(t; a_1)$ *eine stetige Funktion und Lösung der Integralgleichung*

$$\varphi(t) = U(t) \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t U(t-s)F(\varphi(s))\,ds - \int_t^\infty V(t-s)F(\varphi(s))\,ds\,. \tag{5.6}$$

d.h.

$$\varphi_1(t) = e^{-t}a_1 - \int_0^t e^{s-t}\,[\varphi_2(s)]^2\;ds\,, \quad \varphi_2(t) = -\int_t^\infty e^{t-s}\,[\varphi_1(s)]^2\;ds\,.$$

Dann ist $\varphi(t)$ *auch Lösung von* (5.5)*, denn aus* (5.6) *folgt*

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(t) &= -e^{-t}a_1 + \int_0^t e^{s-t}\,[\varphi_2(s)]^2\;ds - [\varphi_2(t)]^2 = -\varphi_1(t) - [\varphi_2(t)]^2\;, \\ \dot{\varphi}_2(t) &= -\int_t^\infty e^{t-s}\,[\varphi_1(s)]^2\;ds + [\varphi_1(t)]^2 = \varphi_2(t) + [\varphi_1(t)]^2\;. \end{aligned}$$

Wir versuchen, (5.6) *mittels der Methode der sukzessiven Approximation zu lösen:*

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \varphi^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \varphi^{(2)}(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ -\displaystyle\int_t^\infty e^{t-s}e^{-2s}\,ds\,a_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 \\ -\dfrac{1}{3}\,e^{-2t}a_1^2 \end{bmatrix}, \\ \varphi^{(3)}(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 - \dfrac{1}{9}\displaystyle\int_0^t e^{s-t}e^{-4s}\,ds\,a_1^4 \\ -\displaystyle\int_t^\infty e^{t-s}e^{-2s}\,ds\,a_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 + \dfrac{1}{27}\left(e^{-4t} - e^{-t}\right)a_1^4 \\ -\dfrac{1}{3}\,e^{-2t}a_1^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\varphi^{(4)}(t) \quad = \quad \begin{bmatrix} e^{-t}a_1 + \frac{1}{27}\left(e^{-4t} - e^{-t}\right)a_1^4 \\ -\frac{1}{3}\,e^{-2t}a_1^2 - \frac{2}{81}\left(e^{-5t} - e^{-2t}\right)a_1^5 - \frac{1}{3(27)^2}\left(\frac{1}{3}e^{-8t} - e^{-5t} + e^{-2t}\right)a_1^8 \end{bmatrix}$$

$$\ldots$$

Wir vermuten, dass $\varphi^{(j)}(t)$ für $j \longrightarrow \infty$ gleichmäßig für alle $t \geq 0$ gegen eine (stetige) Funktion $\varphi(t) = \varphi(t; a_1)$ konvergiert, wenn nur $|a_1| < \delta$ und $\delta > 0$ hinreichend klein sind. Diese Funktion $\varphi(t)$ ist dann Lösung von (5.6) und somit auch von (5.5). Sie genügt den Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(0; a_1) = a_1 \quad \textit{und} \quad \varphi_2(0) = \varphi_2(0; a_1) = -\int_0^\infty e^{-s}\left[\varphi_1(s)\right]^2\, ds\,.$$

Wir setzen $h_s(a_1) = \varphi_2(0; a_1)$, $|a_1| < \delta$. Die Anfangswerte $x_1^0 = \varphi_1(0; a_1)$ und $x_2^0 = \varphi_2(0; a_1)$ genügen dann der Gleichung

$$x_2^0 = h_s(x_1^0)\,, \quad |x_1^0| < \delta\,.$$

Diese Gleichung definiert eine Kurve S im $\mathbb{R}^2$,

$$S = \{(x_1, h_s(x_1)) : |x_1| < \delta\} \subset \mathbb{R}^2\,.$$

Ist $\alpha(t)$ eine beliebige Lösung von (5.5) mit der Eigenschaft $\alpha(0) \in S$, so folgt aus Theorem 3.14, dass $\alpha(t) = \varphi(t; a_1)$ mit $a_1 = \alpha_1(0)$. Anhand der Iterierten $\varphi^{(j)}(t)$ ist schon zu erkennen, dass

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t; a_1) = \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \Theta \quad \textit{und} \quad \frac{dh_s(0)}{dx_1} = \left.\frac{\partial \varphi_2(0; a_1)}{\partial a_1}\right|_{a_1=0} = 0$$

gilt, so dass S stabile Mannigfaltigkeit und E^s (die x_1-Achse) Tangente an S im Punkt Θ ist. Wenn wir in $\varphi_2(t; a_1)$ Terme der Größenordnung $|a_1|^5$ und kleiner f"ur kleine $|a_1|$ vernachlässigen, so sehen wir, dass

$$S = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \approx -\frac{1}{3}\,x_1^2,\ |x_1| < \delta\right\}.$$

Auf analoge Weise erhält man für die instabile Mannigfaltigkeit

$$U = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \approx -\frac{1}{3}\,x_2^2,\ |x_2| < \delta\right\}.$$

Bemerkung 5.8 *Ist x^* Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = v(x)$, so ist nach der Koordinatentransformation $y = x - x^*$ der Punkt $y^* = \Theta$ Gleichgewichtspunkt von $\dot{y} = v(y + x^*)$.*

Nach Satz 5.6 (und den Überlegungen in Bsp. 5.7) kann man S und U eigentlich nur als lokale stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit des Systems $\dot{x} = v(x)$ bezeichnen. Deshalb die folgende Definition.

Definition 5.9 *Es seien $\Phi(t, x)$ der (lokale) Fluss des Systems $\dot{x} = v(x)$ mit $v(\Theta) = \Theta$ und S bzw. U wie in Satz 5.6. Unter der* **globalen stabilen** *bzw.* **instabilen Mannigfaltigkeit** *dieses Systems im Punkt Θ versteht man*

$$W^s(\Theta) = \{\Phi(t, x) : x \in S,\ a_x < t \leq 0\} \quad \textit{bzw.} \quad W^u(\Theta) = \{\Phi(t, x) : x \in U,\ 0 \leq t < b_x\}\,.$$

Bemerkung: $W^s(\Theta)$ und $W^u(\Theta)$ sind eindeutig bestimmt und invariant bzgl. Φ. Ist $\Phi(0, x) \in W^s$ (bzw. W^u), so existieren $T \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $\alpha > 0$ mit

$$|\Phi(t, x)| \leq \varepsilon\, e^{-\alpha t} \quad (\text{bzw. } \varepsilon\, e^{\alpha t}) \quad \forall\, t \geq T \quad (\text{bzw. } \leq T)\,.$$

Beispiel 5.10 *Wir bestimmen* E^s, $E^u, S, U, W^s(\theta), W^u(\Theta)$ *für das System*

$$\dot{x}_1 = -x_1\,, \quad \dot{x}_2 = x_2 + x_1^2\,.$$

Satz 5.11 *Sei* $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *wie in Satz 5.6. Hat* $A = v'(\Theta)$ k *Eigenwerte mit negativem,* j *Eigenwerte mit positivem und* $m = n - k - j > 0$ *Eigenwerte mit verschwindendem Realteil, so existiert eine* m*-dimensionale differenzierbare* (**zentrale**) *Mannigfaltigkeit* $W^c(\Theta)$ *(vgl. Satz 5.6 und Definition 5.9), die zum zentralen Unterraum* E^c *von* $\dot{x} = A\,x$ *im Punkt* Θ *tangential und invariant bzgl. des Flusses* $\Phi(t,x)$ *ist.*

Beispiel 5.12 *Die zentrale Mannigfaltigkeit des Systems* $\dot{x}_1 = x_1^2\,, \quad \dot{x}_2 = -x_2$ *ist nicht eindeutig bestimmt.*

5.2 Das Theorem von Hartman-Grobman

Im Beispiel 5.10 hatten wir gesehen, dass der Fluss zum Differentialgleichungssystem $\dot{x}_1 = -x_1\,,$ $\dot{x}_2 = x_2 + x_1^2$ gegeben ist durch

$$\Phi(t,x) = \begin{bmatrix} x_1 e^{-t} \\ x_2 e^t + \frac{x_1^2}{3}(e^t - e^{-2t}) \end{bmatrix}.$$

Wir definieren $H(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{x_1^2}{3} \end{bmatrix}$ und erhalten

$$H(\Phi(t,x)) = \begin{bmatrix} x_1 e^{-t} \\ \left(x_2 + \frac{x_1^2}{3}\right) e^t \end{bmatrix} = e^{tA} H(x)\,,$$

wobei $A = v'(\Theta) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Die Abbildung $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bildet also Lösungskurven des nichtlinearen Systems auf Lösungskurven des linearen Systems $\dot{x} = A\,x$ ab. Der folgende Satz liefert die Verallgemeinerung dieses Beispiels.

Satz 5.13 (Hartman-Grobman) *Seien* $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *stetig differenzierbar,* $v(\Theta) = \Theta\,,$ *und* $A = v'(\Theta)$ *habe keinen Eigenwert mit verschwindendem Realteil. Mit* $\Phi(t,x)$ *bezeichnen wir den (lokalen) Fluss zum System* $\dot{x} = v(x)$. *Dann existieren zwei offene Mengen* $U, V \subset M$, *die den Punkt* Θ *enthalten, und ein Homöomorphismus* $H : U \longrightarrow V$, *so dass für jedes* $x \in U$ *ein* $\delta > 0$ *mit*

$$H(\Phi(t,x)) = e^{tA} H(x) \quad \forall\, t \in (-\delta, \delta)$$

existiert.

D.h., H überführt Orbits des Systems $\dot{x} = v(x)$ aus einer Umgebung des Gleichgewichtspunktes in Orbits des linearen Systems $\dot{x} = Ax$. Dabei bleibt die Parametrisierung bzgl. der Zeit erhalten.

5.3 Die Ljapunovsche Methode

Im Weiteren seien $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $\Phi(t,x)$ der (lokale) Fluss des Systems $\dot{x} = v(x)$.

Definition 5.14 *Es sei $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Unter $\dot{L}(x)$ verstehen wir die Ableitung von L entlang der Lösungskurven von $\dot{x} = v(x)$, d.h.*

$$\dot{L}(x) = \frac{d}{dt} L\left(\Phi(t,x)\right)\bigg|_{t=0} = L'\left(\Phi(0,x)\right)\dot{\Phi}(0,x) = L'(x)v(x)\,.$$

Definition 5.15 *Ein Punkt $x^* \in M$ mit $v(x^*) = \Theta$ heißt* **stabiler** *Gleichgewichtspunkt des Systems $\dot{x} = v(x)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$|\Phi(t,x) - x^*| < \varepsilon \quad \forall\, x \in U_\delta(x^*)\,,\ \forall\, t \geq 0\,.$$

Er heißt **asymptotisch stabil**, *wenn er stabil ist und wenn ein $\eta > 0$ existiert, so dass*

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = x^* \quad \forall\, x \in U_\eta(x^*)\,.$$

Der Gleichgewichtspunkt x^* heißt **instabil**, *wenn er nicht stabil ist.*

Satz 5.16 *Es seien $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sowie $v(x^*) = \Theta$ für ein $x^* \in M$. Ferner seien $L(x^*) = 0$ und $L(x) > 0$ für alle $x \in M \setminus \{x^*\}$.*

(a) *Gilt $\dot{L}(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in M$, so ist x^* stabil.*

(b) *Gilt $\dot{L}(x) < 0 \quad \forall\, x \in M \setminus \{x^*\}$, so ist x^* asymptotisch stabil.*

(c) *Gilt $\dot{L}(x) > 0 \quad \forall\, x \in M \setminus \{x^*\}$, so ist x^* instabil.*

Eine Funktion $L : M \longrightarrow \mathbb{R}$, mit der man diesen Satz anwenden kann, heißt **Ljapunov-Funktion**. Es sei bemerkt, dass die Aussagen des Satzes 5.16 gültig bleiben, wenn die Voraussetzungen nur in einer offenen Umgebung $U(x^*) \subset M$ des Gleichgewichtspunktes x^* erfüllt sind.

Beispiel 5.17 *Für das System $\dot{x}_1 = -x_2^3$, $\dot{x}_2 = x_1^3$ ist $L(x) = x_1^4 + x_2^4$ eine Ljapunov-Funktion. Der Punkt Θ ist stabiler Gleichgewichtspunkt, aber nicht asymptotisch stabil.*

Beispiel 5.18 *Die Funktion $L(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$ ist Ljapunov-Funktion für das System*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -2x_2 + x_2x_3 - x_1^3\,,\\
\dot{x}_2 &= x_1 - x_1x_3 - x_2^3\,,\\
\dot{x}_3 &= x_1x_2 - x_3^3\,.
\end{aligned}$$

Der Punkt Θ ist asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt, obwohl alle Eigenwerte der Matrix $A = v'(\Theta)$ verschwindenden Realteil haben.

Beispiel 5.19 *Für eine lokal Lipschitz-stetige stetige Funktion $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $y\,q(y) > 0$, $y \neq 0$ betrachten wir die Differentialgleichung*

$$\ddot{y} + q(y) = 0\,.$$

Für das zugehörige System $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -q(x_1)$ ist

$$L(x) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} q(s)\,ds = \text{kinetische Energie} + \text{potentielle Energie} =: \textbf{totale Energie}$$

eine Ljapunov-Funktion. Entlang der Lösungskurven bleibt die totale Energie konstant, da offenbar $\dot{L}(x) \equiv 0$ gilt. Der Punkt Θ ist stabiler Gleichgewichtspunkt.

Definition 5.20 *Seien jetzt $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ und $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ habe eine lokal Lipschitz-stetigen Gradienten. Wir schreiben $H(x,y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ein System*

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}\,, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{5.7}$$

heißt **Hamiltonsches System** *mit n Freiheitsgraden. Die Funktion $H(x,y)$ nennt man* **Hamilton-Funktion** *oder* **totale Energie** *des Systems* (5.7).

Die totale Energie des Systems (5.7) bleibt konstant entlang der Lösungskurven von (5.7). Das folgt aus der Tatsache, dass entlang einer Lösungskurve gilt

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x} = 0\,.$$

Beispiel 5.21 *Die Gleichung des ungedämpften nichtlinearen Pendels $\ddot{x}+\sin x = 0$ (vgl. Beispiel 3.4) ist äquivalent zu dem Hamilton–System*

$$\dot{x} = y\,, \quad \dot{y} = -\sin x$$

mit der Hamilton–Funktion

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x\,.$$

Die in der Abbildung zu Beispiel 3.4 zu sehenden Lösungskurven liegen also auf Niveaulinien dieser Funktion.

Beispiel 5.22 *Jedes* **Newtonsche System** *$\ddot{x} = f(x)$ (mit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig) ist ein Hamilton-System mit der totalen Energie*

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \int_0^x f(s)\,ds\,.$$

Definition 5.23 *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, und $\Psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ habe einen lokal Lipschitz-stetigen Gradienten* $\operatorname{grad}\Psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$. *Das System*

$$\dot{x} = -\operatorname{grad}\Psi(x) \tag{5.8}$$

heißt **Gradientensystem** *auf M .*

Ein Punkt $x^* \in M$ ist genau dann Gleichgewichtspunkt von (5.8), wenn $\operatorname{grad}\Psi(x^*) = \Theta$ gilt, d.h. wenn x^* ein sogenannter kritischer oder singulärer Punkt von Ψ ist. In regulären Punkten $x \in M$ von Ψ (d.h. $\operatorname{grad}\Psi(x) \neq \Theta$) steht $\operatorname{grad}\Psi(x)$ senkrecht auf der Niveaulinie $\{y \in M : \Psi(y) = \Psi(x)\}$.

Sei x^* kritischer (singulärer) Punkt von Ψ . Wir setzen $L(x) = \Psi(x) - \Psi(x^*)$. Dann gilt für das System (5.8)

$$\dot{L}(x) = [\operatorname{grad}\Psi(x)]^T[-\operatorname{grad}\Psi(x)] = -\left|\operatorname{grad}\Psi(x)\right|^2 < 0$$

für alle $x \neq x^*$ aus einer offenen Umgebung von x^* , falls x^* ein strenges lokales Extremum ist. Somit ergibt sich folgender Satz.

Satz 5.24 *Ein strenges lokales Minimum von $\Psi(x)$ ist ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt des Gradientensystems* (5.8).

5.4 Die van der Pol'sche Gleichung

Wir betrachten eine Gleichung der Gestalt

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{5.9}$$

mit gegebenen Lipschitz-stetigen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $g(0) = 0$ sei. Die Gleichung (5.9) ist äquivalent zu dem System

$$\dot{x}_1 = x_2 - F(x_1)\,, \quad \dot{x}_2 = -g(x_1)\,, \tag{5.10}$$

wobei $F(x_1) = \displaystyle\int_0^{x_1} f(s)\,ds$. Ist nämlich $[x_1(t), x_2(t)]^T$ eine Lösung von (5.10), so gilt

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 - f(x_1)\dot{x}_1 = -g(x_1) - f(x_1)\dot{x}_1\,,$$

so dass $x(t) = x_1(t)$ Lösung von (5.9) ist. Ist umgekehrt $x(t) =: x_1(t)$ Lösung von (5.9), so folgt

$$\dot{x}_1(t) = -F(x_1(t)) - \int_0^t g(x_1(s))\,ds + \mathrm{const} =: -F(x_1(t)) + x_2(t)$$

mit

$$\dot{x}_2(t) = -g(x_1(t))\,.$$

Wir nehmen nun an, dass für ein $\delta > 0$ die Bedingungen

$$G(x) := \int_0^x g(s)\,ds > 0\,,\ g(x)F(x) > 0\,, \quad 0 < |x| < \delta\,, \tag{5.11}$$

erfüllt sind, und setzen $L(x_1, x_2) = \dfrac{x_2^2}{2} + G(x_1)$. Dann ist

$$\dot{L}(x_1, x_2) = g(x_1)[x_2 - F(x_1)] + x_2[-g(x_1)] = -g(x_1)F(x_1) < 0$$

für $0 < |x_1| < \delta$. D.h., der Nullpunkt ist (asymptotisch) stabiler Gleichgewichtspunkt. Gilt in der zweiten Ungleichung von (5.11) das umgekehrte Ungleichheitszeichen, so ist er instabiler Gleichgewichtspunkt. Wenden wir dieses Resultat auf die **van der Pol'sche Gleichung**

$$\ddot{x} + \gamma(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

an, so erhalten wir

$$g(x) = x\,, \quad G(x) = \frac{x^2}{2}\,, \quad f(x) = \gamma(x^2 - 1)\,, \quad F(x) = \gamma\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$$

und somit

$$g(x)F(x) = \gamma\, x^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1\right) > 0 \ \ (< 0) \quad \text{für} \quad 0 < |x| < \sqrt{3}\,,$$

wenn $\gamma < 0$ (> 0) ist.

5.5 Das System Dampfmaschine – Fliehkraftregler

Siehe Skizze (vgl. auch [6, §27]): L_1 und L_2 m"ogen die L"ange 1 haben. Auf jeden Massepunkt wirken die Zentrifugalkraft $m\theta^2 \sin\varphi$ und die Schwerkraft $m\,g$ sowie die Reibung $b\,\dot\varphi$. Die Differentialgleichung der Dampfmaschine lautet

$$\mathcal{J}\,\dot\omega = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}\,,$$

wobei $\mathcal{J}$ das Trägheitsmoment und ω die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades, $\mathcal{M}_1$ das Drehmoment der Dampfkraft und $\mathcal{M}$ das Drehmoment, das die Last (z.B. ein Förderkorb) auf das Schwungrad ausübt, bezeichnen. Die Dampfmaschine und der Regler sind über das Übersetzungsverhältnis n ($\theta = n\omega$) und über die Gleichung

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_D + k(\cos\varphi - \cos\varphi^*)$$

miteinander gekoppelt. Es folgt

$$m\,\ddot\varphi = m\,n^2\omega^2 \sin\varphi\,\cos\varphi - m\,g\,\sin\varphi - b\,\dot\varphi\,, \quad \mathcal{J}\,\dot\omega = k\,\cos\varphi - \mathcal{M}_g$$

mit $\mathcal{M}_g = \mathcal{M} - \mathcal{M}_D + k\,\cos\varphi^*$. Dieses Differentialgleichungssystem ist äquivalent zu dem System

$$\begin{aligned}
\dot x_1 &= x_2\\
\dot x_2 &= n^2 x_3^2 \sin x_1 \cos x_1 - g\,\sin x_1 - \frac{b}{m}\,x_2\\
\dot x_3 &= \frac{k}{\mathcal{J}}\,\cos x_1 - \frac{\mathcal{M}_g}{\mathcal{J}}\,,
\end{aligned}$$

welches wir in der Form

$$\begin{aligned}
\dot x_1 &= x_2\\
\dot x_2 &= (\alpha\,x_3^2 \cos x_1 - \beta)\sin x_1 - \gamma\,x_2\\
\dot x_3 &= \delta\,\cos x_1 - \eta
\end{aligned}$$

schreiben. Wir verwenden dabei die Bezeichnungen

$$x_1 = \varphi\,,\; x_2 = \dot\varphi\,,\; x_3 = \omega\,,\; \alpha = n^2\,,\; \beta = g\,,\; \gamma = \frac{b}{m}\,,\; \delta = \frac{k}{\mathcal{J}}\,,\; \eta = \frac{\mathcal{M}_g}{\mathcal{J}}\,.$$

Der Phasenraum dieses Systems ist somit gleich $M = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^3$. Der stationäre Punkt $x^* \in M$ genügt den Gleichungen

$$\cos x_1^* = \frac{\eta}{\delta} = \frac{\mathcal{M}_g}{k}\,, \quad x_2^* = 0\,, \quad x_3^* = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha\,\cos x_1^*}} = \sqrt{\frac{\beta\,\delta}{\alpha\,\eta}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{g\,k}{\mathcal{M}_g}}\,. \tag{5.12}$$

Die Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes in diesem stationären Punkt ist gleich

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ -\alpha(x_3^*)^2 \sin^2 x_1^* & -\gamma & 2\alpha\,x_3^* \cos x_1^* \sin x_1^*\\ -\delta\,\sin x_1^* & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom dieser Matrix erhalten wir

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^2(\lambda+\gamma) + 2\alpha\,\delta\,x_3^*\cos x_1^*\sin^2 x_1^* + \alpha(x_3^*)^2\lambda\sin^2 x_1^* \\ &= \lambda^3 + \gamma\,\lambda^2 + \alpha(x_3^*)^2\,(\sin x_1^*)^2\,\lambda + 2\alpha\,\delta\,x_3^*\cos x_1^*\sin^2 x_1^*\,. \end{aligned}$$

Man nennt ein Polynom stabil, wenn alle seine Nullstellen negativen Realteil besitzen. Wir betrachten ein Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^3 + a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c \quad \text{mit} \quad a,b,c > 0 \tag{5.13}$$

und stellen die Frage, wann dieses Polynom stabil ist:

1. Wir schreiben $p(\lambda) = (\lambda + a)(\lambda^2 + b) - a\,b + c$ und nehmen an, dass $\lambda = \mathbf{i}\rho\,,\ \rho \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ Nullstelle ist. Dann gilt

$$0 = (\mathbf{i}\rho + a)(-\rho^2 + b) - ab + c\,, \quad \text{d.h.} \quad b - \rho^2 = 0 \quad \text{und} \quad a\,b = c\,.$$

   Ist umgekehrt $c - a\,b = 0$, so ist $\mathbf{i}\sqrt{b}$ rein imaginäre Nullstelle.

2. Sei $a\,b < c$. Wir lassen a und b gegen Null streben, und zwar so, dass diese Ungleichung erhalten bleibt. Das Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 + c$ hat neben $-c^{\frac{1}{3}}$ die Nullstellen

$$c^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

   rechts von der imaginären Achse.

3. Sei nun $a\,b > c$. Wir betrachten $c \longrightarrow 0$. Das Polynom $\lambda(\lambda^2 + a\,\lambda + b)$ hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ mit negativem Realteil und die Nullstelle $\lambda_3 = 0$. Letztere geht für kleines $c > 0$ in eine negative Nullstelle über, da $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -c < 0$.

Also: Das Polynom (5.13) ist genau dann stabil, wenn $a\,b > c$ gilt. Für den Fliehkraftregler bedeutet das

$$\gamma\,\alpha(x_3^*)^2\sin^2 x_1^* > 2\alpha\,\delta\,x_3^*\sin^2 x_1^*\cos x_1^*\,,$$

d.h.

$$x_3^*\gamma > 2\delta\,\cos x_1^* = 2\eta\,.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$\frac{b\,\mathcal{J}}{m} > \frac{2\mathcal{M}_g}{\omega^*}\,. \tag{5.14}$$

Die Größe

$$\nu = \left|\frac{d\omega^*}{d\mathcal{M}_g}\right|$$

heißt Ungleichförmigkeit des Laufes der Dampfmaschine (ν – Maß für die Änderung von ω^* bei Änderung der Last $\mathcal{M}$). Aus der Gleichung $(\omega^*)^2\mathcal{M}_g = \text{const}$ (siehe (5.12)) folgt

$$2\omega^*\frac{d\omega^*}{d\mathcal{M}_g}\,\mathcal{M}_g + (\omega^*)^2 = 0\,,$$

d.h.

$$\frac{d\omega^*}{d\mathcal{M}_g} = -\frac{\omega^*}{2\mathcal{M}_g}\,.$$

Somit ist die Stabilitätsbedingung (5.14) äquivalent zu

$$\frac{b\,\mathcal{J}}{m}\,\nu > 1\,. \tag{5.15}$$

Technische Entwicklungen im 19. Jahrhundert, die eigentlich die Maschinen verbessern sollten, wirkten der Bedingung (5.15) entgegen:

- Im Zusammenhang mit der Steigerung der Kapazität der Maschinen wurde das Gewicht der Schieber vergrößert und deshalb die Masse der Kugeln am Regler erhöht.
- Verbesserte Oberflächen führten zu einer Verringerung der Reibung.
- Das Trägheitsmoment des Schwungrades wurde zur Erhöhung der Arbeitsgeschwindigkeit der Maschinen verkleinert.
- Man strebte danach, die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Last zu verringern, was zu einer Verkleinerung der Ungleichförmigkeit des Laufes führte.

Kapitel 6

Globale Stabilitätstheorie

6.1 Grenzmengen, attraktive Mengen und Attraktoren

Beispiel 6.1 *Es seien* $M = (0, \infty)$ *und* $\dot{x} = x^2$. *Der Fluß dieses Systems ist gegeben durch (vgl. Beispiel 5.12)*

$$\Phi(t, x) = \frac{x}{1 - xt}, \quad -\infty < t < \frac{1}{x}, \ 0 < x < \infty .$$

Die Funktion $\tau_x(t) = \tau(x, t) = t + \dfrac{x^2 t}{1 - x\,t}$ *bildet* $\left(-\infty < t < \frac{1}{x}\right)$ *auf* $\mathbb{R}$ *ab, wobei* $\tau(x, 0) = 0$ *gilt. Mit* $t_x(\tau) = t(x, \tau)$ *bezeichnen wir die entsprechende Umkehrabbildung. Die Gleichung*

$$\dot{y} = \frac{y^2}{1 + y^2} \tag{6.1}$$

ist global integrierbar auf $\widetilde{M} = \mathbb{R}$ *(vgl. Folgerung 3.21), wobei* $M = (0, \infty)$ *ein invarianter Teilraum des Phasenraumes* $\widetilde{M}$ *ist. Es gilt für* $\psi_x(\tau) = \Phi(t(x, \tau), x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in M$ *die Beziehung*

$$\psi_x'(\tau) = \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial t} \frac{1}{\partial \tau / \partial t} = \frac{[\Phi(t, x)]^2}{1 + \dfrac{(1 - xt)x^2 + x^3 t}{(1 - xt)^2}} = \frac{[\psi_x(\tau)]^2}{1 + [\psi_x(\tau)]^2} ,$$

d.h., $\psi_x(t)$ *ist Lösung von* (6.1).

Definition 6.2 *Es seien* $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ *zwei zusammenhängende offene Mengen und* $v^j : M_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, *zwei lokal Lipschitz-stetige Geschwindigkeitsfelder. Die Systeme*

$$\dot{x} = v^1(x) \tag{6.2}$$

und

$$\dot{y} = v^2(y) \tag{6.3}$$

heißen zueinander **topologisch äquivalent**, *wenn ein Homöomorphismus* $H : M_1 \longrightarrow M_2$ *existiert, der Integralkurven von (6.2) auf Integralkurven von (6.3) abbildet. D.h., sind* $\Phi(t, x)$ *und* $\Psi(\tau, y)$ *die (lokalen) Flüsse von (6.2) bzw. (6.3), so existiert für jedes* $x \in M_1$ *eine bezüglich* τ *streng monoton wachsende stetige Funktion* $t(x, \tau)$, *so dass*

$$H(\Phi(t(x, \tau), x) = \Psi(\tau, H(x)) \tag{6.4}$$

für alle $x \in M_1$ *und alle* $\tau \in \left(a_{H(x)}, b_{H(x)}\right)$ *gilt.*

Satz 6.3 *Zu jedem System (6.2) existiert ein System (6.3), welches global integrierbar und topologisch äquivalent zu (6.2) ist.*

Wir betrachten deshalb im weiteren nur global integrierbare Systeme

$$\dot{x} = v(x) \tag{6.5}$$

und das dazugehörige dynamische System $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, wobei $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ als lokal Lipschitz-stetig vorausgesetzt wird.

Definition 6.4 *Ein Punkt $p \in M$ heißt ω-**Grenzpunkt** (α-**Grenzpunkt**) des Orbits $\Gamma = \Gamma_x = \{\Phi(t,x) : t \in \mathbb{R}\}$, wenn eine Folge $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{j\to\infty} t_j = +\infty$ ($\lim_{j\to\infty} t_j = -\infty$) und*

$$\lim_{j\to\infty} \Phi(t_j, x) = p$$

*existiert. Die Menge aller ω- bzw. α-Grenzpunkte heißt ω- bzw. α-**Grenzmenge** von Γ und wird mit $\omega(\Gamma)$ bzw. $\alpha(\Gamma)$ bezeichnet. Die Menge $\omega(\Gamma) \cup \alpha(\Gamma)$ heißt **Grenzmenge** von Γ.*

Satz 6.5 *Die α- und ω-Grenzmengen sind abgeschlossene Teilmengen von M. Ist $K \subset M$ kompakt und $\Gamma \subset K$, so sind $\alpha(\Gamma)$ und $\omega(\Gamma)$ nicht leer, zusammenhängend und kompakt.*

Satz 6.6 *Aus $p \in \alpha(\Gamma)$ folgt $\Gamma_p \subset \alpha(\Gamma)$, und aus $p \in \omega(\Gamma)$ folgt $\Gamma_p \subset \omega(\Gamma)$.*

Insbesondere sind also $\alpha(\Gamma)$ und $\omega(\Gamma)$ bezüglich des Flusses Φ invariante Teilmengen des Phasenraumes, d.h. z.B.

$$\Phi(t,y) \in \alpha(\Gamma) \quad \forall y \in \alpha(\Gamma),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hat also z.B. ein Orbit nur einen ω-Grenzpunkt, so ist dieser ein Gleichgewichtspunkt.

Definition 6.7 *Unter einer Umgebung einer Menge $A \subset M$ verstehen wir eine offene Menge $U \subset M$ mit $A \subset U$. Wir schreiben*

$$\Phi(t,x) \longrightarrow A \quad \textit{für} \quad t \longrightarrow \infty,$$

wenn

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}(\Phi(t,x), A) = \lim_{t\to\infty} \inf\{|\Phi(t,x) - y| : y \in A\} = 0.$$

*Eine abgeschlossene, bezüglich Φ invariante Menge $A \subset M$ heißt **attraktive Menge**, wenn eine Umgebung $U \subset M$ von A existiert, so dass $\Phi(t,x) \longrightarrow A$ für $t \longrightarrow \infty$ und $\forall x \in U$. Eine attraktive Menge heißt **Attraktor**, wenn sie einen dichten Orbit enthält, d.h. einen Orbit, dessen Abschließung A umfaßt.*

Beispiel 6.8 *Wir betrachten das System*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

und verwenden zu dessen Untersuchung die Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{aligned}$$

Der Koordinatenursprung ist Gleichgewichtspunkt. Der Einheitskreis $\mathbb{T} = \{r = 1\}$ ist ein Orbit mit $\alpha(\mathbb{T}) = \omega(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ und ω-Grenzmenge für alle anderen Orbits außer dem Koordinatenursprung.

Beispiel 6.9 *Wir untersuchen das System*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1-x^2-y^2-z^2)\,,\\ \dot{y} &= \quad x + y(1-x^2-y^2-z^2)\,,\\ \dot{z} &= 0\,.\end{aligned}$$

Beispiel 6.10 *Wir untersuchen das System*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1-x^2-y^2)\,,\\ \dot{y} &= \quad x + y(1-x^2-y^2)\,,\\ \dot{z} &= \alpha > 0\,.\end{aligned}$$

6.2 Periodische Orbits und Grenzzyklen

Definition 6.11 *Ein periodischer Orbit (auch Zyklus genannt) Γ heißt* **stabil**, *wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von Γ existiert, so dass*

$$\mathrm{dist}(\Phi(t,x),\Gamma) < \varepsilon \quad \forall t \geq 0\,,\ \forall x \in U\,.$$

Sonst heißt Γ **instabil**. *Der periodische Orbit Γ heißt* **asymptotisch stabil**, *wenn er stabil ist und wenn eine Umgebung U von Γ existiert, so dass*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(\Phi(t,x),\Gamma) = 0 \quad \forall x \in U$$

gilt.

Für eine gewisse Umgebung V von Γ definieren wir die lokale stabile bzw. instabile Mannigfaltigkeit von Γ durch

$$S(\Gamma) = \left\{x \in V : \lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}(\Phi(t,x),\Gamma) = 0\right\}$$

bzw.

$$U(\Gamma) = \left\{x \in V : \lim_{t\to-\infty} \mathrm{dist}(\Phi(t,x),\Gamma) = 0\right\}\,.$$

Die entsprechenden globalen Mannigfaltigkeiten sind dann gegeben durch

$$W^s(\Gamma) = \bigcup_{t\leq 0} \{\Phi(t,x) : x \in S(\Gamma)\} \quad \text{bzw.} \quad W^u(\Gamma) = \bigcup_{t\geq 0} \{\Phi(t,x) : x \in U(\Gamma)\}\,.$$

Beispiel 6.12 *Wir betrachten das System*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1-x^2-y^2)\,,\\ \dot{y} &= \quad x + y(1-x^2-y^2)\,,\\ \dot{z} &= z\,.\end{aligned}$$

Es existiert ein (instabiler) periodischer Orbit

$$\Gamma = \{(\cos t, \sin t, 0) : t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Der Koordinatenursprung ist Gleichgewichtspunkt. Weitere invariante Mengen sind die z-Achse, die x-y–Ebene und der Zylinder

$$\big\{(x,y,z) : x^2+y^2=1\big\} = \{(r,\varphi,z) : r=1\} \,.$$

Es gilt

$$W^s(\Gamma) = \big\{(x,y,0) : x^2+y^2>0\big\} \quad \textit{und} \quad W^u(\Gamma) = \big\{(x,y,z) : x^2+y^2=1\big\} \,.$$

Definition 6.13 *Einen periodischen Orbit Γ nennt man* **Grenzzyklus***, wenn er α- oder ω-Grenzmenge eines anderen Orbits ist. Gilt $\Gamma = \omega(\Gamma_x)$ für alle x aus einer Umgebung von Γ, so heißt Γ* **ω-Grenzzyklus** *oder* **stabiler Grenzzyklus***. Ist $\Gamma = \alpha(\Gamma_x)$ für alle x aus einer Umgebung von Γ, so heißt Γ* **α-Grenzyklus** *bzw.* **instabiler Grenzzyklus***.*

Ist also Γ ein stabiler Grenzzyklus, so ist er ein asymptotisch stabiler Zyklus und zugleich ein Attraktor.

Beispiel 6.14

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -y + x(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\\
\dot{y} &= x + y(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.
\end{aligned}$$

Dieses System ist äquivalent zu

$$\dot{r} = r^3 \sin\frac{1}{r}\,, \quad \dot{\varphi} = 1\,.$$

Periodische Orbits sind

$$\Gamma_{(n)} = \left\{\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{n\pi}\right\}\,, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Dabei sind die $\Gamma_{(2n)}$, $n=1,2,\ldots$, stabil und die $\Gamma_{(2n-1)}$, $n=1,2,\ldots$, instabil.

Bemerkung 6.15 *Für ebene Systeme gilt folgendes: Ist ein periodischer Orbit Γ ω-Grenzmenge eines Orbits außerhalb von Γ, so ist Γ ω-Grenzmenge für alle Γ_x mit x in einer "äußeren" Umgebung von Γ. Außerdem windet sich jeder dieser Orbits Γ_x für $t \longrightarrow \infty$ um Γ herum, und zwar in dem Sinne, dass jede Gerade senkrecht zu Γ zu unendlich vielen Zeitpunkten t_n von Γ_x geschnitten wird, wobei $t_n \longrightarrow \infty$ für $n \longrightarrow \infty$. (Gilt auch für "innen", und gilt auch für α-Grenzmenge.)*

Beispiel 6.16 *Das System*

$$\dot{x} = y\,, \quad \dot{y} = x + x^2$$

ist ein Hamiltonsches System mit $H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. Die Orbits liegen also auf den Kurven $y^2 - x^2 - \frac{2}{3}x^3 = \mathrm{const}$. Stationäre Punkte sind der Koordinatenursprung und der Punkt $(-1,0)$. Die Kurve

$$y^2 = x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

geht durch die Punkte $(-\frac{3}{2},0)$ und $(0,0)$ und enthält vier Orbits, nämlich

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2 + \frac{2}{3}x^3\,,\ -\frac{3}{2} \le x < 0\right\}\,,$$

den Koordinatenursprung und zwei weitere. Dabei gilt $\omega(\Gamma) = \alpha(\Gamma) = (0,0)$, d.h. Γ gehört sowohl zur stabilen als auch zur instabilen Mannigfaltigkeit des Koordinatenursprungs.

Kapitel 7

Anhang

7.1 Zum Beweis von Satz 5.6

Lemma 7.1 *Ist $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so existieren zu jedem $x^0 \in M$ ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$, so dass das Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x^1$$

für jedes $x^1 \in U_\delta(x^0)$ eine eindeutige Lösung $\varphi_{x^1} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ besitzt. Dabei ist die Abbildung $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_\delta(x^0) \longrightarrow M$, $(t, x) \mapsto \varphi_x(t)$ stetig differenzierbar.

Wir gehen nun auf einige Aspekte des Beweises von Satz 5.6 ein.

(a) Wir schreiben das System

$$\dot{x} = v(x) \tag{7.1}$$

in der Form

$$\dot{x} = Ax + F(x) \tag{7.2}$$

mit $A = v'(\Theta)$ und $F(x) = v(x) - Ax$. Dann gilt

$$F(\Theta) = \Theta \quad \text{und} \quad F'(\Theta) = v'(\Theta) - A = \Theta .$$

Da F stetig differenzierbar ist, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|F'(x)| < \varepsilon$ $\forall\, x \in U_\delta(\Theta)$. Der Mittelwertsatz impliziert

$$|F(x^1) - F(x^2)| \le \varepsilon |x^1 - x^2| \quad \forall\, x^1, x^2 \in U_\delta(\Theta) . \tag{7.3}$$

(b) Nach Abschnitt 2.3,(a) existiert eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass

$$B = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} P & \Theta \\ \Theta & Q \end{bmatrix},$$

wobei die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ der Matrix $P \in \mathbb{R}^{k \times k}$ negativen und die Eigenwerte $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n$ der Matrix $Q \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ positiven Realteil haben. Somit existiert ein $\alpha > 0$ mit

$$\mathsf{Re}\, \lambda_j < -\alpha < 0 , \quad j = 1, \ldots, k . \tag{7.4}$$

Mit der Koordinatentransformation $x = Ty$ sind (7.1) bzw. (7.2) äquivalent zu

$$T\dot{y} = ATy + F(Ty) , \quad y \in \widetilde{M} := T^{-1}(M) ,$$

bzw.

$$\dot{y} = By + G(y)\,, \quad G(y) = T^{-1}F(Ty)\,. \tag{7.5}$$

Mit $\|A\|$ sei die Spektralnorm der Matrix A bezeichnet. Wegen

$$|G(y^1) - G(y^2)| \le \left\|T^{-1}\right\| |F(Ty^1)) - F(Ty^2)| \overset{(7.3)}{\le} \left\|T^{-1}\right\| \varepsilon \|T\| \, |y^1 - y^2|\,,\ y^1, y^2 \in U_{\delta'}(\Theta)\,,$$

mit $\delta' = \dfrac{\delta}{\|T\|}$ können wir sagen, dass für jedes $\varepsilon' > 0$ eine $\delta' > 0$ existiert, so dass

$$|G(y^1) - G(y^2)| \le \varepsilon' |y^1 - y^2| \quad \forall\, y^1, y^2 \in U_{\delta'}(\Theta) \tag{7.6}$$

gilt. Wir führen den Beweis für das System (7.5) anstelle von (7.2).

(c) Wir definieren die Matrizen $U(t), V(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{tP} & \Theta \\ \Theta & \Theta \end{bmatrix}, \quad V(t) = \begin{bmatrix} \Theta & \Theta \\ \Theta & e^{tQ} \end{bmatrix}.$$

Dann gilt $U(t) + V(t) = e^{tB}$, $\dot{U}(t) = BU(t)$ und $\dot{V}(t) = BV(t)$. Aus (7.4) folgt die Existenz von Konstanten $K > 0$ und $\sigma > 0$, so dass

$$\|U(t)\| \le Ke^{-(\alpha+\sigma)t} \quad \forall\, t \ge 0 \tag{7.7}$$

und

$$\|V(t)\| \le Ke^{\sigma t} \quad \forall\, t \le 0\,. \tag{7.8}$$

(d) Sei nun $\varphi(t)$ eine stetige Lösung der Integralgleichung

$$\varphi(t) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(\varphi(s))\,ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\varphi(s))\,ds \tag{7.9}$$

bei gewähltem $a \in \mathbb{R}^n$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}(t) &= \dot{U}(t)a + \int_0^t \dot{U}(t-s)G(\varphi(s))\,ds + U(0)G(\varphi(t)) \\
&\quad - \int_t^\infty \dot{V}(t-s)G(\varphi(s))\,ds + V(0)G(\varphi(t)) \\
&= BU(t)a + B\int_0^t U(t-s)G(\varphi(s))\,ds - B\int_t^\infty V(t-s)G(\varphi(s))\,ds \\
&\quad + [U(0) + V(0)]G(\varphi(t)) \\
&= B\varphi(t) + G(\varphi(t))\,.
\end{aligned}$$

D.h., $\varphi(t)$ ist auch Lösung von (7.5).

(e) Wir lösen (7.9) mit der Methode der sukzessiven Approximation: $\varphi^{(0)}(t) = \Theta$,

$$\varphi^{(j+1)}(t) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(\varphi^{(j)}(s))\,ds - \int_t^\infty V(t-s)G(\varphi^{(j)}(s))\,ds\,, \tag{7.10}$$

$j = 0, 1, 2, \ldots$ Wir behaupten, dass es ein $\rho > 0$ gibt, so dass

$$|\varphi^{(j)}(t) - \varphi^{(j-1)}(t)| \le \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^{j-1}} \quad \forall\, a \in U_\rho(\Theta)\,,\ j = 1, 2, \ldots\,,\ t \ge 0 \tag{7.11}$$

gilt, und beweisen dies mittels vollständiger Induktion:

$j = 1$:

$$|\varphi^{(1)}(t)| \le |U(t)|\,|a| \overset{(7.7)}{\le} Ke^{-(\alpha+\sigma)t}|a| \le \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^{1-1}}\,, \quad t \ge 0$$

Sei (7.11) erfüllt für $j = 1, \ldots, m$.

$j = m + 1$: Aus

$$\begin{aligned} \varphi^{(m+1)}(t) - \varphi^{(m)}(t) &= \int_0^t U(t-s)\left[G(\varphi^{(m)}(s)) - G(\varphi^{(m-1)}(s))\right] ds \\ &\quad - \int_t^\infty V(t-s)\left[G(\varphi^{(m)}(s)) - G(\varphi^{(m-1)}(s))\right] ds \end{aligned}$$

folgt, falls $\varepsilon' = \dfrac{\sigma}{4K}$, $|a| < \dfrac{\delta'}{K} =: \rho$ und somit

$$|\varphi^{(m)}(s) - \varphi^{(m-1)}(s)| \le \frac{K|a|e^{-\alpha s}}{2^{m-1}} < \delta'$$

gilt, die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\varphi^{(m+1)}(t) - \varphi^{(m)}(t)| &\overset{(7.6)}{\le} \int_0^t |U(t-s)|\varepsilon'|\varphi^{(m)}(s) - \varphi^{(m-1)}(s)|ds \\ &\quad + \int_t^\infty |V(t-s)|\varepsilon'|\varphi^{(m)}(s) - \varphi^{(m-1)}(s)|ds \\ &\overset{(7.7),(7.8)}{\le} \frac{\varepsilon' K^2|a|}{2^{m-1}}\left(e^{-(\alpha+\sigma)t}\int_0^t e^{\sigma s}ds + e^{\sigma t}\int_t^\infty e^{-(\alpha+\sigma)s}ds\right) \\ &= \frac{\varepsilon' K^2|a|}{2^{m-1}}\,e^{-\alpha t}\left[\frac{1-e^{-\sigma t}}{\sigma} + \frac{1}{\alpha+\sigma}\right] \\ &\le \frac{2\varepsilon' K}{\sigma}\cdot\frac{K|a|}{2^{m-1}}\,e^{-\alpha t} = \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^m}\,. \end{aligned}$$

Man wähle also in (7.6) $\varepsilon' = \dfrac{\sigma}{4K}$ und setze $\rho = \dfrac{\delta'}{K}$.

(f) Für $j \ge N$, $k \ge 0$, $t \ge 0$ und $|a| < \rho$ folgt aus (7.11)

$$|\varphi^{(j+k)}(t) - \varphi^{(j)}(t)| \le \sum_{i=1}^{k} |\varphi^{(j+i)}(t) - \varphi^{(j+i-1)}(t)| \le K|a|e^{-\alpha t}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^{j+i-1}} \le \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^{N-1}}\,.$$

Somit konvergiert $\varphi^{(j)}(t)$ auf $[0,\infty)$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $\varphi(t) = \varphi(t;a)$ Aus (7.10) folgt, dass $\varphi(t)$ Lösung von (7.9) und somit von (7.5) ist. Weiterhin können wir wegen Lemma 7.1 davon ausgehen (evtl. $\rho > 0$ verkleinern), dass die Abbildung $a \mapsto \varphi(0;a)$ auf $U_\rho(\Theta)$ stetig differenzierbar ist.

(g) Aus (f) folgt für $j = 0$ und $k \longrightarrow \infty$

$$|\varphi(t;a)| \le 2K|a|e^{-\alpha t}\,, \quad |a| < \rho\,,\ t \ge 0\,. \tag{7.12}$$

Die letzten $n-k$ Komponenten des Vektors a haben keinen Einfluss auf die Lösung von (7.9) und können somit gleich 0 gesetzt werden. Die Lösung $\varphi(t;a)$ genügt damit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_j(0;a) = a_j\,, \quad j=1,\ldots,k\,,$$

$$\varphi_j(0;a) = -\int_0^\infty V_j(-s)G(\varphi(s;a_1,\ldots,a_k,0,\ldots,0))ds\,, \quad j=k+1,\ldots,n\,,$$

wobei V_j die j-te Zeile der Matrix V bezeichnet. Wir definieren

$$\psi_j(a_1,\ldots,a_k) = \varphi_j(0;a_1,\ldots,a_k,0,\ldots,0)\,, \quad j=k+1,\ldots,n\,.$$

Die Anfangswerte $y_j^0 = \varphi_j(0;a)$ genügen also den Gleichungen

$$y_j^0 = \psi_j(y_1^0,\ldots,y_k^0)\,, \quad j=k+1,\ldots,n\,.$$

Definieren wir

$$\widetilde{S} = \left\{ y\in\mathbb{R}^n : y_j = \psi_j(y_1,\ldots,y_k),\, j=k+1,\ldots,n,\, \sqrt{y_1^2+\ldots+y_k^2}<\rho \right\}\,,$$

so ist durch

$$h(y_1,\ldots,y_k) = (\rho y_1,\ldots,\rho y_k,\psi_{k+1}(\rho y_1,\ldots,\rho y_k),\ldots,\psi_n(\rho y_1,\ldots,\rho y_k))$$

ein differenzierbarer Homöomorphismus der offenen Einheitskugel im $\mathbb{R}^k$ auf $\widetilde{S}$ gegeben, wobei $h^{-1}(z_1,\ldots,z_n) = \left(\rho^{-1}z_1,\ldots,\rho^{-1}z_k\right)\,,\ z\in\widetilde{S}$.

(h) Ist nun $\varphi_{y^0}(t)$ eine Lösung von (7.5) mit $y^0 = \varphi_{y^0}(0)\in\widetilde{S}$, so ist nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz $\varphi_{y^0}(t) = \varphi(t;a)$ mit $a = (y_1^0,\ldots,y_k^0,0,\ldots,0)$ und nach (7.12) $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_{y^0}(t) = \Theta$.

(i) Für $i=1,\ldots,k$ und $j=k+1,\ldots,n$ sowie hinreichend kleine $|y_i|$ gilt

$$\begin{aligned}|\psi_j(0,\ldots,0,y_i,0,\ldots,0)-\psi_j(0,\ldots,0)| &= \left|\int_0^\infty V_j(-s)G(\varphi(s;0,\ldots,0,y_i,0,\ldots,0))ds\right| \\ &\overset{(7.6)}{\leq} \varepsilon_1|y_i|\int_0^\infty Ke^{-\sigma s}\,ds = \frac{K\varepsilon_1}{\sigma}\,|y_i|\,,\end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_1>0$ beliebig klein gewählt werden kann. Es folgt $\dfrac{\partial\psi_j(\Theta)}{\partial y_i} = 0$.

7.2 Die Poincaré-Abbildung

Definition 7.2 *Es seien Γ_{x^0} ein periodischer Orbit der (primen) Periode $T>0$ und Σ die Hyperebene, die durch x^0 geht und senkrecht auf Γ_{x^0} steht. Dann existieren (wegen der Stetigkeit des Flusses) eine Umgebung U von x^0 und eine (eindeutig bestimmte) stetige Funktion $\tau : U\longrightarrow\mathbb{R}$, so dass $\tau(x^0)=T$ (Periode von Γ) und $\Phi(\tau(x),x)\in\Sigma$ für alle $x\in U$. Die Abbildung $P: U\cap\Sigma\longrightarrow\Sigma$ mit $P(x)=\Phi(\tau(x),x)$ wird* **Poincaré-Abbildung** *genannt.*

Wir betrachten nochmals (vgl. Beispiel 6.8)

$$\dot r = r(1-r^2)\,,\ \dot\varphi = 1\,, \quad r(0)=r_0>0\,,\ \varphi(0)=\varphi_0\,.$$

Es folgt

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{r_0^2}-1\right)e^{-2t}}}\,, \quad \varphi(t) = t + \varphi_0\,.$$

Für die Poincarè-Abbildung im Punkt $(r,\varphi) = (1,\theta_0)$ des Einheitskreises gilt:

$$P(r_0) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{r_0^2}-1\right)e^{-4\pi}}}\,, \quad P(1) = 1\,,$$

$$P'(r_0) = e^{-4\pi} r_0^{-3}\left[1+\left(\frac{1}{r_0^2}-1\right)e^{-4\pi}\right]^{-3/2}\,,$$

d.h.

$$P'(1) = e^{-4\pi} < 1\,.$$

Wir betrachten jetzt ebene Systeme. Es seien $x^0 \in \Gamma$, Γ ein periodischer Orbit und Σ die Gerade senkrecht zu Γ im Punkt x^0. Der Punkt x^0 zerlegt Σ in Σ^+ und Σ^-, wobei Σ^+ ins Äußere von Γ zeige. Mit s bezeichnen wir den vorzeichenbehafteten Abstand von x^0 für die Punkte auf Σ, wobei $s > 0$ für Punkte aus Σ^+ und $s < 0$ für Punkte aus Σ^- gelte. Wir können jetzt die Poincarè-Abbildung mit $P(s)$ bezeichnen. Sie ist für $|s| < \delta$ ($\delta > 0$ hinreichend klein) erklärt, wobei $P(0) = 0$ gilt. Mit $d(s)$ bezeichnen wir die Verschiebungsfunktion $d(s) := P(s) - s$. Wir gehen davon aus, dass $P(s)$ stetig differenzierbar ist. Dann ist $d(0) = 0$ und $d'(s) = P'(s) - 1$. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt $d(s) = d(s) - d(0) = d'(\xi)s$. Da $d'(s)$ stetig ist, hat für hinreichend kleine $|s|$ die Größe $d'(\xi)$ dasselbe Vorzeichen wie $d'(0)$, so dass für hinreichend kleine $|s|$ gilt:

- Ist $d'(0) < 0$ (also $P'(0) < 1$), so ist $d(s) < 0$ für $s > 0$ und $d(s) > 0$ für $s < 0$, und somit ist Γ ein stabiler Grenzzyklus.
- Ist $d'(0) > 0$ (also $P'(0) > 1$), so ist $d(s) > 0$ für $s > 0$ und $d(s) < 0$ für $s < 0$, und somit ist Γ ein instabiler Grenzzyklus.

Bemerkung 7.3 *Ist Γ_{x^0} ein periodischer Orbit in $\mathbb{R}^2$ der Periode T und $P(s)$ die wie oben definierte Poincaré-Abbildung bzgl. der Normalen zu Γ_{x^0} im Punkt x^0, so gilt*

$$P'(0) = \exp\left\{\int_0^T \nabla\cdot v\left(\Phi(t,x^0)\right)\,dt\right\}\,.$$

Ist also

$$\int_0^T \nabla\cdot v\left(\Phi(t,x^0)\right)\,dt < 0 \quad (> 0)\,,$$

so ist Γ_{x^0} ein stabiler (instabiler) Grenzzyklus.

Index