Skript zur Vorlesung

Funktionentheorie

WS 2014/15

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] K. Burg, H. Haf, F. Wille, Höhere Mathematik für Ingenieure, Band IV, Vektoranalysis und Funktionentheorie, Teubner, Stuttgart.

[2] W. Fischer, I. Lieb, Funktionentheorie, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden.

[3] W. Forst, D. Hoffmann, Funktionentheorie erkunden mit Maple, Springer-Verlag, Berlin, ...

[4] A. Herz, M. Schalk, Repetitorium der Funktionentheorie, Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden.

[5] K. Jänich, Einführung in die Funktionentheorie, Springer-Verlag, Berlin, ...

[6] K. Jänich, Analysis für Physiker und Ingenieure, Funktionentheorie, Differentialgleichungen, spezielle Funktionen, Springer-Verlag, Berlin, ...

[7] K. Jänisch, Funktionentheorie, Eine Einführung, Springer-Verlag, Berlin, ...

[8] P. Junghanns, Analysis I/II, Vorlesungsskript 2013/14, www-user.tu-chemnitz.de/~peju

[9] M. A. Lawrentjew, B. V. Schabat, Methoden der komplexen Funktionentheorie, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[10] R. Remmert, Funktionentheorie, Springer-Verlag, Berlin, ...

[11] F. Rühs, Funktionentheorie, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[12] S. Timmann, Repetitorium der Funktionentheorie, Verlag Binomi, Hannover.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Holomorphe Funktionen

Eine zusammenhängende offene Menge $G \subset \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**. Im weiteren sei G stets ein Gebiet. Wir betrachten Funktionen $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$. Manchmal schreiben wir für $f(z)$ auch $f(x,y)$, wobei $z = x + \mathbf{i}y$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Weiterhin kann f auch in der Form

$$f(x,y) = u(x,y) + \mathbf{i}v(x,y)$$

mit $u, v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ geschrieben werden. Wir erinnern an den Begriff der Differenzierbarkeit ([8, Def. 4.1]).

Definition 1.1 *Die Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$* **(komplex) differenzierbar**, *wenn eine in z_0 stetige Funktion $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert, so dass*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z) \quad \forall\, z \in G \tag{1.1}$$

gilt. Die Zahl $f'(z_0) := g(z_0)$ heißt **Ableitung** *von f im Punkt z_0.*

Bekanntlich heißt die Funktion $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig in $z_0 \in G$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $g(z) \in U_\varepsilon(g(z_0))\ \forall\, z \in U_\delta(z_0)$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass aus $z_n \longrightarrow z_0$ stets $g(z_n) \longrightarrow g(z_0)$ folgt.

Bemerkung 1.2 *In* (1.1) *kann man sich auf $z \in U_\varepsilon(z_0) \subset G$ mit einem geeigneten $\varepsilon > 0$ einschränken. Die Bedingung* (1.1) *ist äquivalent zu*

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \forall\, z \in G \setminus \{z_0\},$$

und die Stetigkeit von $g(z)$ im Punkt z_0 ist gleichbedeutend mit der Existenz des Grenzwertes dieses Differenzenquotienten für $z \longrightarrow z_0$, d.h.,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,.$$

Wir schreiben $f(z) = f(x,y)$ mit $z = x + \mathbf{i}y$ und erinnern an den Begriff der (reellen) Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : G \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ in $z_0 = (x_0, y_0) \in G$ (vgl. [8, Def. 6.4]):

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + A(x,y)\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

mit $A : G \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ stetig in (x_0, y_0) bzw.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0)A_1(x,y) + (y - y_0)A_2(x,y)$$

mit $A_1, A_2 : G \to \mathbb{R}^2$ stetig in (x_0, y_0). Es sind dann

$$A_1(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = f_x(x_0,y_0) \qquad \text{und} \qquad A_2(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = f_y(x_0,y_0).$$

Schreibt man $f = u + \mathbf{i}v$ mit $u, v : G \longrightarrow \mathbb{R}$, so ist die reelle Differenzierbarkeit von f äquivalent zu der von u und v.

Satz 1.3 *$f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann reell im Punkt z_0 differenzierbar, wenn in z_0 stetige Funktionen $B_1, B_2 : G \to \mathbb{C}$ existieren, so dass*

$$f(z) = f(z_0) + B_1(z)(z - z_0) + B_2(z)(\overline{z} - \overline{z}_0) \quad \forall\, z \in G$$

gilt. Dabei ist

$$B_1(z_0) = \frac{1}{2}\left[f_x(z_0) - \mathbf{i}f_y(z_0)\right] \quad \textit{und} \quad B_2(z_0) = \frac{1}{2}\left[f_x(z_0) + \mathbf{i}f_y(z_0)\right].$$

Die Zahlen

$$f_z(z_0) := \frac{1}{2}\left[f_x(z_0) - \mathbf{i}f_y(z_0)\right] \quad \text{und} \quad f_{\overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left[f_x(z_0) + \mathbf{i}f_y(z_0)\right]$$

nennt man **Wirtinger-Ableitungen** von f im Punkt z_0.

Satz 1.4 *Die Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in $z_0 \in G$ (komplex) differenzierbar, wenn f in z_0 reell differenzierbar ist und $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$ gilt.*

Beispiel 1.5 *Die Funktion $f(z) = \overline{z}$ ist wegen $f_{\overline{z}}(z) = 1$ nicht komplex differenzierbar.*

Folgerung 1.6 *Ist f in z_0 differenzierbar, so gilt $f'(z_0) = \frac{1}{2}\left[f_x(z_0) - \mathbf{i}f_y(z_0)\right] = f_z(z_0)$ und wegen*

$$0 = f_{\overline{z}}(z_0) = f_x(z_0) + \mathbf{i}f_y(z_0) = u_x(x_0,y_0) + \mathbf{i}v_x(x_0,y_0) + \mathbf{i}u_y(x_0,y_0) - v_y(x_0,y_0)$$

gelten die **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen**

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)\,, \quad u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)\,.$$

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) = 0\ \forall\, z \in G$, so ist $f(z) \equiv \mathrm{const}$ auf G.

Man nennt eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ **holomorph** (in G), wenn f in jedem Punkt $z_0 \in G$ differenzierbar ist. Sie heißt **im Punkt** $z_0 \in G$ **holomorph**, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f : U_\varepsilon(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. Eine Funktion $f : G_1 \longrightarrow G_2$ ($G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ - Gebiete) heißt **biholomorph** , wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch $f^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$ holomorph sind.

Satz 1.7 *Die Funktion $f : G_1 \longrightarrow G_2$ ist genau dann biholomorph, wenn $f : G_1 \longrightarrow G_2$ bijektiv ist, $f^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$ stetig ist und $f'(z) \neq 0\ \forall\, z \in G_1$ gilt.*

1.2 Potenzreihen

Wir erinnern an den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen (vgl. [8, Abschn. 5.1]). Eine Folge von Funktionen $f_n : G \longrightarrow \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ heißt **gleichmäßig konvergent** gegen $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \text{und} \quad \forall\, z \in G$$

gilt. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ heißt gleichmäßig konvergent mit der Summe $s(z)$, wenn die Folge der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ gleichmäßig gegen s konvergiert.

Bemerkung 1.8 (*Wiederholung*)

1. *Konvergieren die stetigen Funktionen $f_n : G \longrightarrow \mathbb{C}$ gleichmäßig gegen $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, so ist auch $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. [8, Satz 5.6]*

2. (*Cauchysches Konvergenzkriterium*) *Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf G, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass*
$$\left| \sum_{k=n}^{m} f_k(z) \right| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N} \quad \textit{mit} \quad m \geq n \geq n_0 \quad \textit{und} \quad \forall\, z \in G\,.$$

3. (*Majorantenkriterium*) *Ist die Zahlenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent und gilt $|f_n(z)| \leq a_n \ \forall\, n \geq n_0$ und $\forall\, z \in G$, so ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ (absolut) gleichmäßig konvergent. [8, Satz5.9]*

4. *Ist $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, so sprechen wir von der* **Potenzreihe** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *mit dem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Zahl $r_0 := \left[\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right]^{-1}$ ist der sogenannte* **Konvergenzradius** *dieser Potenzreihe. Es gilt:*

   (a) *Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergiert absolut gleichmäßig auf $U_r(z_0)$ für beliebiges $r \in (0, r_0)$. [8, Bsp. 5.10]*

   (b) *Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ist divergent für $|z - z_0| > r_0$. [8, Bsp. 3.53]*

Satz 1.9 (vgl. [8], Satz 4.11) *Im Fall $r_0 > 0$ ist die Summenfunktion $s(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ auf $U_{r_0}(z_0)$ holomorph, und es gilt*

$$s^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z - z_0)^{n-k} \quad \forall\, z \in U_{r_0}(z_0) \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots$$

Insbesondere ist $a_n = \dfrac{s^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

1.3 Elementare Funktionen

Die **Exponentialfunktion**

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1.2}$$

ist für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert (vgl. [8, Bsp. 3.61]). Nach Satz 1.9 ist somit e^z auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph (solche Funktionen heißen **ganze Funktionen**, engl.: entire functions). Ferner gilt nach Satz 1.9

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z .$$

Ferner gilt das Potenzgesetz $e^{z+w} = e^z e^w$, $t, w \in \mathbb{C}$ (vgl. [8, Bsp. 3.61]), welches man auch wie folgt ableiten kann: Es seien $w \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl, aber fest gewählt, und $f(z) = e^{-z} e^{w+z}$, $z \in \mathbb{C}$. Es folgt mittels Produkt- und Kettenregel

$$f'(z) = e^{-z} e^{w+z} - e^{-z} e^{w+z} = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

und somit $f(z) \equiv f(0) = \exp(w)$. Wir erhalten für alle $z \in \mathbb{C}$

$$e^{-z} e^{w+z} = e^w , \quad e^{-z} e^z = 1 \quad \text{und} \quad e^z \neq 0 .$$

Also gilt $e^{w+z} = e^w e^z$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$. Die **trigonometrischen Funktionen** (vgl. [8, Bsp. 4.32])

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{und} \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

sind ebenfalls ganze Funktionen. Aus Satz 1.9 folgt

$$(\sin z)' = \cos z \quad \text{und} \quad (\cos z)' = -\sin z$$

sowie aus (1.2) die **Euler'sche Formel**

$$\cos z + \mathbf{i} \sin z = e^{\mathbf{i}z} .$$

Dies führt mit $\cos(-z) + \mathbf{i}\sin(-z) = \cos(z) - \mathbf{i}\sin(z) = e^{-\mathbf{i}z}$ zu den Formeln

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z} + e^{\mathbf{i}z}\right) \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}\right) . \tag{1.3}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
\cos(z_1 + z_2) &= \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}(z_1+z_2)} + e^{-\mathbf{i}(z_1+z_2)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_1} e^{\mathbf{i}z_2} + e^{-\mathbf{i}z_1} e^{-\mathbf{i}z_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_1} + e^{-\mathbf{i}z_1}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_2} + e^{-\mathbf{i}z_2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_1} - e^{-\mathbf{i}z_1}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_2} - e^{-\mathbf{i}z_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_1} + e^{-\mathbf{i}z_1}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z_2} + e^{-\mathbf{i}z_2}\right) - \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(e^{\mathbf{i}z_1} - e^{-\mathbf{i}z_1}\right) \cdot \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(e^{\mathbf{i}z_2} - e^{-\mathbf{i}z_2}\right) \\
&= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 .
\end{aligned}$$

Analog zeigt man die Gültigkeit von $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$.

Nullstellen und Perioden. (vgl. [8, Bsp. 4.32]) Für $z=x+\mathbf{i}y$, $x,y\in\mathbb{R}$, ist $e^z=e^xe^{\mathbf{i}y}=e^x(\cos y+\mathbf{i}\sin y)$, also $|e^z|=e^x$ und $\arg e^z=y=\mathsf{Im}\, z$. Die Funktion $e^{\mathbf{i}z}$ bildet das Intervall $z\in[0,2\pi)$ eineindeutig auf den Einheitskreis

$$\mathbb{T}=\left\{e^{\mathbf{i}t}:t\in[0,2\pi)\right\}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$$

ab. Sei $k\in\mathbb{Z}$. Offenbar ist $e^{2\pi\mathbf{i}}=1$, also $e^{z+2\pi\mathbf{i}k}=e^z(e^{2\pi\mathbf{i}})^k=e^z$, d.h. $T_k=2\pi\mathbf{i}k$ ist eine Periode von e^z , und zwar $\forall\, k\in\mathbb{Z}$. Ist umgekehrt $e^{z_1}=e^{z_2}$, so folgt für $z:=z_1-z_2=x+\mathbf{i}y$ $(x,y\in\mathbb{R})$ die Formel $1=e^z=e^x(\cos y+\mathbf{i}\sin y)$. Also sind $e^x=1$ (d.h $x=0$) und $\cos y=1$, $\sin y=0$, d.h. $y=2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Somit hat die Funktion e^z keine weiteren Perioden außer $T_k=2\pi\mathbf{i}k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Wir suchen die Nullstellen von $\sin z$ und $\cos z$. Unter Verwendung der Formeln (1.3) erhalten wir

$$0=\sin z\iff 0=e^{\mathbf{i}z}-e^{-\mathbf{i}z}\iff e^{2\mathbf{i}z}=1\iff z=k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\,,$$

und

$$0=\cos z\iff 0=e^{\mathbf{i}z}+e^{-\mathbf{i}z}\iff e^{2\mathbf{i}z}=-1\iff z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Aus den Formeln (1.3) folgt, dass $\cos z$ und $\sin z$ die Perioden $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, haben. Ist umgekehrt $w\in\mathbb{C}$ eine Periode von $\sin z$, so folgt $\sin w=\sin 0=0$, d.h. $w=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, da $\sin z$ nach den obigen Überlegungen nur diese Nullstellen hat. Also sind die reellen Perioden $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, auch die einzigen Perioden von $\sin z$, und analog auch für $\cos z$.

Folgerung 1.10 *Für $a\in\mathbb{R}$ wird der Streifen $\{z\in\mathbb{C}:a\le\mathsf{Im}\, z<a+2\pi\}$ durch die Funktion $z\mapsto e^z$ bijektiv auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ abgebildet. Das ergibt sich aus der oben erkannten Periodizität von e^z und der Tatsache, dass die Gleichung $e^z=w$ für beliebiges $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ eine Lösung besitzt, nämlich $z=x+\mathbf{i}y$ mit $x=\ln|w|$ und $y=\arg w$.*

Weitere Beispiele für elementare Funktionen:

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}\\
\cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}\\
\cosh z &= \frac{1}{2}\left(e^z+e^{-z}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-\mathbf{i}(\mathbf{i}z)}+e^{\mathbf{i}(\mathbf{i}z)}\right)=\cos(\mathbf{i}z)\\
\sinh z &= \frac{1}{2}\left(e^z-e^{-z}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-\mathbf{i}(\mathbf{i}z)}-e^{\mathbf{i}(\mathbf{i}z)}\right)=-\mathbf{i}\sin(\mathbf{i}z)
\end{aligned}$$

1.4 Die stereografische Projektion

Für $\varepsilon>0$ bezeichnen wir bekanntlich mit $U_\varepsilon(z_0)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<\varepsilon\}$ die sogenannte ε-Umgebung von $z_0\in\mathbb{C}$. Ist $R>0$, so nennen wir $\{z\in\mathbb{C}:|z|>R\}$ eine Umgebung des unendlich fernen Punktes P_∞ . Dass es natürlich ist, von genau einem unendlich fernen Punkt zu sprechen, zeigt die sogenannte **stereografische Projektion** der komplexen Zahlenebene auf die Oberfläche einer Kugel. Dazu legen wir eine Kugel vom Durchmesser 1 auf die komplexe

Zahlenebene, und zwar im Nullpunkt. Der Bildpunkt P_z auf der Kugeloberfläche K der komplexen Zahl z ist der Durchstoßpunkt der Verbindungslinie von z zum Nordpol $P = (0, 0, 1)$ der Kugel. Für $z = x + \mathbf{i}y$ und $P_z = (\xi, \eta, \zeta)$ gilt also

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}$$

und

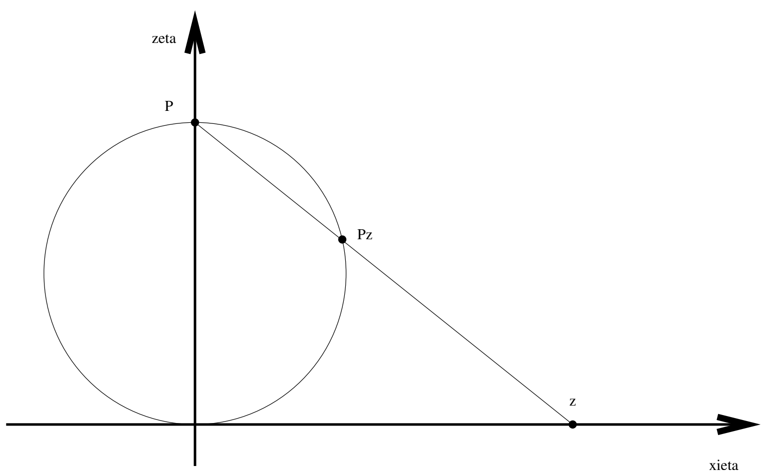
$$P_z \in K = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\} = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 = \zeta(1 - \zeta) \right\} .$$

Es folgt

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta} , \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta} \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{\zeta}{1 - \zeta} ,$$

so dass

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} , \quad \xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} , \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} .$$



Satz 1.11 *Bei der stereografischen Projektion bestehen zwischen $z = x + \mathbf{i}y$ und $P_z = (\xi, \eta, \zeta)$ die Relationen*

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta} , \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta} , \quad x^2 + y^2 = \frac{\zeta}{1 - \zeta} \tag{1.4}$$

und

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} , \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} , \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} . \tag{1.5}$$

Dabei gehen Kreise (und Geraden, d.h. Kreise mit unendlichem Radius) in Kreise auf der Kugeloberfläche über und umgekehrt.

Das Urbild P_∞ des Punktes P (des Nordpols der Kugel) bei der stereografischen Projektion nennen wir **unendlich fernen Punkt** . Die Menge $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{P_\infty\}$ heißt **abgeschlossene** bzw. **kompaktifizierte Zahlenebene**. In $\overline{\mathbb{C}}$ kann auch ein Abstand definiert werden, und zwar durch

$$d(z_1, z_2) := |P_{z_1} - P_{z_2}| ,$$

wobei $|\,.\,|$ die Euklidische Norm im dreidimensionalen Raum bezeichnet. Es gilt (im Sinne dieser Metrik) $z_n \longrightarrow P_\infty$ genau dann, wenn $|z_n| \longrightarrow \infty$. Außerdem ist $(\overline{\mathbb{C}}, d)$ ein kompakter metrischer Raum.

1.5 Übungsaufgaben

1. Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$ eine hermitesche Matrix. Man zeige, dass die Menge

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} z & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \overline{z} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

   eine Kreislinie oder Gerade ist, falls $\det A < 0$ gilt.

2. Beweisen Sie mit Hilfe der Rechengesetze für komplexe Zahlen, dass die Innenwinkelsumme in einem Dreieck π beträgt.

3. Man zeige, dass für komplexe α und β ($\beta \neq 0$) das Gleichheitszeichen in $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ genau dann steht, wenn $\dfrac{\alpha}{\beta}$ reell und nichtnegativ ist.

4. Für welche $z \in \mathbb{C}$ existieren folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} nz^n$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$, (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{z^k}{k!}$.

5. Man untersuche folgende Funktionen $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit Hilfe der Definition 1.2 der Vorlesung auf Differenzierbarkeit:

   (a) $f(z) = 5\mathbf{i}$, (b) $f(z) = z$, (c) $f(z) = \overline{z}$, (d) $f(z) = 3 \,\mathsf{Re}\, z$.

6. Man untersuche folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit und gebe gegebenenfalls die Ableitung $f'(z)$ an:

   (a) $f(z) = z\overline{z}$, (b) $f(z) = z^2\overline{z}$, (c) $f(z) = \mathsf{Im}\, z$,
   (d) $f(z) = \sqrt{|xy|}$ $(z = x + \mathbf{i}y)$, (e) $f(z) = z \,\mathsf{Re}\, z$, (f) $f(z) = |z|$.

7. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z^{-4}} & : \quad z \neq 0 \\ 0 & : \quad z = 0 \end{cases}$$

   im Nullpunkt nicht stetig ist, aber in jedem Punkt die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt. In welchen Punkten ist f differenzierbar?

8. Bestimmen Sie reelle Konstanten a, b, c, für die die folgenden Funktionen ganze Funktionen sind ($z = x + \mathbf{i}y$):

   (a) $f(z) = x + ay + \mathbf{i}(bx + cy)$,
   (b) $f(z) = \cos x(\cosh y + \mathbf{i} \sinh y) + \sin x \cosh y + b\, \mathbf{i} \sinh y)$.

9. Man bestimme Gebiete, in denen die Funktion $f(z) = |x^2 - y^2| + 2\mathbf{i}|xy|$ holomorph ist ($z = x + \mathbf{i}y$).

10. Die Funktion $f(z) = u(x,y) + \mathbf{i}v(x,y)$, $z = x + \mathbf{i}y$, genüge den Bedingungen

    (a) $u, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

(b) $f(z)$ ist ganze Funktion,

(c) $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$,

(d) $f(0) = 0$,

Man bestimme $v(x,y)$.

11. Sei $f(z) = u(z) + \mathbf{i}v(z) = \rho(z)e^{\mathbf{i}\varphi(z)}$ eine holomorphe Funktion im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Man beweise: Wenn eine der Funktionen $u, v, \rho, \varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ konstant ist in G, so ist auch $f(z)$ in G konstant.

12. Entwickeln Sie folgende Funktionen in $z_0 \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe:

(a) $f(z) = e^z$, $z_0 = \pi\mathbf{i}$, (b) $f(z) = \dfrac{1}{z - \mathbf{i}}$, $z_0 = 0$,

(c) $f(z) = \dfrac{1}{(z-\mathbf{i})^3}$, $z_0 = -\mathbf{i}$, (d) $f(z) = \dfrac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2}$, $z_0 = 0$.

13. Für welche komplexen Zahlen z konvergieren die Reihen

(a) $1 + (2z+1) + (2z+1)^2 + \ldots$, (b) $1 + 2\dfrac{z-1}{z+1} + 2\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2 + \ldots$

Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz sie Summe der Reihe?

14. Man berechne die ersten drei Glieder der Potenzreihe von $f(z)$ in $z_0 = 0$ für

(a) $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$, (b) $f(z) = \tan z$.

15. Entwickeln Sie $f(z) = \sin^2 z$ in $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe.

16. Man beweise die Gültigkeit der folgenden Beziehungen ($z = x + \mathbf{i}y$):

(a) $\mathsf{Re}\,\sin z = \sin x \cdot \cosh y$, $\mathsf{Im}\,\sin z = \cos x \cdot \sinh y$,

(b) $|\sin z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$,

(c) $\cos z = \cos x \cosh y - \mathbf{i} \sin x \sinh y$.

17. Auf welchen Teilmengen der komplexen Zahlenebene sind die Funktionen $f_1(z) = e^z$, $f_2(z) = \cos z$, $f_3(z) = \sin z$ reellwertig? Berechnen Sie $f_1\left(\dfrac{\pi}{2}(1+\mathbf{i})\right)$, $f_2(\pi + \mathbf{i})$ und $f_3(2\mathbf{i})$.

18. Man bestimme alle Lösungen $w = u + \mathbf{i}v \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen:

(a) $e^w = re^{\mathbf{i}\varphi}$ $(r, \varphi \in \mathbb{R}, r \geq 0)$, (b) $e^w = 1$, (c) $e^w = \mathbf{i}$,

(d) $\sin w = \dfrac{1}{2}$, (e) $\cos w = \dfrac{1}{2}$, (f) $\sin w = \mathbf{i}$.

19. Man bestimme (für $k \in \mathbb{Z}$ fixiert) das Bild des Gebietes

$$G_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2}(2k-1) < \mathsf{Re}\, z < \frac{\pi}{2}(2k+1) \right\}$$

bei der Abbildung $w = f(z) = \sin z$. Ist $f(z)$ dort eineindeutig?

20. Man bestimme das Bild $f(D)$ des Gebietes

(a) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z > 0\}$ bei der Abbildung $w = f(z) = z^2$,

(b) $D = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathsf{Im}\, z < 0\}$ bei der Abbildung $w = f(z) = e^z$,

(c) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z > |\mathsf{Im}\, z|\}$ bei der Abbildung $f(z) = z^3$.

21. Welche Gebiete $D_n \subset \mathbb{C}$ werden durch $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ auf die "geschlitzte" Ebene $E = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ eineindeutig abgebildet?

22. Bestimmen Sie die Bildmengen folgender Punktmengen bei der Abbildung $w = \dfrac{1}{z}$:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$, (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ $(r > 0)$,

(c) $\left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}\right\}$, (d) $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z = 1\}$.

Kapitel 2

Wegintegrale und Stammfunktionen

2.1 Wege, Kurven und Wegintegrale

Im Weiteren sei $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.

Definition 2.1 *Ein* **Weg** *(in $\mathbb{C}$) ist eine stetige Abbildung $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$. Ein solcher Weg heißt* **Jordan-Integrationsweg***, wenn die Abbildung $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar ist, d.h., wenn eine Zerlegung $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta$ existiert, so dass $\gamma' : [t_{j-1}, t_j] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig ist $\forall\, j = 1, \ldots, m$ (genauer: $\gamma' : (t_{j-1}, t_j)$ ist stetig und stetig auf $[t_{j-1}, t_j]$ fortsetzbar). Unter einer* **Jordan-Integrationskurve** *Γ verstehen wir das Bild $\Gamma = \{\gamma(t) : \alpha \le t \le \beta\}$ eines Jordan-Integrationsweges γ. Der Weg bzw. die Kurve heißen (einfach)* **geschlossen***, wenn $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ gilt und $\gamma : [a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$ injektiv ist. Den Jordan-Integrationsweg $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ bzw. die zugehörige Kurve Γ nennt man* **stückweise glatt***, wenn $\gamma'(t \pm 0) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$ gilt*

Wir vereinbaren, dass der Weg $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ einer Jordan-Integrationskurve Γ zugleich eine **Orientierung** von Γ angibt, d.h., $\gamma(\alpha)$ ist Anfangspunkt von Γ und $\gamma(\beta)$ Endpunkt von Γ. Sind $z_j = \gamma(t_j) \in \Gamma$, $j = 1, 2$, zwei Punkte auf Γ, so schreiben wir $z_1 \prec z_2$ genau dann, wenn $t_1 < t_2$ gilt.

Definition 2.2 *Es seien $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Jordan-Integrationsweg, $\Gamma = \{\gamma(t) : \alpha \le t \le \beta\}$ die zugehörige Kurve und $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Unter dem* **Wegintegral** $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$ *verstehen wir das Riemann-Stieltjes-Integral*

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\, d\gamma(t) = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$$

(vgl. [8, Satz 5.42]).

Beispiel 2.3 *Es seien $\gamma(t) = t$, $\alpha \le t \le \beta$ (d.h., $\Gamma = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$), $F'(t) = f(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ und $F : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist (vgl. [8, Satz 5.25])*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(t)\, dt = F(\beta) - F(\alpha).$$

Beispiel 2.4 (Grundintegral der Funktionentheorie) *Für* $\gamma(t) = z_0 + Re^{\mathbf{i}t}$, $0 \le t \le 2\pi$, $R > 0$ *und* $f(z) = (z - z_0)^n$, $n \in \mathbb{Z}$ *sind* $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ *die Kreislinie vom Radius* R *um den Mittelpunkt* z_0 *und*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \mathbf{i}R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{\mathbf{i}(n+1)t}\,dt = \left\{ \begin{array}{ccc} 2\pi\mathbf{i} & : & n = -1\,, \\ \mathbf{i}R^{n+1}\dfrac{1}{\mathbf{i}(n+1)}\left[e^{\mathbf{i}(n+1)t}\right]_0^{2\pi} = 0 & : & n \ne -1\,, \end{array} \right\}$$

d.h.,

$$\int_\gamma (z - z_0)^n\,dz = \left\{ \begin{array}{ccc} 2\pi\mathbf{i} & : & n = -1\,, \\ 0 & : & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}\,, \end{array} \right\}$$

unabhängig von R .

Definition 2.5 *Ein Weg* γ *heißt* **rektifizierbar**, *wenn das Supremum der Längen aller einbeschriebenen Polygonzüge endlich ist. Die* **Länge** $\ell(\gamma)$ *des Weges* γ *ist dann gleich diesem Supremum.*

Satz 2.6 *Ein Jordan-Integrationsweg* $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist rektifizierbar, und es gilt*

$$\ell(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt\,.$$

Bemerkung 2.7 *Sind* $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ *ein Jordan-Integrationsweg,* $\Gamma = \{\gamma(t) : \alpha \le t \le \beta\}$ *und* $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig, so gilt*

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \le \ell(\gamma) \max\left\{|f(z)| : z \in \Gamma\right\}\,.$$

Das folgt aus

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \le \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \le \max\left\{|f(\gamma(t)) : \alpha \le t \le \beta)|\right\} \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt$$

und Satz 2.6.

Satz 2.8 *Es seien* Γ *eine stückweise glatte Jordan-Integrationskurve mit den stückweise glatten Jordan-Integrationswegen (gleicher Orientierung)* $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ *und* $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *und* $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz\,.$$

Satz 2.8 erlaubt uns im Falle eines stückweise glatten Jordan-Integrationsweges und der zugehörigen Kurve Γ auch $\int_\Gamma f(z)\,dz$ statt $\int_\gamma f(z)\,dz$ zu schreiben und von einem **Kurvenintegral** zu sprechen.

Wir treffen folgende **Vereinbarungen**:

1. Im Weiteren sei Γ stets eine stückweise glatte Jordan-Integrationskurve, die mittels eines stückweise glatten Jordan-Integrationsweges $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ parametrisiert ist.

2. Wir schreiben $\displaystyle\int_a^b f(z)\,dz$, falls $\Gamma = \{a + t(b-a) : 0 \le t \le 1\} = [a,b]$ die Strecke von $a \in \mathbb{C}$ nach $b \in \mathbb{C}$ ist.

3. Ist $\Gamma \subset \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve, so sei sie mittels des Weges $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ so orientiert, dass das von Γ berandete beschränkte Gebiet links von Γ liegt.

Sind $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Jordan-Integrationsweg, $\delta : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \gamma(\alpha + \beta - t)$ ein Jordan-Integrationsweg, der die zugehörige Kurve entgegengesetzt orientiert. Es folgt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_\beta^\alpha f(\gamma(\alpha+\beta-t))\gamma'(\alpha+\beta-t)\,dt = -\int_\alpha^\beta f(\delta(t))\delta'(t)\,dt = -\int_\delta f(z)\,dz\,.$$

2.2 Stammfunktionen

Definition 2.9 *Gegeben sei eine stetige Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$. Eine Funktion $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt* **Stammfunktion** *von f, wenn F holomorph ist und $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$ gilt. Man sagt, dass f auf G* **lokale Stammfunktionen** *besitzt, wenn zu jedem $z \in G$ eine Umgebung $U_\varepsilon(z) \subset G$ existiert, so dass $f : U_\varepsilon(z) \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion hat.*

Satz 2.10 *Es seien $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow G$ ein Jordan-Integrationsweg. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha))\,.$$

Beispiel 2.11 *Die Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ hat die Stammfunktion $F(z) = \dfrac{1}{n+1}\, z^{n+1}$, falls $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, wobei $G = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & : & n \ge 0\,, \\ \mathbb{C} \setminus \{0\} & : & n < -1\,. \end{array} \right\}$*

Beispiel 2.12 *Es seien $f(z) = |z|$, $\Gamma_1 = [-1, 1]$ und $\Gamma_2 = \left\{ e^{\mathbf{i}(\pi - t)} : t \in [0, \pi] \right\}$. Dann folgt*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} |z|\,dz = \int_{-1}^1 |t|\,dt = 2\int_0^1 t\,dt = 1$$

und

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} |z|\,dz = \int_0^\pi 1 \cdot (-\mathbf{i}) e^{\mathbf{i}(\pi - t)}\,dt = [e^{\mathbf{i}(\pi-t)}]_0^\pi = 1 - (-1) = 2\,.$$

Somit hat nach Satz 2.10 die Funktion $f(z) = |z|$ in einem Gebiet, welches Γ_1 und Γ_2 enthält, **keine** *Stammfunktion!*

Beispiel 2.13 *Die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z}$ besitzt auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$* **keine** *Stammfunktion. Das folgt aus Satz 2.10 und Bsp. 2.4.*

Satz 2.14 *Eine stetige Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ hat genau dann eine Stammfunktion auf G, wenn für jeden geschlossenen Jordan-Integrationsweg $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow G$*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

gilt.

Satz 2.15 *Es seien G ein konvexes Gebiet und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann besitzt f eine Stammfunktion auf G genau dann, wenn für jede Dreieckskurve $\Delta = [z_0, z_1, z_2, z_0] \subset G$*

$$\int_\Delta f(z)\,dz = 0$$

gilt.

Folgerung 2.16 *Ist G ein beliebiges Gebiet und $\int_\Delta f(z)\,dz = 0$ für beliebige Dreieckskurven $\Delta \subset G$, so besitzt $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ lokale Stammfunktionen.*

2.3 Übungsaufgaben

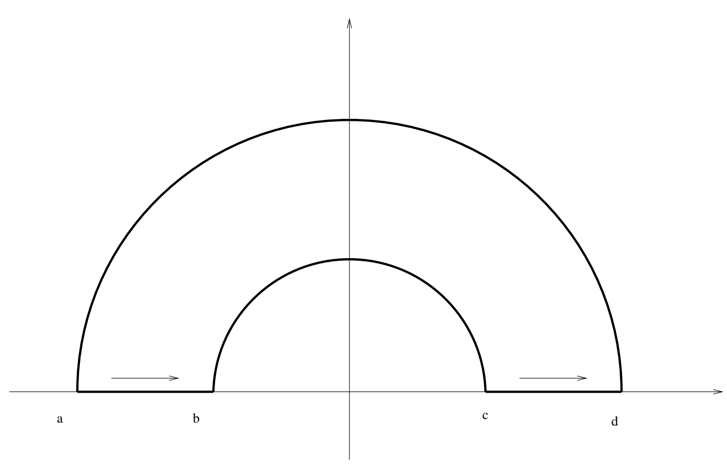
1. Berechnen Sie

   (a) $\displaystyle\int_a^b z\,dz\,,\ a, b \in \mathbb{C}\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^z\,dz\,,$ (c) $\displaystyle\int_0^{(1+\mathbf{i})\pi} \cos z\,dz\,,$ (d) $\displaystyle\int_0^1 |z|\,dz\,.$

2. Berechnen Sie

   (a) $\displaystyle\int_0^{1+\mathbf{i}} z\overline{z}\,dz,$

   (b) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z}{\overline{z}}\,dz$, wobei Γ die gezeichnete Jordan-Integrationskurve ist.



3. Zeigen Sie, dass die Funktion $z \mapsto \mathsf{Re}\,z$ in $\mathbb{C}$ keine Stammfunktion besitzt.

4. Gegeben seien die Menge $G = \{z \in U_1(0) : \ \mathsf{Re}\,z + \mathsf{Im}\,z > 1\}$ und $\Gamma = \partial G$.

   (a) Zeichnen Sie G und Γ. (b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\Gamma \mathsf{Im}\,z\,dz$. (c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\Gamma \frac{z}{|z|^2}\,dz$.

Kapitel 3

Cauchy'scher Integralsatz und Cauchy'sche Integralformel

3.1 Der Cauchy'sche Integralsatz für konvexe Gebiete

Im weiteren bezeichnen wir mit Δ eine abgeschlossene Dreiecksfläche. Unter einer Umgebung von Δ verstehen wir eine offene Menge $A \subset \mathbb{C}$ mit $\Delta \subset A$.

Satz 3.1 *Es seien $\Delta \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \Delta$ und f eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von Δ mit eventueller Ausnahme von z_0, wo sie aber wenigstens stetig ist. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0\,.$$

Satz 3.2 (Cauchy'scher Integralsatz für konvexe Gebiete) *Die Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ sei stetig und mit eventueller Ausnahme eines Punktes holomorph. Das Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sei konvex. Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.*

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2 gilt also wegen Satz 2.14

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

für jeden geschlossenen Jordan-Integrationsweg $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow G$.

Satz 3.3 *Es sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $f(z)$ beliebig oft differenzierbar, und für jede abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{U_r(z_0)} \subset G$ gilt die* **Cauchy'sche Integralformel**

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi\,, \quad z \in U_r(z_0)\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Beispiel 3.4 *Für gegebene $\lambda > 0$ und $\alpha > 0$ berechnen wir das uneigentliche Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\alpha x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\alpha x)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, e^{-\lambda\alpha^2}\,.$$

(*Es genügt, den Hauptwert zu berechnen, da die Konvergenz des Integrals gesichert ist.*)

3.2 Folgerungen

Wir formulieren nun einige Folgerungen aus den Sätzen 3.1, 3.2 und 3.3.

Folgerung 3.5 (Morea) *Sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für alle Dreieckskurven $\partial\Delta \subset G$, so ist f holomorph in G.*

Folgerung 3.6 *Sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in $G \setminus \{z_0\}$ und stetig auf G. Dann ist f auf ganz G holomorph.*

Bemerkung 3.7 *Die Aussage von Folgerung 3.6 kann auf endlich viele Ausnahmepunkte verallgemeinert werden.*

Folgerung 3.8 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$ und in einer gewissen Umgebung $U_r(z_0) \subset G$ beschränkt. Dann existiert eine holomorphe Funktion $\widetilde{f}$ auf G mit $\widetilde{f}(z) = f(z)\ \ \forall\, z \in G \setminus \{z_0\}$.*

Folgerung 3.9 (Potenzreihenentwicklung) *Sind $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $U_R(z_0)$ die größte Kreisscheibe mit $U_R(z_0) \subset G$, dann lässt sich $f(z)$ in $U_R(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickeln, d.h.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall\, z \in U_R(z_0)\,.$$

Dabei gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

für alle $r \in (0, R)$.

Definition 3.10 *Sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt $z_0 \in G$* **Nullstelle** *von f der* **Ordnung** *$k \geq 1$, wenn*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

gilt.

Folgerung 3.11 *Der Punkt $z_0 \in G$ ist genau dann Nullstelle der holomorphen Funktion f der Ordnung k, wenn*

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \quad z \in U_\varepsilon(z_0)\,,$$

mit einem gewissen $\varepsilon > 0$ und $a_k \neq 0$ gilt, d.h., wenn $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ mit der holomorphen Funktion $g : U_\varepsilon(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist, wobei $g(z_0) \neq 0$ gilt.

Folgerung 3.12 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen) *Es sei $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) $f(z) = 0 \ \forall\, z \in G$.

(b) *f hat in G eine Nullstelle der Ordnung ∞.*

(c) *Es existiert eine Menge $M \subset G$, die wenigstens einen Häufungspunkt in G besitzt und für die $f(z) = 0 \ \forall\, z \in M$ gilt.*

Folgerung 3.13 *Sei $f : \partial U_R(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Wir definieren für $z \in \mathbb{C} \setminus \partial U_R(z_0)$*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \,.$$

Dann gilt

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi \,, \quad z \in U_R(z_0)\,,\ n = 1, 2, \ldots\,,$$

und somit

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \quad z \in U_R(z_0)\,,$$

wobei

$$a_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \,.$$

Für $|z - z_0| > R$ und $w = \dfrac{1}{z - z_0} \in U_{\frac{1}{R}}(0)$ gilt

$$h(w) := g\left(z_0 + \frac{1}{w}\right) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - \frac{1}{w}}\, d\zeta \,.$$

Mit

$$\xi = \frac{1}{\zeta - z_0} \quad \text{und} \quad d\xi = -\frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^2} = -\xi^2\, d\zeta$$

erhalten wir

$$h(w) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_{\frac{1}{R}}(0)} \frac{f(z_0 + \xi^{-1})}{\xi^{-1} - w^{-1}} \frac{d\xi}{\xi^2} = -\frac{w}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_{\frac{1}{R}}(0)} \frac{\xi^{-1} f(z_0 + \xi^{-1})}{\xi - w}\, d\xi \,,$$

also

$$-\frac{1}{w} h(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{b}_n w^n \,, \quad w \in U_{\frac{1}{R}}(0)\,,$$

mit

$$\widetilde{b}_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_{\frac{1}{R}}(0)} \frac{\xi^{-1} f(z_0 + \xi^{-1})}{\xi^{n+1}}\, d\xi \,.$$

Somit ist

$$g(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{b}_n (z - z_0)^{-n-1} = \sum_{n=-1}^{-\infty} b_n (z - z_0)^n \,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus U_R(z_0)\,,$$

wobei

$$b_n = -\widetilde{b}_{-n-1} = \ldots = -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \,.$$

3.3 Übungsaufgaben

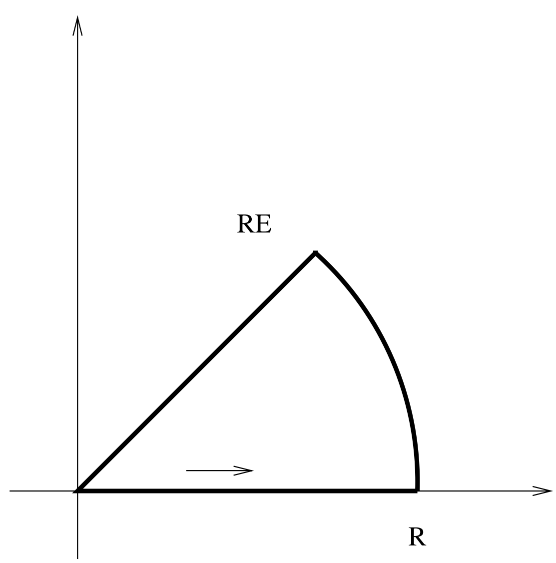
1. Berechnen Sie unter Verwendung der Cauchy'schen Integralformel das Integral
$$I_K := \int_K \frac{dz}{1+z^2}\,,$$
wobei K positiv orientiert und durch folgende Gleichungen gegeben ist:
(a) $|z-\mathbf{i}| = 1\,,$ (b) $|z+\mathbf{i}| = 1\,,$ (c) $|z| = 2\,.$

2. Berechnen Sie das Integral
$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_C \frac{ze^z}{(z-a)^3}\,dz,$$
wenn C ein positiv orientierter, geschlossener Jordan-Integrationsweg ist, der $a \in \mathbb{C}$ umschließt.

3. Berechnen Sie unter Verwendung der Cauchy'schen Integralformel
(a) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}\,,$ (b) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{\sin z}{z+\mathbf{i}}\,dz\,,$ (c) **(HA)** $\displaystyle\int_{C_3} \frac{dz}{z^2+\pi^2}\,,$
(d) $\displaystyle\int_{C_4} \frac{e^{1-z}dz}{z^3(1-z)}\,,$ (e) $\displaystyle\int_{C_5} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz\,,$ (f) $\displaystyle\int_{C_6} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}\,,\ n,m = 1,2,\dots\,,$
(g) $\displaystyle\int_{C_7} \frac{\cos z}{(z+\pi)^n}\,dz\,,$
wobei die geschlossenen (positiv orientierten) Kurven C_i gegeben sind durch
(a) $|z+1| = 1\,,$ (b) $|z| = 2\,,$ (c) $|z+2\mathbf{i}| = 3\,,$ (d) $|z| = \frac{1}{2}\,,$ (e) $|z-1| = 1\,,$
(f) $|z| = r\,,$ wobei $|a| < r < |b|\,,$ (g) $|z+2| = 2\,.$

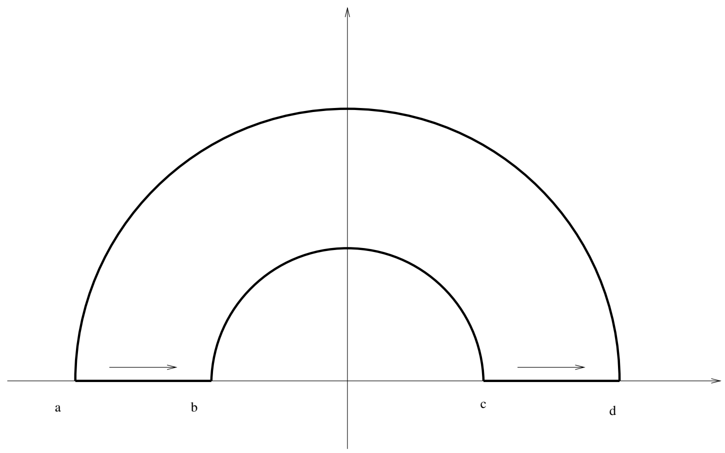
4. Berechnen Sie folgende Integrale mittels Integration der angegeben Funktion $f(z)$ entlang der (in den Abbildungen) gezeigten Kurven und durch Grenzübergang:

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2\,dx\,,\ \int_0^\infty \sin x^2\,dx\,,\ f(z) = e^{\mathbf{i}z^2}$



Grenzübergang $R \longrightarrow +\infty$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,,\ f(z) = \frac{e^{\mathbf{i}z}}{z}$



Grenzübergang $R \longrightarrow +\infty\,,\ r \longrightarrow +0$

5. Gibt es eine im Nullpunkt holomorphe Funktion, die in den Punkten $z_n = \frac{1}{n}\,,\ n \in \mathbb{N}$ die folgenden Werte annimmt:

   (a) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \dots\,,$

   (b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\,.$

Kapitel 4

Laurent-Reihen

4.1 Holomorphe Funktionen in Kreisringen

Beispiel 4.1 *Wir betrachten die Funktion* $f(z) = \dfrac{1}{z(z-\mathbf{i})^2}$ *und suchen nach Potenzreihenentwicklungen dieser Funktion für verschiedene Gebiete* $G \subset \mathbb{C}$. *Als Hilfsmittel verwenden wir die geometrische Reihe*

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n , \quad |z| < 1 . \tag{4.1}$$

(a) $G = (z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1)$ *(punktierte Umgebung von* 0*): Aus (4.1) folgt*

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n , \quad |z| < 1 , \tag{4.2}$$

und somit

$$f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{\mathbf{i}}\right)^2} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z}{\mathbf{i}}\right)^n = -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{\mathbf{i}^{n-1}} z^n .$$

(b) $G = (z \in \mathbb{C} : |z| > 1)$ *(Umgebung des unendlich fernen Punktes): Unter Verwendung von (4.2) erhalten wir*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbf{i}}{z}\right)^2} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{\mathbf{i}}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \mathbf{i}^n z^{-n-3} \\ &= \sum_{m=-3}^{-\infty} (-m-2) \mathbf{i}^{-m-3} z^m = \sum_{m=-3}^{-\infty} (m+2) \mathbf{i}^{-m-1} z^m . \end{aligned}$$

(c) $G = (z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \mathbf{i}| < 1)$ *(punktierte Umgebung von* $\mathbf{i}$*): Wiederum aus (4.1) folgt*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-\mathbf{i}}{(z-\mathbf{i})^2} + \frac{1}{z-\mathbf{i}} - \frac{1}{z} = \frac{-\mathbf{i}}{(z-\mathbf{i})^2} + \frac{1}{z-\mathbf{i}} + \frac{\mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}(z-\mathbf{i})} \\ &= \frac{-\mathbf{i}}{(z-\mathbf{i})^2} + \frac{1}{z-\mathbf{i}} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{i}^{n+1} (z-\mathbf{i})^n . \end{aligned}$$

Seien $0 \leq r < R$, $a \in \mathbb{C}$ und $K_a(r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$.

Satz 4.2 (Laurent-Reihenentwicklung) *Es sei $f : K_a(r,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-a)^n =: \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n \,, \quad z \in K_a(r,R)\,,$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

für ein beliebiges $\rho \in (r,R)$.

4.2 Nochmal zum Cauchy'schen Integralsatz

Definition 4.3 *Unter einer* **Deformation** *eines Jordan-Integrationsweges $\gamma : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ verstehen wir eine stetige Abbildung $\delta : [\alpha,\beta] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $(t,\sigma) \mapsto \delta(t,\sigma)$, für die $\delta(t,0) = \gamma(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, gilt und für die $\delta_\sigma : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto (t,\sigma)$ für jedes $\sigma \in [0,1)$ sowie $\delta_t : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\sigma \mapsto \delta(t,\sigma)$ für jedes $t \in [\alpha,\beta]$ Jordan-Integrationswege sind. Ein geschlossener Jordan-Integrationsweg $\gamma : [\alpha,\beta] \longrightarrow \Omega$ heißt in $\Omega \subset \mathbb{C}$ auf einen Punkt* **zusammenziehbar**, *wenn eine Deformation $\delta : [\alpha,\beta] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$ von γ existiert, so dass $\delta(\alpha,\sigma) = \delta(\beta,\sigma)$ für alle $\sigma \in [0,1)$ gilt und $\delta(t,1)$ konstant ist. Eine Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt* **einfach zusammenhängend**, *wenn jeder geschlossene Jordan-Integrationsweg $\gamma : [\alpha,\beta] \longrightarrow \Omega$ in Ω auf einen Punkt zusammenziehbar ist.*

Satz 4.4 (Cauchy'scher Integralsatz) *Sind das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [\alpha,\beta] \longrightarrow \Omega$ ein geschlossener Jordan-Integrationsweg, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0\,.$$

Folgerung 4.5 (Cauchy'sche Integralformel) *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.4 gilt*

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

falls $z \in \mathbb{C}$ in dem von der Jordan-Kurve $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [\alpha,\beta]\}$ berandeten und beschränkten Gebiet liegt.

4.3 Übungsaufgaben

1. Man entwickle die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

   (a) $0 < |z| < 1$, (b) $0 < |z-1| < 1$, (c) $1 < |z| < \infty$,

   (d) $1 < |z-2| < 2$, (e) $|z-2| < 1$.

2. Man entwickle die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ in folgenden Gebieten in eine Laurent-reihe:

   (a) $1 < |z| < 2\,,$ (b) $2 < |z| < \infty\,,$ (c) $0 < |z-2| < 1\,,$ (d) $0 < |z-1| < 1\,.$

3. Man bestimme die Laurent-Reihe der Funktion $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-\mathbf{i}-1)}$ im Kreisring $\big\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \sqrt{2}\big\}$.

Kapitel 5

Das Residuenkalkül

5.1 Isolierte Singularitäten

Definition 5.1 *Man nennt* z_0 *eine* **isolierte Singularität** *der Funktion* $f(z)$, *wenn* $f(z)$ *auf einer punktierten Umgebung* $K_{z_0}(0,\varepsilon) = U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ *holomorph ist. Diese Singularität* z_0 *heißt dann*

(a) **hebbare Singularität** , *wenn eine holomorphe Funktion* $\widetilde{f} : U_\varepsilon(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ *existiert, so dass* $\widetilde{f}(z) = f(z)$, $z \in K_{z_0}(0,\varepsilon)$, *erfüllt ist,*

(b) **Polstelle**, *wenn* $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$ *gilt,*

(c) **wesentliche Singularität** , *wenn sie weder hebbar noch Polstelle ist.*

Satz 5.2 *Es sei* z_0 *eine isolierte Singularität der Funktion* $f(z)$. *Die Singulatität ist genau dann*

(a) *hebbar, wenn ein* $\delta > 0$ *existiert, so dass* $f(z)$ *auf* $K_{z_0}(0,\delta)$ *beschränkt ist,*

(b) *Polstelle, wenn eine natürliche Zahl* $n \ge 1$ *existiert, so dass*

$$M_1|z-z_0|^{-n} \le |f(z)| \le M_2|z-z_0|^{-n}, \quad z \in K_{z_0}(0,\delta),$$

mit gewissen Konstanten $M_1, M_2, \delta > 0$ *gilt,*

(c) *wesentliche Singularität, wenn für jedes* $w_0 \in \mathbb{C}$ *eine Folge* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *existiert, so dass* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$ *gilt.*

Die Zahl n in der Aussage (b) des Satzes 5.2 nennt man **Ordnung** der Polstelle z_0.

Folgerung 5.3 *Sei* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. *Die isolierte Singularität* z_0 *ist genau dann*

(a) *hebbar, wenn* $a_n = 0$, $n = -1, -2, \dots$ *gilt,*

(b) *Polstelle, wenn ein* $k < 0$ *mit* $a_k \neq 0$ *und* $a_n = 0$ *für* $n < k$ *existiert,*

(c) *wesentlich, wenn* $a_n \neq 0$ *für unendlich viele negative* n *gilt.*

Man nennt $\displaystyle\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n$ den **Hauptteil** und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ den **Nebenteil** der Laurent-Reihe von $f(z)$ im Punkt z_0.

Beispiel 5.4 *Es gilt*

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n}\,,$$

d.h., $z_0 = 0$ *ist hebbare Singularität der Funktion* $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$. *Für*

$$g(z) = \frac{1}{z(z-\mathbf{i})^2}$$

sind $z_0 = 0$ *eine Polstelle 1. Ordnung und* $z_1 = \mathbf{i}$ *eine Polstelle 2. Ordnung. Die isolierte Singularität* $z_0 = 0$ *der Funktion*

$$h(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$$

ist wesentliche Singularität.

Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann heißt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\,, \quad |z| > R\,,$$

Laurent-Reihe von $f(z)$ **im unendlich fernen Punkt**, wenn $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n}\xi^n$ die Laurent-Reihe von $g(\xi) := f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$ im Punkt $\xi_0 = 0$ ist. Der unendlich ferne Punkt heißt hebbare Singularität, Polstelle bzw. wesentliche Singularität von $f(z)$, wenn dies für $\xi_0 = 0$ und $g(\xi)$ der Fall ist. D.h., nach Folg. 5.3, P_∞ ist hebbare Singularität genau dann, wenn $a_n = 0$, $n > 0$, Polstelle genau dann, wenn $a_k \neq 0$ und $a_n = 0$, $n > k$ für ein $k > 0$, wesentliche Singularität genau dann, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele positive n gilt.

Beispiel 5.5 *Für die Funktion* $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *erhalten wir*

$$g(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right) = -\frac{\xi}{1-\xi} = -\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n\,, \quad |\xi| < 1\,,$$

d.h.

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\,, \quad |z| > 1\,,$$

und P_∞ *ist Nullstelle 1. Ordnung von* $f(z)$. *Der unendlich ferne Punkt ist Polstelle* n*-ter Ordnung des Polynoms*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n\,,$$

wenn $a_n \neq 0$ *ist.* P_∞ *ist wesentliche Singularität von* e^z, $\sin z$ *und* $\cos z$.

5.2 Der Residuensatz

Sind $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit eventueller Ausnahme isolierter Singularitäten und $z \in G$, so nennt man die Zahl

$$\mathrm{res}_z f = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_{\partial U_\varepsilon(z)} f(\xi)\, d\xi$$

Residuum der Funktion f im Punkt z, wobei $\varepsilon > 0$ so zu wählen ist, dass in $\overline{U_\varepsilon(z)} \subset G$ keine weitere Singularität außer z liegt.

Satz 5.6 (Residuensatz) *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und die Funktion $f : G\backslash N \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, wobei N die Menge der isolierten Singularitäten von f bezeichne. Ist $\Gamma \subset G \setminus N$ ein geschlossener Jordan-Integrationsweg, so gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi \mathbf{i} \sum_{z \in N_\Gamma} \mathrm{res}_z f\,,$$

wobei die $N_\Gamma \subset N$ die Menge der isolierten Singularitäten von f bezeichnet, die innerhalb von Γ liegen.

Bemerkung 5.7 *Ist $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $0 < |z-a| < \varepsilon$, so gilt $\mathrm{res}_a f = a_{-1}$.*

Berechnung von Residuen im Fall einer Polstelle:

1. Es sei a Polstelle 1. Ordnung von $f(z)$. Dann gilt $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-a)^n$ und somit

$$\lim_{z\to a} (z-a) f(z) = \lim_{z\to a} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1}(z-a)^n = a_{-1},$$

   d.h.

$$\mathrm{res}_a f = \lim_{z\to a} (z-a) f(z)\,.$$

2. Hat $f(z)$ in a eine Polstelle 1. Ordnung und ist $g(z)$ in a holomorph, so gilt

$$\mathrm{res}_a fg = \lim_{z\to a} (z-a) f(z) g(z) = (\mathrm{res}_a f)\, g(a).$$

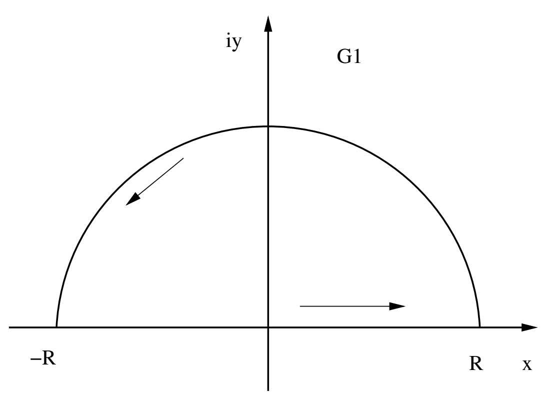
3. Es seien $f(z)$ in a holomorph und a eine Nullstelle 1. Ordnung von $f(z)$. Dann hat $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ in a eine Polstelle 1. Ordnung, und es folgt

$$\mathrm{res}_a g = \lim_{z\to a} \frac{z-a}{f(z)} = \lim_{z\to a} \frac{1}{\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}} = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

4. Es sei a Polstelle n-ter Ordnung von $f(z)$, $n = 1, 2, \ldots$ Dann sind
$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad \text{und} \quad g(z) := (z-a)^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n}(z-a)^k .$$
Es folgt
$$\mathrm{res}_a f = a_{-1} = a_{(n-1)-n} = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} ,$$
also
$$\mathrm{res}_a f = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z)\right] \Big|_{z=a} .$$

Beispiel 5.8 *Für*
$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$$
erhalten wir
$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{\mathbf{i}} f &= (z-\mathbf{i}) f(z)\Big|_{z=\mathbf{i}} = \frac{1}{(z+\mathbf{i})(z-1)^2}\Big|_{z=\mathbf{i}} = \frac{1}{2\mathbf{i}(\mathbf{i}-1)^2} = \frac{1}{-2\mathbf{i}2\mathbf{i}} = \frac{1}{4} , \\ \mathrm{res}_{-\mathbf{i}} f &= \frac{1}{(-\mathbf{i}-\mathbf{i})(-\mathbf{i}-1)^2} = \frac{1}{4} , \\ res_1 f &= \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z^2+1}\right]\Big|_{z=1} = -\frac{2z}{(z^2+1)^2}\Big|_{z=1} = -\frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Beispiel 5.9 *Es seien* $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *eine rationale Funktion, die keine reellen Polstellen hat, und der Grad des Nennerpolynoms* $Q(z)$ *um mindestens 2 größer als der Grad von* $P(z)$. *Somit existiert ein* $R > 0$, *so dass alle Polstellen von* $f(z)$ *in* $U_R(0)$ *liegen und* $|f(z)| \leq c|z|^{-2}$ *für* $|z| \geq R$ *gilt. Aus dem Residuensatz folgt (vgl. Skizze)*
$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi\mathbf{i} \sum_{z\in\mathbb{C},\, \mathsf{Im}\, z>0} \mathrm{res}_z f .$$



Dabei gilt
$$\left|\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz\right| = \left|\int_0^\pi f(Re^{\mathbf{i}t}) R\mathbf{i}e^{\mathbf{i}t}\, dt\right| \leq R \int_0^\pi |f(Re^{\mathbf{i}t})|\, dt \leq \frac{c\pi}{R} \longrightarrow 0 , \quad R \longrightarrow \infty ,$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathbf{i} \sum_{z\in\mathbb{C},\,\mathsf{Im}\,z>0} \mathrm{res}_z f\,.$$

Beispiel 5.10 *Wir berechnen*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4}\,.$$

Es gilt $1+z^4 = (z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$ *mit*

$$z_0 = e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}\,,\ z_1 = \mathbf{i}e^{i\frac{\pi}{4}}\,,\ z_2 = -e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}\,,\ z_3 = -\mathbf{i}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

und $e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\mathbf{i}+1}{\sqrt{2}}$. *Es folgt* $z_2+z_3 = -\sqrt{2}\,\mathbf{i}$ *und somit*

$$1+z^4 = (z-z_0)(z-z_1)(z^2-(z_2+z_3)z+z_2z_3) = (z-z_0)(z-z_1)(z^2+\sqrt{2}\mathbf{i}z-1)\,.$$

Wir wählen $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ *und berechnen*

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{z_0} f &= \left.\frac{z^2}{(z-z_1)(z^2+\sqrt{2}\mathbf{i}z-1)}\right|_{z=z_0} = \frac{z_0^2}{(z_0-z_1)(z_0^2+\sqrt{2}\mathbf{i}z_0-1)} = \frac{\mathbf{i}}{2\sqrt{2}(\mathbf{i}-1)}\,,\\
\mathrm{res}_{z_1} f &= -\frac{\mathbf{i}}{2\sqrt{2}(\mathbf{i}+1)}\,,
\end{aligned}$$

so dass nach Beispiel 5.9

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = 2\pi\mathbf{i}\left(\frac{\mathbf{i}}{2\sqrt{2}(\mathbf{i}-1)} - \frac{\mathbf{i}}{2\sqrt{2}(\mathbf{i}+1)}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ist.

Beispiel 5.11 (Das Argumentprinzip) *Es sei* z_0 *eine isolierte Nullstelle oder eine isolierte Polstelle der Ordnung* m *der in* $U_\varepsilon(z_0)\setminus\{z_0\}$ *holomorphen Funktion* $f(z)$. *Es folgt* $f(z) = (z-z_0)^m h(z)$, $h(z_0)\neq 0$ *und*

$$f'(z) = m(z-z_0)^{m-1}h(z) + (z-z_0)^m h'(z)\,.$$

Damit ist

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{mh(z)+(z-z_0)h'(z)}{(z-z_0)h(z)}\,.$$

Wir erhalten

$$\mathrm{res}_{z_0}\frac{f'}{f} = \left.\frac{(z-z_0)f'(z)}{f(z)}\right|_{z=z_0} = m\,.$$

Somit ergibt sich aus dem Residuensatz: Ist die Funktion $f: G\to\mathbb{C}$ *bis auf isolierte Polstellen auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet* G *holomorph und liegen auf der geschlossenen Jordan-Integrationskurve* $\Gamma\subset G$ *keine Nullstellen und keine Pole von* $f(z)$, *so ist*

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

gleich der Differenz aus der Zahl der Nullstellen und der Zahl der Polstellen der Funktion $f(z)$ *(jeweils mit ihrer Ordnung gezählt), die innerhalb von* Γ *liegen.*

Satz 5.12 (Satz von Liouville) *Eine ganze und beschränkte Funktion ist konstant.*

Satz 5.13 (Partialbruchzerlegung) *Die Funktion $f : \mathbb{C} \cup \{P_\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{P_\infty\}$ sei holomorph mit eventueller Ausnahme von isolierten Polstellen. Dann ist $f(z)$ eine rationale Funktion.*

Satz 5.14 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes nicht konstante Polynom*

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \,, \quad a_k \in \mathbb{C} \,,$$

besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Wir stellen uns noch die Frage:

Was ist das **Residuum im unendlich fernen Punkt?**

Sind $f : \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, $|z| > R$, die Entwicklung von f im unendlich fernen Punkt, d.h.

$$f(z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} z^n \,, \quad 0 < |z| < R^{-1} \,,$$

so ist für ein beliebiges $R_1 > R$

$$\mathrm{res}_{P_\infty} f = -\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_{R_1}(0)} f(z)\, dz = -a_{-1} \,.$$

Folgerung 5.15 *Hat $f : \mathbb{C} \cup \{P_\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{P_\infty\}$ höchstens endlich viele Singularitäten, so gilt*

$$\sum_{z \in \mathbb{C} \cup \{P_\infty\}} \mathrm{res}_z f = 0 \,.$$

5.3 Übungsaufgaben

1. Man entwickle folgende Funktionen an den im Endlichen liegenden Singularitäten und im Punkt P_∞ in eine Laurentreihe und gebe das Konvergenzgebiet an:

   (a) $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$, (b) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$,

   (c) $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$, (d) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

2. Man charakterisiere die Art der Singularität und bestimme das Residuum von $f(z)$ an der Stelle z_0 :

   (a) $f(z) = \sin \dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = 1$, (b) $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$, $z_0 = 0$,

   (c) $f(z) = \dfrac{1}{1+z-e^z}$, $z_0 = 0$, (d) $f(z) = \cot z$, $z_0 = 0$,

   (e) $f(z) = \dfrac{z^2 - z + 7}{z-2}$, $z_0 = 2$.

3. Berechnen Sie möglichst effektiv die Residuen von $f(z)$ an den angegebenen Stellen

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{(z+3)(z-5)^2}\,, \qquad z_1 = -3\,,\ z_2 = 5\,,\ z_3 = P_\infty\,,$

   (b) $f(z) = (\sin z - \cos z)^{-1}\,, \qquad z_0 = \dfrac{\pi}{4}\,,$

   (c) $f(z) = \cot z\,, \qquad z_0 = n\pi\,,\ n \in \mathbb{Z}\,,$

   (d) $f(z) = \dfrac{c}{(z-z_0)^n(z-z_1)}\,,\ c \neq 0\,, \qquad z_0, z_1\,,$ wobei $z_0 \neq z_1\,.$

4. Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

   (a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz\,,$ (b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathbf{i}\cot z}{z(z-1)}\,dz\,,$ (c) $\displaystyle\int_{|1+\mathbf{i}-z|=2} \frac{dz}{1+z^2}\,.$

5. Berechnen Sie folgende uneigentlichen Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}\,,\ n = 0, 1, 2, \dots\,,$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}\,,$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx\,,$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n}+1}\,,\ n = 1, 2, 3, \dots\,,$

   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2+1}\,dx\,,\ \alpha > 0\,.$ Hinweis: Betrachten Sie $f(z) = \dfrac{z e^{\mathbf{i}\alpha z}}{z^2+1}\,.$

   (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n-1}{x^{n+2}-1}\,dx\,,\ n = 1, 2, 3, \dots\,,$ (g) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,.$

6. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}\,.$

Kapitel 6

Logarithmus- und Potenzfunktionen

6.1 Zweige des Logarithmus

Wir vereinbaren $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definition 6.1 *Es sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Unter einer* **Logarithmusfunktion** *bzw. einem* **Zweig des Logarithmus** *verstehen wir eine stetige Funktion $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $e^{g(z)} = z \ \forall\, z \in G$.*

Satz 6.2 *Ist $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion, so ist g auf G holomorph und es gilt*

$$g'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall\, z \in G\,.$$

Satz 6.3 *Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ sind folgende Aussagen äquivalent :*

(a) *Auf G existiert eine Logarithmusfunktion.*

(b) *Die Funktion $f(z) = z^{-1}$ hat auf G eine Stammfunktion.*

(c) *Jede geschlossene Jordan-Integrationskurve $\Gamma \subset G$ umschließt* **nicht** *die Null.*

Beispiel 6.4 *Auf $\mathbb{C}^*$ existiert kein Zweig des Logarithmus!*

Beispiel 6.5 *Sei $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Wir definieren den sogenannten* **Hauptzweig** *des Logarithmus* Log $: G \longrightarrow \mathbb{C}$ *durch*

$$\mathrm{Log}\, z = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^{|z|} \frac{dx}{x} + \int_0^{\varphi} \mathbf{i}\, d\psi = \ln|z| + \mathbf{i}\varphi$$

mit $\varphi \in (-\pi, \pi)$ und $z = |z|\, e^{\mathbf{i}\varphi}$. Man schreibt für φ auch $\mathrm{Arg}\, z$ *(Hauptzweig des Arguments).*

Da $\mathrm{Log}\, z$ auf der positiven reellen Achse mit $\ln z$ übereinstimmt, gilt für $|z| < 1$

$$\mathrm{Log}\,(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n\,.$$

Beachte: Es gilt $\mathrm{Log}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$ nur dann, wenn $\mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \in (-\pi, \pi)$.

Beispiel 6.6 *Wir stellen uns die Frage, ob man eine Funktion $f(z) = \log z^2$ so definieren kann, dass $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. Für $\mathsf{Re}\, z > 0$ ist $z^2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, so dass wir $f(z) = \operatorname{Log} z^2$ setzen können. Für $z = |z|\, e^{\mathbf{i}\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, ist also $f(z) = \operatorname{Log}(|z|^2 e^{2\mathbf{i}\varphi}) = 2\ln|z| + 2\mathbf{i}\varphi$. Aus Stetigkeitsgründen ergibt sich damit*

$$f(z) = 2\ln|z| + 2\mathbf{i}\varphi = 2\operatorname{Log} z \quad \forall\, z = |z|\, e^{\mathbf{i}\varphi}\,,\ -\pi < \varphi < \pi\,.$$

6.2 Exponential- und Potenzfunktionen

Es seien $a \in \mathbb{C}^*$ und $\log a$ ein Logarithmuswert von a, d.h. $e^{\log a} = a$. Dann ist $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{z \log a}$ eine ganze Funktion, wobei $f'(z) = (\log a) f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Für $f(z)$ schreibt man auch a^z, womit also $\dfrac{d}{dz} a^z = (\log a) a^z$ gilt.

Definition 6.7 *Es seien $\log : G \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus und $b \in \mathbb{C}$. Dann nennt man $z^b := e^{b \log z}$ einen* **Zweig der b-ten Potenz** *auf G.*

Es gilt

$$\frac{d}{dz}\, z^b = \frac{b}{z}\, e^{b \log z} = b\, e^{-\log z} e^{b \log z} = b\, e^{(b-1)\log z} =: b\, z^{b-1} \quad \forall\, z \in G\,.$$

Den **Hauptzweig** der b-ten Potenz definiert man als $z^b := e^{b \operatorname{Log} z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Es folgt

$$(1+z)^b = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\,, \quad |z| < 1\,,$$

mit $c_0 = 1$ und (vgl. auch [8, Bsp. 4.36])

$$c_k = \frac{1}{k!}\, \frac{d^k}{z^k} (1+z)^b \Big|_{z=0} = \frac{b(b-1)\dots(b-k+1)}{k!}\, (1+z)^{b-k}\Big|_{z=0} = \binom{b}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Beispiel 6.8 (*Beispiel für die Konstruktion einer mittelbaren Funktion*) *Wir betrachten die Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{z-1}{z+1}$ und stellen die Frage: Wie bzw. unter welchen Voraussetzungen kann man eine holomorphe Funktion $\sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$ auf G definieren?*

(a) *Sei $G = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Dann ist $f(G) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, da die Gleichung $f(z) = w$ für jedes $w \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ eine Lösung in G besitzt und $f(z) \notin \{0, 1\}\ \forall\, z \in G$. Auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ existiert kein Zweig des Logarithmus, so dass $\sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$ nicht als holomorphe Funktion auf G erklärt werden kann.*

(b) *Sei $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Dann ist $f(G) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, und wir können mit Hilfe des Hauptzweiges des Logarithmus die holomorphe Funktion*

$$\sqrt{\frac{z-1}{z+1}} := \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{z-1}{z+1}\right) =: g(z)\,, \quad z \in G\,,$$

definieren. Es ist dann z.B.

$$g(-\mathbf{i}) = \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{-\mathbf{i}-1}{-\mathbf{i}+1}\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log}(-\mathbf{i})\right) = \exp\left(-\frac{\pi \mathbf{i}}{4}\right) = \frac{1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\,.$$

6.3 Übungsaufgaben

1. Man bestimme alle möglichen Logarithmen

   (a) $\log \mathbf{i}$, (b) $\log(1+\mathbf{i})^3$, (c) $\log(-1)$.

2. Man berechne

   (a) $\operatorname{Log}(3-4\mathbf{i})^4$, (b) $\operatorname{Log}(-2+\sqrt{5}\mathbf{i})$,

   wobei Log den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet.

3. Es sei $U := \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2,\ \mathsf{Re}\, z > 0\right\}$, und Log bezeichne den Hauptzweig des Logarithmus. Man skizziere folgende Mengen:

   (a) U,

   (b) $\operatorname{Log} U = \{w \in \mathbb{C} : w = \operatorname{Log} z, z \in U\}$,

   (c) $\exp^{-1} U = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z \in U\}$.

4. Bestimmen Sie eine Stammfunktion der (reellen) Funktion $f(x) = (x^2 - 4x + 5)^{-1}$

   (a) durch reelle Rechnung,

   (b) durch Zerlegung von $z^2 - 4z + 5$ in (komplexe) Linearfaktoren.

5. Man verwende zur Definition der komplexen Potenzen jeweils den Hauptzweig

   des Logarithmus und berechne

   (a) $(1+\mathbf{i})^{\mathbf{i}}$, (b) $(1+\mathbf{i})^2$, (c) $5^{3+4\mathbf{i}}$.

6. Berechnen Sie alle möglichen Werte für folgende Ausdrücke

   (a) $\mathbf{i}^{\mathbf{i}}$, (b) $\mathbf{i}^{\frac{1}{3}}$.

7. Es sei $z = re^{\mathbf{i}\varphi}$, $r > 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi)$. Zeigen Sie, dass sich für $w = z^{\frac{1}{n}}$ durch geeignete Wahl eines Zweiges des Logarithmus für $\log z$ jeweils genau eine der Zahlen $w_j = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\mathbf{i}(\varphi+2j\pi)}{n}}$, $j = 0, \ldots, n-1$ ergibt.

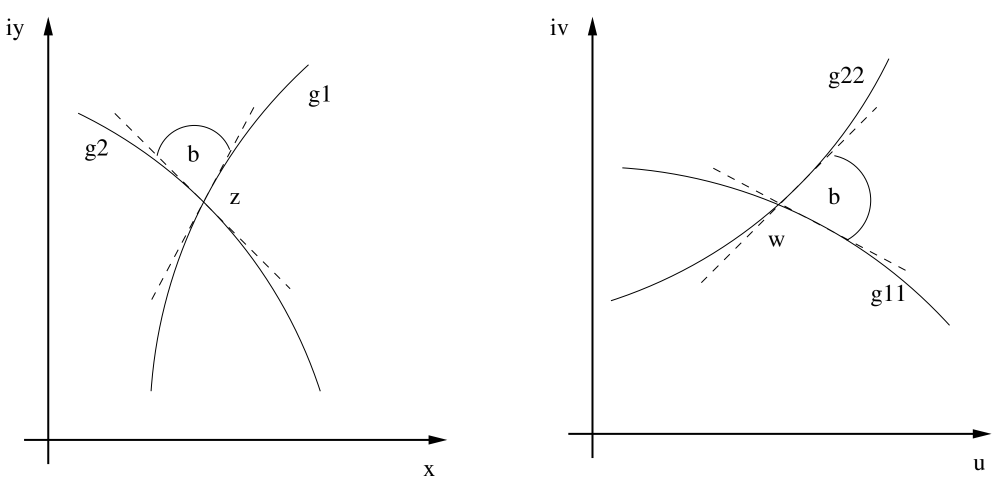
8. Man zeige, dass sich auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ eine holomorphe Funktion $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ definieren lässt, welche für reelles $x > 1$ mit der reellen Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ zusammenfällt.

Kapitel 7

Konforme Abbildungen

7.1 Begriff der konformen Abbildung

Es seien $\gamma_j : [\alpha_j, \beta_j] \longrightarrow G \subset \mathbb{C}$ zwei glatte Jordan-Integrationswege, die sich im Punkt $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, $t_j \in (\alpha_j, \beta_j)$, schneiden. Ferner seien $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine in $z_0 G$ holomorphe Funktion, $\Gamma_j = \{\gamma_j(t) : \alpha_j \leq t \leq \alpha_j\}$ und $\Gamma_j^* = f(\Gamma_j)$. Die Richtung von $\gamma_j'(t_j)$ ist gleich der Richtung der Tangente an Γ_j im Punkt z_0 . Ist nun $f'(z_0) \neq 0$, so ist die Richtung von $f'(z_0)\gamma_j'(t_j)$ gleich der Richtung der Tangente an Γ_j^* im Punkt $w_0 = f(z_0)$. Der Schnittwinkel zwischen Γ_1 und Γ_2 im Schnittpunkt z_0 ist also gleich dem Schnittwinkel zwischen den Bildkurven Γ_1* und Γ_2* im Schnittpunkt w_0 . Eine Abbildung f mit dieser Eigenschaft nennt man **winkeltreu** im Punkt z_0 . Eine in z_0 holomorphe Funktion f mit $f'(z_0) \neq 0$ ist also in z_0 winkeltreu. Offenbar ist die Abbildung $z \mapsto z^2$ im Punkt $z_0 = 0$ nicht winkeltreu.



Definition 7.1 *Eine Abbildung f heißt (lokal)* **konform** *in z_0 , falls f in z_0 holomorph mit $f'(z_0) \neq 0$ ist. Ist $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ in jedem $z_0 \in G$ konform, so heißt sie* **konform** *im Gebiet G .*

Satz 7.2 (Riemann'scher Abbildungssatz) *Seien G und G^* einfach zusammenhängende und* **echte** *Teilgebiete von $\mathbb{C}$. Dann gibt es eine konforme Abbildung $f : G \longrightarrow G^*$, die außerdem bijektiv ist.*

Bemerkung 7.3 *Aus dem Satz von Liouville folgt, dass es keine konforme und bijektive Abbildung von $\mathbb{C}$ auf den Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ geben kann.*

Satz 7.4 (Satz über die Ränderzuordnung) *Die Ränder ∂G und ∂G^* seien geschlossene Jordan-Integrationskurven, und $f : G \to G^*$ sei konform und bijektiv. Dann ist f zu einer stetigen und bijektiven Abbildung $f : \overline{G} \to \overline{G^*}$ fortsetzbar. (Man kann diesen Satz auf Gebiete ausdehnen, deren Ränder den unendlich fernen Punkt enthalten.)*

7.2 Möbius-Transformationen

Unter der Spiegelung an einem Kreis mit Mittelpunkt $z*$ und dem Radius $r > 0$ versteht man folgende Abbildung $z \mapsto z' = s(z)$. Ist $z = z^*$, so $z' = P_\infty$. Ist $z = P_\infty$, so $z' = z^*$. Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \{z^*\}$, so liegt z' auf dem Strahl von z^* durch z, wobei $|z - z^*| \cdot |z' - z^*| = r^2$ gilt. Es ist also $s(z) = \dfrac{r^2}{\overline{z - z^*}} + z^*$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z^*\}$.

Für gegebene komplexe Zahlen a, b, c, d mit $|a| + |b| > 0$ und $|c| + |d| > 0$ definieren wir $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ durch

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}\,. \tag{7.1}$$

Im Fall $c = 0$ ist $f(z) = \dfrac{a}{d}\,z + \dfrac{b}{d}$ und $f(P_\infty) = \left\{ \begin{array}{ccl} P_\infty & : & a \neq 0\,, \\ \dfrac{b}{d} & : & a = 0\,. \end{array} \right\}$ Im Fall $c \neq 0$ ist

$$f(z) = \frac{1}{c\,z + d}\left[\frac{a}{c}(c\,z + d) + b - \frac{a\,d}{c}\right] = \frac{b\,c - a\,d}{c}\,\frac{1}{c\,z + d} + \frac{a}{c}\,,\ f(P_\infty) = \frac{a}{c}\,,\ f\left(-\frac{d}{c}\right) = P_\infty\,,$$

und man kann $z \mapsto f(z)$ als Nacheinanderausführung der Abbildungen

$$z \mapsto z_1 = c\,z + d \mapsto z_2 = \frac{1}{z_1} \mapsto w = \frac{b\,c - a\,d}{c}\,z_2 + \frac{a}{c} \tag{7.2}$$

schreiben. Die durch (7.1) definierte Funktion $f(z)$ ist somit genau dann nicht konstant, wenn $a\,d - b\,c \neq 0$ gilt. In diesem Fall heißt $z \mapsto f(z)$ **Möbius-Transformation**.

Satz 7.5 *Die durch (7.1) definierte Möbius-Transformation (d.h., $ad - bc \neq 0$) $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ist bijektiv. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch*

$$z = f^{-1}(w) = \frac{b - d\,w}{c\,w - a}\,.$$

Die erste Ableitung einer Möbius-Transformation (7.1) ist gleich

$$f'(z) = \frac{a\,d - b\,c}{(c\,z + d)^2} \neq 0\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}\,,$$

so dass folgender Satz gilt.

Satz 7.6 *Eine Möbius-Transformation (7.1) ist im Fall $c \neq 0$ eine konforme und bijektive Abbildung der Menge $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ auf die Menge $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$, im Fall $c = 0$ von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$.*

Jeden Kreis in der komplexen Ebene kann man in der Form (vgl. Aufgabe 1 im Abschnitt 1.5)

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} : \alpha\, z\, \overline{z} + \beta\, z + \overline{\beta}\, \overline{z} + \gamma = 0 \right\} \tag{7.3}$$

mit $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ und $\alpha\,\gamma < |\beta|^2$ schreiben, wobei wir es im Fall $\alpha = 0$ mit einer Geraden (einen Kreis durch den unendlich fernen Punkt) zu tun haben.

Satz 7.7 *Jede Möbius-Transformation bildet Kreise auf Kreise ab, wobei wir Geraden als Kreise durch P_∞ auffassen.*

Satz 7.8 *Es seien $f(z)$ eine Möbius-Transformation, K ein Kreis sowie z_1 und z_2 Spiegelpunkte bezüglich K. Dann sind $w_1 = f(z_1)$ und $w_2 = f(z_2)$ Spiegelpunkte bezüglich $f(K)$.*

Beispiel 7.9 *Wir suchen alle Möbius-Transformationen, die die obere Halbebene auf die Einheitskreisscheibe und einen gegebenen Punkt z_0 mit $\mathsf{Im}\, z_0 > 0$ auf $w_0 = 0$ abbilden. Aus Satz 7.4 folgt $|f(P_\infty)| = 1$ und somit $a \neq 0$. Wir wählen $a = 1$. Es folgt*

$$w = f(z) = \frac{z + b}{c\, z + d}$$

und

$$0 = f(z_0) = \frac{z_0 + b}{c\, z_0 + d}, \quad \text{d.h.} \quad b = -z_0 .$$

Nach Satz 7.8 ist $f(\overline{z_0}) = P_\infty$ und somit

$$f(z) = \frac{1}{c}\, \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} .$$

Damit die reelle Achse auf die Einheitskreislinie abgebildet wird, bleibt nur noch $|f(0)| = 1$ zu fordern, d.h. $|c| = 1$. Wir erhalten

$$f(z) = e^{\mathbf{i}\varphi}\, \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}} ,$$

wobei $\varphi \in [0, 2\pi)$ beliebig gewählt werden kann.

Beispiel 7.10 *Wir suchen alle gebrochen linearen Abbildungen (7.1), die den Einheitskreis auf den Einheitskreis abbilden und einen gegebenen Punkt z_0 mit $|z_0| < 1$ auf $w_0 = 0$. Wir erhalten wieder*

$$f(z) = \frac{z - z_0}{c\, z + d} .$$

Aus $f\left(\frac{1}{\overline{z_0}}\right) = P_\infty$ folgt

$$f(z) = \frac{1}{d^*}\, \frac{z - z_0}{1 - z\, \overline{z_0}} ,$$

und die Bedingung $|f(1)| = 1$ liefert $|d^*| = 1$, also

$$f(z) = e^{\mathbf{i}\varphi}\, \frac{z - z_0}{1 - z\, \overline{z_0}} ,$$

$\varphi \in [0, 2\pi)$ beliebig. Man beachte, dass dieses Ergebnis auch für $z_0 = 0$ gilt!

7.3 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass die Möbiustransformationen (d.h. die gebrochen linearen Abbildungen $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$) bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden.

2. In welche Figuren gehen folgende Mengen bei der Abbildung $f(z) = (\overline{z})^{-1}$ (Spiegelung am Einheitskreis) über?

   (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}\,, \quad r > 0\,,$

   (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}\,,$

   (c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z = 1\}\,,$

   (d) eine beliebige Gerade durch $z_0 \neq 0\,.$

3. Man bestimme das Bild

   (a) des Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bei der Abbildung $w = \dfrac{z}{1-z}\,,$

   (b) der rechten Halbebene bei der Abbildung $w = \dfrac{1-z}{1+z}\,,$

   (c) des ersten Quadranten bei der Abbildung $w = \dfrac{\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}\,.$

4. Geben Sie die allgemeine Form einer gebrochen linearen Abbildung an, die den Einheitskreis auf die untere Halbebene abbildet.

5. Für die Abbildung $w = \dfrac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$ bestimme man das Bild der reellen Achse, der imaginären Achse und des Einheitskreises sowie alle Fixpunkte.

6. Man bestimme eine gebrochen lineare Abbildung $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, die

   (a) die Punkte $-1, \mathbf{i}, 1+\mathbf{i}$ in die Punkte $0, 2\mathbf{i}, 1-\mathbf{i}\,,$

   (b) die Punkte $-1, P_\infty, \mathbf{i}$ in die Punkte $P_\infty, \mathbf{i}, 1$

   überführt.

7. Man zeige, dass die Hyperbeln $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y = C_1\right\}$ und $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = C_2\right\}$ für beliebige Konstanten $C_1, C_2 > 0$ senkrecht aufeinander stehen.

7.4 Die Joukowski-Funktion

Wir definieren

$$w = J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,. \tag{7.4}$$

Wir vereinbaren $w = u + \mathbf{i}v$, $z = re^{\mathbf{i}\varphi}$, $u, v \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Es folgt

$$\begin{aligned} u + \mathbf{i}v &= \frac{1}{2}\left(r\,e^{\mathbf{i}\varphi} + \frac{1}{r}\,e^{-\mathbf{i}\varphi}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi + \mathbf{i}\,\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos\varphi - \mathbf{i}\,\sin\varphi)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \frac{\mathbf{i}}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Also ist (7.4) äquivalent zu

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\,. \tag{7.5}$$

Folgerung 7.11 *Die* **Joukowski-Funktion** J *hat folgende Eigenschaften:*

1. $J(\{r = 1\}) = \{\cos\varphi : 0 \le \varphi < 2\pi\} = [-1, 1]$. *Dabei wird im Bild das offene Intervall* $(-1, 1)$ *zweimal durchlaufen.*

2. *Für* $r \neq 1$ *folgt aus (7.5)*

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1\,,$$

   d.h. die Bilder der Kreise $(|z| = r)$, $r > 0$, $r \neq 1$, *sind Ellipsen mit der Exzentrizität*

$$\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1\,,$$

   d.h. mit den Brennpunkten ± 1 .

3. *Das Bild der positiven reellen Achse* $\left\{r\,e^{\mathbf{i}\varphi} : \varphi = 0, r > 0\right\}$ *ist*

$$\left\{u + \mathbf{i}v : u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), v = 0, r > 0\right\} = [1, \infty)\,.$$

   Dabei wird $(1, \infty)$ *zweimal durchlaufen. Analog ist das Bild der negativen reellen Achse das Intervall* $(-\infty, -1]$. *Das Bild der positiven imaginären Achse* $\left\{r\,e^{\mathbf{i}\varphi} : \varphi = \frac{\pi}{2}, r > 0\right\}$ *ist*

$$\left\{u + \mathbf{i}v : u = 0, v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right), r > 0\right\} = \mathbf{i}\mathbb{R}\,,$$

   was auch gleich dem Bild der negativen imaginären Achse ist.

4. *Wir betrachten die Halbgeraden* $G_{\pm\alpha} = \left\{r\,e^{\pm\mathbf{i}\alpha} : r > 0\right\}$ *für* $0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. *Aus (7.5) folgt dann*

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha \quad \textit{und} \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha$$

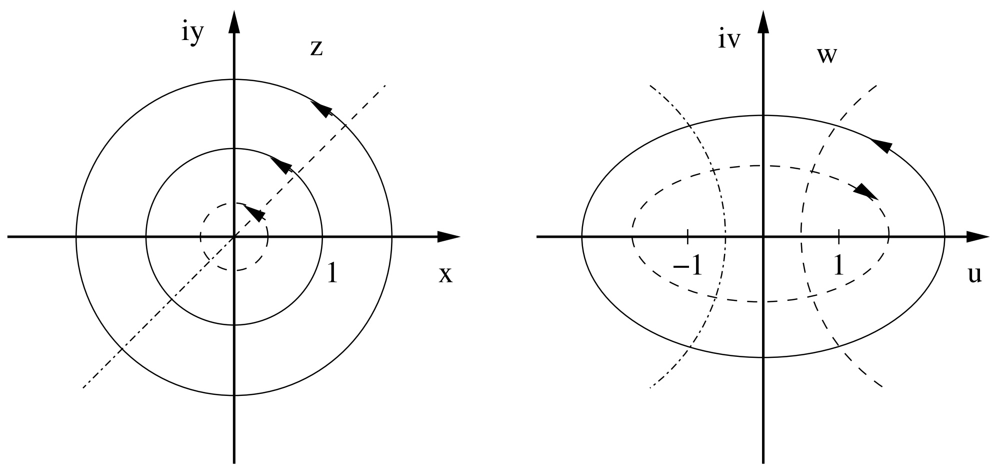
   bzw.

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1\,. \tag{7.6}$$

   Hieraus ergibt sich, dass das Bild von $G_{\pm\alpha}$ *der rechte Ast der Hyperbel (7.6) für* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *und der linke Ast der Hyperbel (7.6) für* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ *ist (Brennpunkte* ± 1*).*

5. *Es ist* $J'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \neq 0$ *für* $z \neq \pm 1$ *und* $z \neq 0$. *Also ist* $J(z)$ *außerhalb dieser Punkte winkeltreu, d.h. die Ellipsen und Hyperbeln aus 2. und 4. stehen senkrecht aufeinander.*

6. *Wir sehen, dass sowohl*
$$J : \{|z| < 1\} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$$
als auch
$$J : \{|z| > 1\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$$
bijektiv und konform sind.



Zur Joukowski-Funktion

7.5 Ebene stationäre Strömungen

Wir betrachten eine ebene stationäre (d.h. zeitunabhängige) inkompressible und reibungsfreie Strömung in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$. Den Geschwindigkeitsvektor im Punkt $(x, y) \in G$ schreiben wir in der Form $v(x, y) = [v_1(x, y), v_2(x, y)]^T$ und nehmen an, dass $v : G \longrightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist. Weiterhin sei die Strömung frei von Quellen und Wirbeln, d.h.

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad \text{in} \quad G \tag{7.7}$$

und

$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad \text{in} \quad G\,. \tag{7.8}$$

Aus (7.8) folgt die Existenz eines Skalarfeldes $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $v = \operatorname{grad} \varphi$ und somit $v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Damit ist nach (7.7)

$$\Delta\varphi := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0\,.$$

Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\Delta\varphi = 0$ auf G heißt **harmonisch** auf G. Wenn wir also von einem stetig differenzierbaren Geschwindigkeitsfeld $v(x, y)$ ausgehen, suchen wir eine in G harmonische Funktion $\varphi(x, y)$.

Folgerung 7.12 *Sei $f = u + \mathbf{i}v : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{7.9}$$

so dass

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

und somit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

gilt, d.h. $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ ist harmonisch. Das gleiche gilt für $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$. Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen sind also harmonische Funktionen.

Folgerung 7.13 *Es sei $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Wir suchen eine zu u* **konjungiert harmonische** *Funktion, d.h. eine Funktion $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $f = u + \mathbf{i}v$ auf G holomorph ist. Wir wählen ein $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0 \in G$ und betrachten vorerst $z = x + \mathbf{i}y \in U_\varepsilon(z_0) \subset G$. Die Funktion $f(z)$ muss den Bedingungen (7.9) genügen, so dass wir für $z \in U_\varepsilon(z_0)$*

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial u(\xi, y)}{\partial y}\, d\xi + \phi(y)$$

mit einer noch unbekannten reellwertigen Funktion $\phi(y)$ erhalten. Dann erfüllt $v(x,y)$ die zweite der Bedingungen in (7.9). Zur Bestimmung von $\phi(y)$ verwenden wir die erste Bedingung und erhalten

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 u(\xi, y)}{\partial y^2}\, d\xi + \phi'(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 u(\xi, y)}{\partial x^2}\, d\xi + \phi'(y).$$

Es folgt

$$\phi'(y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^2 u(\xi, y)}{\partial x^2}\, d\xi = \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x}$$

und somit

$$\phi(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x_0, \eta)}{\partial x}\, d\eta + \text{const},$$

also

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x_0, \eta)}{\partial x}\, d\eta - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u(\xi, y)}{\partial y}\, d\xi + \text{const}. \tag{7.10}$$

Mit diesem Ergebnis kann man zeigen, dass zu jeder gegebenen harmonischen Funktion $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G eine bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte konjungiert harmonische Funktion $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert. (*Hinweis: vgl. (7.10), Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen, $u_y(x,y)\, dx - u_x(x,y)\, dy$ ist wegen $\Delta u = 0$ ein vollständiges Differential*)

Wir schreiben für $z = x + \mathbf{i}y$

$$v(x,y) = v(z) = v_1(x,y) + \mathbf{i}v_2(x,y).$$

Es sei $\psi : G \to \mathbb{R}$ eine zu $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ konjugiert harmonische Funktion. Dann ist

$$f(z) = f(x + \mathbf{i}y) = \varphi(x,y) + \mathbf{i}\psi(x,y)$$

in G holomorph. Man nennt $f(z)$ das **komplexe Strömungspotential** , $\varphi(x,y)$ das **Potential** der Strömung und $\psi(x,y)$ die **Stromfunktion** des **Strömungsfeldes** $v(x,y)$. Die Kurven $\{(x,y) \in G : \psi(x,y) = \text{konstant}\}$ sind Stromlinien. Gibt es Punktquellen bzw. -wirbel, so ist $f(z)$ dort singulär. Ferner folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$v(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - \mathbf{i}\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = \overline{f'(z)}. \tag{7.11}$$

Ist $\Gamma \subset G$ ein geschlossener Jordan-Integrationsweg, so sind der Fluss F_Γ durch Γ und die Zirkulation Z_Γ entlang Γ gegeben durch

$$F_\Gamma = \int_\Gamma v_1(x,y)\,dy - v_2(x,y)\,dx \quad \text{und} \quad Z_\Gamma = \int_\Gamma v_1(x,y)\,dx + v_2(x,y)\,dy\,.$$

Dies kann in komplexer Form

$$Z_\Gamma + \mathbf{i}\,F_\Gamma = \int_\Gamma [v_1(x,y) - \mathbf{i}\,v_2(x,y)]\,[dx + \mathbf{i}dy] = \int_\Gamma \overline{v(z)}\,dz = \int_\Gamma f'(z)\,dz \tag{7.12}$$

geschrieben werden.

Beispiel 7.14 *Der (unendlich lange) Kreiszylinder $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ werde zirkulationsfrei umströmt. Im Unendlichen sei die Strömungsgeschwindigkeit konstant gleich $v_\infty > 0$. Damit ist $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$, also nicht einfach zusammenhängend. Falls doch ein Strömungspotential $f(z)$ existiert, so ist $f' : G \longrightarrow \mathbb{C}$ nach (7.11) holomorph und beschränkt im unendlich fernen Punkt. (Man beachte, dass das Problem durch Spiegelung am Einheitskreis in ein Problem über der Einheitskreisscheibe transformiert werden kann.) Es folgt*

$$f'(z) = v_\infty + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \cdots\,, \quad |z| > 1\,.$$

Es sei $R > 1$ und $\Gamma_R = \partial U_R(0)$. Wir erhalten unter Verwendung von (7.12)

$$\int_{\Gamma_R} f'(z)\,dz = 2\pi\mathbf{i}a_{-1} = Z_{\Gamma_R} + \mathbf{i}F_{\Gamma_R} = \mathbf{i}F_{\Gamma_R}\,.$$

Für $R \longrightarrow 1$ folgt wegen $F_{\Gamma_1} = 0$, dass $a_{-1} = 0$ und somit

$$f(z) = v_\infty z + a_0 - \frac{a_{-2}}{z} - \frac{a_{-3}}{2z^2} - \dots$$

gilt. Da Γ_1 Stromlinie sein soll, was äquivalent dazu ist, dass die Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ in Richtung der Normalen auf Γ_1 verschwindet, muss $\psi(x,y)$ auf Γ_1 konstant sein. Deshalb ist das Bild $f(\Gamma_1)$ eine zur u-Achse parallele Strecke. Da wir wissen, dass die Joukowski-Funktion diese Eigenschaft hat, machen wir den Ansatz

$$f(z) = \alpha\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Wegen $f'(z) = \alpha(1 - z^{-2})$ folgt $\alpha = v_\infty$ und mit $z = r\,e^{\mathbf{i}\theta}$ (vgl. (7.5))

$$\varphi(x,y) = v_\infty\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta\,, \quad \psi(x,y) = v_\infty\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta\,.$$

Die Stromlinien $\{(x,y) \in \mathbb{R} : \psi(x,y) = \text{konstant} =: 2\beta\,v_\infty\}$ erhält man also aus den Gleichungen

$$r - \frac{1}{r} = \frac{2\beta}{\sin\theta}\,,$$

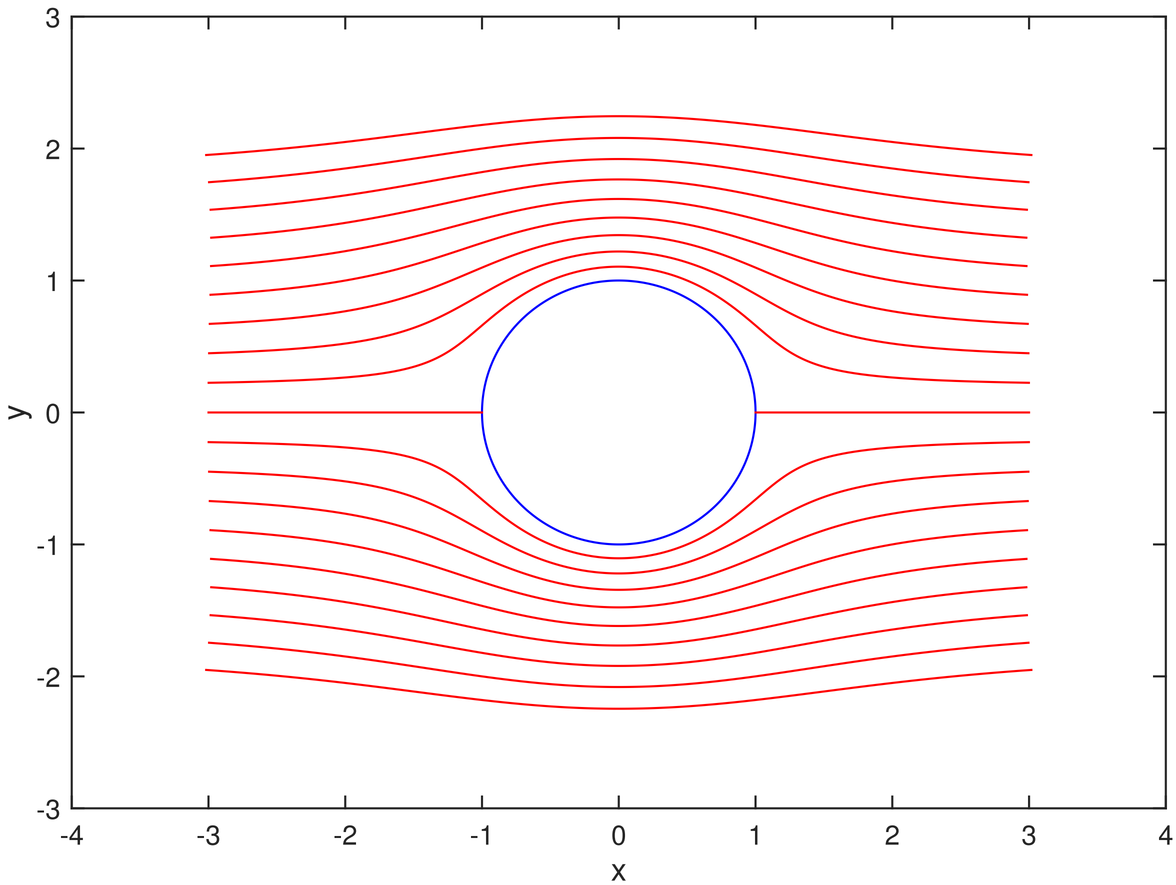
d.h.

$$r = \frac{\beta}{\sin\theta} + \sqrt{\frac{\beta^2}{\sin^2\theta} + 1}\,,$$

falls $\beta \neq 0$, *und als*

$$\{|z| = 1\} \cup \{\theta = 0, r > 1\} \cup \{\theta = \pi, r > 1\}\ ,$$

falls $\beta = 0$. *Die* **Staupunkte** *der Strömung, d.h. die Punkte* z *mit* $v(z) = 0$, *sind* $z = \pm 1$ (*vgl.* (*7.11*)).



Zirkulationsfreie Umströmung eines Kreiszylinders

Kapitel 8

Anhang

8.1 Zum Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes

Die folgenden Überlegungen dienen als Vorbereitung auf den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes (Satz 7.2).

1. Wir erinnern an den Satz über implizite Funktionen aus der reellen Analysis. Sind $D \subset \mathbb{R}^{m+n}$ eine offene Menge und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n \,, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \end{bmatrix}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung sowie $(x^0, y^0) \in D$ ein Punkt mit

$$f(x^0, y^0) = \Theta \,,$$

wobei die Matrix

$$f_y(x^0, y^0) := \left[\frac{\partial f_j(x^0, y^0)}{\partial y_k} \right]_{j,k=1}^{n}$$

regulär ist, so existieren offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^m$ von x^0 und $V \subset \mathbb{R}^n$ von y^0 sowie eine stetig differenzierbare, bijektive Abbildung $g : U \longrightarrow V$ mit $f(x, g(x)) = \Theta \;\forall\, x \in U$. Dabei gilt

$$g'(x) = -f_y(x, g(x))^{-1} f_x(x, g(x)) \,, \quad x \in V \,,$$

wobei

$$f_x(x, y) = \left[\frac{\partial f_j(x, y)}{\partial x_k} \right]_{j,k=1}^{n,m} .$$

2. Wendet man diese Aussage auf die Funktion $F(w, z) = w - f(z)$ anstelle von $f(x, y)$ an, so kann man folgendes zeigen: Eine in z_0 holomorphe Funktion mit $f'(z_0) \neq 0$ ist in z_0 **lokal biholomorph**, d.h., es existieren offene Umgebungen U von z_0 und V von $w_0 := f(z_0)$,

so dass $f : U \longrightarrow V$ bijektiv ist, die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \longrightarrow U$ ebenfalls holomorph ist und $(f^{-1})'(w) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ gilt.

3. Die Funktionen $p(z) = z^k$, $k = 1, 2, \ldots$, sind in jedem Punkt $z_0 \neq 0$ lokal biholomorph.

4. Sind $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $k \in \{1, 2, \ldots\}$ und $g(z_0) \neq 0$ für ein $z_0 \in G$, so existieren eine Umgebung U von z_0 und eine holomorphe Funktion $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = [h(z)]^k$ $\forall\, z \in U$.

   Beweis. Es sei $\widetilde{z}$ eine k-te Wurzel von $w_0 = g(z_0)$, d.h. $\widetilde{z}^k = w_0$. Aus $\widetilde{z} \neq 0$ und 3. folgt die Existenz einer Umgebung $\widetilde{U}$ von $\widetilde{z}$ und einer Umgebung V von w_0 , so dass $z^k : \widetilde{U} \longrightarrow V$ biholomorph ist. Sei $\widetilde{h} : V \longrightarrow \widetilde{U}$ die entsprechende Umkehrfunktion. D.h., es gilt $[\widetilde{h}(w)]^k = w$. Da g stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass $g(z) \in V$ $\forall\, z \in U_\delta(z_0)$. Für $h(z) = \widetilde{h}(g(z))$ und $U = U_\delta(z_0)$ folgt dann

$$[h(z)]^k = [\widetilde{h}\ (g(z))]^k = g(z) \quad \forall\, z \in U\,.$$

   □

5. Wir wissen bereits: Ist $z_0 \in G$ eine Nullstelle k-ter Ordnung der holomorphen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, so gilt

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n\,, \quad z \in U_\rho(z_0)\,,\ c_k \neq 0\,,$$

   also

$$f(z) = (z - z_0)^k \left[c_k + \sum_{n=1}^{\infty} c_{k+n} (z - z_0)^n \right] =: (z - z_0)^k g(z)$$

   mit der holomorphen Funktion $g : U_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ und $g(z_0) = c_k \neq 0$. Nach 4. existiert eine holomorphe Funktion $h : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $[h(z)]^k = g(z)$, woraus mit $\widetilde{f}(z) = (z - z_0) h(z)$ die Beziehung

$$f(z) = [\widetilde{f}(z)]^k\,,$$

   folgt, wobei $\widetilde{f} : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 einfache Nullstelle von $\widetilde{f}(z)$ ist.

Satz 8.1 *Ist z_0 eine k-fache, $k \geq 1$, Nullstelle der holomorphen Funktion f , so existieren eine Umgebung U von z_0 und eine holomorphe Funktion $\widetilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der einfachen Nullstelle z_0 , so dass $f(z) = [\widetilde{f}(z)]^k$, $z \in U$.*

6. Wir verwenden die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 8.1. Dann ist also $\widetilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $\widetilde{f}(z_0) = 0$, $\widetilde{f}'(z_0) \neq 0$ und $f(z) = [\widetilde{f}(z)]^k$ $\forall\, z \in U$. Nach 3. existieren Umgebungen U_0 von z_0 und V von 0 , so dass $\widetilde{f} : U_0 \longrightarrow V$ biholomorph ist. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $U_\delta(0) \subset V$ mit $\delta = \sqrt[k]{\varepsilon}$. Mit $\widetilde{U}$ bezeichnen wir das vollständige Urbild von $U_\delta(0)$ bezüglich $\widetilde{f}$, d.h. $\widetilde{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \widetilde{f}(z) \in U_\delta(0) \right\}$. Da $\widetilde{f}$ stetig ist, ist $\widetilde{U}$ eine offene Menge. Ferner gilt $z_0 \in \widetilde{U}$. Die Funktion z^k bildet $U_\delta(0)$ auf $U_\varepsilon(0)$ ab. Dabei wird jeder Wert $w \in U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ genau k-mal angenommen. Es folgt, dass $f = \widetilde{f}^k$ die Umgebung $\widetilde{U}$ von z_0 auf $U_\varepsilon(0)$ abbildet und dabei jeden Wert $w \in U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ genau k-mal annimmt.

Satz 8.2 (Blätterzahl bei einer Nullstelle) *Es sei z_0 eine k-fache Nullstelle der holomorphen Funktion f. Dann existiert für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $\widetilde{U} = \widetilde{U}_\varepsilon$ von z_0, so dass f auf $\widetilde{U}$ jeden Wert $w \in U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ genau k-mal annimmmt und $f(z) = 0$ nur bei $z = z_0$ gilt.*

7. Sei f auf dem Gebiet G holomorph. Dann ist auch $f(G)$ eine zusammenhängende Menge. Seien $w_0 = f(z_0) \in f(G)$ und $f \not\equiv \text{const}$. Dann hat die Funktion $g(z) = f(z) - w_0$ in z_0 eine Nullstelle endlicher Ordnung. Nach Satz 8.2 existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$, d.h. $f(G)$ ist auch offen.

   Satz 8.3 (Gebietstreue) *Ist $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ auf dem Gebiet G holomorph und nicht konstant, so ist das Bild $f(G)$ auch ein Gebiet.*

   Satz 8.4 (Maximumprinzip) *Ist f auf dem Gebiet G holomorph und nicht konstant, so existiert kein $z_0 \in G$ mit $|f(z)| \le |f(z_0)|\ \forall\, z \in G$. (Also: Ist zusätzlich $f : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, so kann $|f(z)|$ nur auf dem Rand von G sein Maximum annehmen, was natürlich für kompaktes $\overline{G}$ immer der Fall ist.)*

   Beweis. Seien $z_0 \in G$ und $|f(z)| \le |f(z_0)|\ \forall\, z \in G$. Dann ist $f(G) \subset \overline{U_R(0)}$ mit $R = |f(z_0)|$ und $f(z_0)$ liegt auf Rand von $U_R(0)$. Somit existiert **kein** $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $U_\varepsilon(f(z_0)) \subset f(G)$ im Widerspruch zum Satz 8.3. □

8. Es seien $f : U_1(0) \longrightarrow U_1(0)$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} = z g(z)$$

   mit der holomorphen Funktion $g : U_1(0) \to \mathbb{C}$. Es folgt $f'(0) = g(0)$. Für $|z| = r < 1$ gilt $|f(z)| = r|g(z)| < 1$, so dass $|g(z)| < \dfrac{1}{r}\ \forall\, z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$. Nach Satz 8.4 ist $|g(z)| < \dfrac{1}{r}$ $\forall\, z \in \overline{U_r(0)}$. Für $r \longrightarrow 1-0$ erhalten wir $|g(z)| \le 1\ \forall\, z \in U_1(0)$, also $|f(z)| \le |z|$ $\forall\, z \in U_1(0)$. Nehmen wir nun an, dass ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ existiert, so folgt $|g(z_0)| = 1$ und nach Satz 8.4 $g \equiv \text{const}$ in $U_1(0)$, d.h. $g(z) = e^{\mathbf{i}\vartheta}$ für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$. Also ist $f(z) = z e^{\mathbf{i}\vartheta}$. Gleiches folgt, wenn wir $|f'(0)| = 1$ annehmen, da wegen $f'(0) = g(0)$ dann $|g(0)| = 1$ gilt, was nach Satz 8.4 wiederum $g \equiv \text{const}$ impliziert.

   Satz 8.5 (Schwarzsches Lemma) *Seien $f : U_1(0) \longrightarrow U_1(0)$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann gilt $|f'(0)| \le 1$ und $|f(z)| \le |z|\ \forall\, z \in U_1(0)$. Existiert ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ oder ist $|f'(0)| = 1$, so ist f einfach eine Drehung um einen Winkel $\vartheta \in \mathbb{R}$, d.h. $f(z) = z e^{\mathbf{i}\vartheta}\ \forall\, z \in U_1(0)$.*

Nun zum eigentlichen Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes: Es sei G ein echtes und einfach zusammenhängendes Teilgebiet von $\mathbb{C}$. Wir zeigen, dass es eine holomorphe und bijektive Abbildung $f : G \longrightarrow U_1(0)$ gibt. Aus Satz 8.2 folgt dann $f'(z) \ne 0$ für alle $z \in G$, Satz 8.3 liefert dann die Stetigkeit von $f^{-1} : U_1(0) \longrightarrow G$ und Satz 1.7 die Holomorphie von $f^{-1} : U_1(0) \longrightarrow G$. Hat man dann also zwei echte und einfach zusammenhängende Teilgebiete G_1 und G_2 von $\mathbb{C}$ und die biholomorphen Abbildungen $f_1 : G_1 \longrightarrow U_1(0)$ bzw. $f_2 : G_2 \longrightarrow U_1(0)$, so ist $f_2^{-1} \circ f_1 : G_1 \longrightarrow G_2$ eine Abbildung mit den gewünschten Eigenschaften.

1. Wir zeigen, dass es stets eine injektive und holomorphe Abbildung $f : G \longrightarrow U_1(0)$ gibt.

   (a) Der Fall, dass eine Kreisscheibe $U_r(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus G$ existiert: Die Abbildung $z \mapsto \dfrac{r}{z - z_0}$ realisiert eine solche gewünschte Abbildung.

   (b) Der andere Fall: O.E.d.A. nehmen wir an, dass $0 \notin G$ gilt. Da G einfach zusammenhängend ist, kann es keinen geschlossenen Jordan-Integrationsweg in G geben, der die Null umschließt. Somit gibt es einen Zweig des Logarithmus $\log : G \longrightarrow \mathbb{C}$ (vgl. Satz 6.3). Für die Wurzelfunktion $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{\frac{1}{2}\log z}$ gilt dann $[g(z)]^2 = z$ $\forall\, z \in G$. Insbesondere ist $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ injektiv. Da aber $[-g(z)]^2 = [g(z)]^2$ gilt, folgt $-g(z) \notin g(G)$ $\forall\, z \in G$. Ist also $U_r(w_0) \subset g(G)$, so ist $U_r(-w_0) \cap g(G) = \emptyset$, und wir können g noch mit der Abbildung $w \mapsto \dfrac{r}{w + w_0}$ (vgl. (a)) verknüpfen, um das Gewünschte zu erhalten.

2. Wir können nun annehmen, dass $G \subset U_1(0)$ gilt und o.E.d.A. auch $0 \in G$. Es sei $\mathcal{F}$ die Menge der injektiven und holomorphen Funktionen $f : G \longrightarrow U_1(0)$ mit $f(0) = 0$.

   Satz 8.6 *Ist $f \in \mathcal{F}$ nicht surjektiv, so existiert ein $f_1 \in \mathcal{F}$ mit $|f_1'(0)| > |f'(0)|$.*

   Beweis. Es seien $z_0 \in U_1(0) \setminus f(G)$ und
$$g : U_1(0) \longrightarrow U_1(0)\,, \quad z \mapsto \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}\,.$$
   Nach Beispiel 7.10 ist g biholomorph. Damit ist $0 \notin (g \circ f)(G) =: \widetilde{G}$, und $\widetilde{G}$ ist einfach zusammenhängend. Also gibt es einen Zweig des Logarithmus $\log : \widetilde{G} \longrightarrow \mathbb{C}$, und wir definieren
$$h(z) = e^{\frac{1}{2}\log z} =: \sqrt{z}\,, \quad z \in \widetilde{G}\,.$$
   Dann ist $h \circ g \circ f : G \longrightarrow U_1(0)$ eine injektive Abbildung. Wir setzen $z_1 = h(-z_0) = h(g(0))$ und
$$g_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \overline{z_1} z} \quad \text{sowie} \quad f_1 = g_1 \circ h \circ g \circ f\,.$$
   Es folgt $f_1 \in \mathcal{F}$. Die Abbildung
$$h_1 : U_1(0) \longrightarrow U_1(0)\,, \quad z \mapsto g^{-1}\left([g_1^{-1}(z)]^2\right)$$
   ist nicht nur eine Drehung um den Nullpunkt. Aus dem Schwarzschen Lemma (Satz 8.5) folgt $|h_1'(0)| < 1$ und somit
$$|f'(0)| = |(h_1 \circ f_1)'(0)| = |h_1'(0)| \cdot |f_1'(0)| < |f_1'(0)|\,.$$
   □

3. Wir zeigen: In $\mathcal{F}$ gibt es ein f_* mit der Eigenschaft
$$|f_*'(0)| \geq |f'(0)| \quad \forall\, f \in \mathcal{F}\,. \tag{8.1}$$
   Nach der Cauchyschen Integralformel gilt für $U_r(0) \subset G$ und jedes $f \in \mathcal{F}$
$$|f'(0)| = \left| \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_r(0)} \frac{f(z)}{z^2}\, dz \right| \leq \frac{1}{r}\,.$$

Dies zeigt, dass

$$\sigma_* = \sup\left\{|f'(0)| : f \in \mathcal{F}\right\} < \infty$$

gilt. Es sei nun $\left(\widetilde{f}_n\right)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ eine Funktionenfolge mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} |\widetilde{f}_n'(0)| = \sigma_*$. Es bleibt zu zeigen, dass es in $\mathcal{F}$ eine Funktion f_* mit $\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{f}_{n_k}'(0) = f_*'(0)$ gibt. Dazu benötigen wir einige Aussagen aus der Theorie der lokal gleichmäßigen Konvergenz von Folgen holomorpher Funktionen.

Definition 8.7 *Eine Folge* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorpher Funktionen heißt* **lokal gleichmäßig konvergent**, *wenn sie auf jeder Umgebung* $U_\varepsilon(z) \subset G$ *gleichmäßig konvergiert.*

- Die Grenzfunktion einer lokal gleichmäßig konvergenten Folge holomorpher Funktionen ist holomorph.
- Mit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert auch $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ lokal gleichmäßig, und zwar gegen die Ableitung der Grenzfunktion von f_n.
- Für eine lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \longrightarrow \mathbb{C}$ und eine beliebige Zahl $w \in \mathbb{C}$ gilt: Ist die Anzahl der Nullstellen von $f_n - w : G \longrightarrow \mathbb{C}$ durch die Zahl M beschränkt, so ist die Grenzfunktion $f(z)$ entweder konstant w oder $f - w$ hat auch höchstens M Nullstellen.
- Jede lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen besitzt eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Es existiert also eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $\left(\widetilde{f}_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$. Bezeichnen wir deren Grenzfunktion mit $f_* : G \longrightarrow \overline{U_1(0)}$, so ist diese holomorph, so dass nach dem Satz über die Gebietstreue (Satz 8.3) gilt: $f(G) \subset U_1(0)$. Sie ist auch injektiv, also $f_* \in \mathcal{F}$. Und letztendlich gilt (8.1).

Nach Satz 8.6 ist $f(G) = U_1(0)$.

8.2 Harmonische Funktionen

Wir erinnern an den Begriff der harmonischen Funktion und die Folgerungen 7.12 und 7.13 zur Existenz einer konjugiert harmonischen Funktion.

Satz 8.8 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen)

(a) *Besitzt die harmonische Funktion* $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *in einem Punkt* $z_0 = (x_0, y_0) \in G$ *ein lokales Extremum, so ist* u *konstant auf* G.

(b) *Sind* $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *harmonisch und* $u : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig, so nimmt die Funktion* $u(x,y)$ *ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand* ∂G *von* G *an.*

Sei $f : U_{R+\varepsilon}(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph für ein gewisses $\varepsilon > 0$. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt dann für alle $z \in U_R(0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial U_R(0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi) R e^{\mathbf{i}t}}{R e^{\mathbf{i}t} - z}\, dt\,,$$

d.h.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi)R^2}{R^2 - \overline{\xi}z} \, dt \,. \tag{8.1}$$

Hierbei, wie auch im weiteren, ist $\xi = Re^{\mathbf{i}t}$. Für ein festes $z \in U_R(0)$ ist die Funktion

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{R^2 - \zeta\overline{z}}$$

holomorph in einer Umgebung von $U_R(0)$. Damit können wir (8.1) auf $g(\zeta)$ anwenden und erhalten

$$\frac{f(z)}{R^2 - |z|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi)R^2}{|R^2 - \overline{\xi}z|^2} \, dt \,.$$

Hieraus folgt wegen $|R^2 - \overline{\xi}z| = |\overline{\xi}(\xi - z)| = R|\xi - z|$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \frac{R^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2} \, dt \,. \tag{8.2}$$

Die Funktion

$$P_R(\xi, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|\xi - z|^2}$$

nennt man **Poissonkern** für den Kreis $U_R(0)$. In Polarkoordinaten $\xi = Re^{\mathbf{i}t}$, $z = re^{\mathbf{i}\vartheta}$ hat er die Gestalt

$$\frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t - \vartheta) + r^2} \,.$$

Folgerung 8.9 *Es gilt*

$$\int_0^{2\pi} P_R(\xi, z) \, dt = 1 \quad \forall\, z \in U_R(0) \,.$$

Die Voraussetzungen für die Integraldarstellung (8.2) lassen sich abschwächen, nämlich wie folgt.

Satz 8.10 (Poissonsche Integralformel für den Kreis)

(a) *Ist* $u : \overline{U_R(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und auf* $U_R(0)$ *harmonisch, so gilt für alle* $z \in U_R(0)$

$$u(z) = \int_0^{2\pi} u(\xi) P_R(\xi, z) \, dt \,,$$

wobei $\xi = Re^{\mathbf{i}t}$ *zu setzen ist.*

(b) *Ist* $g : \partial U_R(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig, so ist* $u : U_R(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit*

$$u(z) = \int_0^{2\pi} g(\xi) P_R(\xi, z) \, dt \,, \quad z \in U_R(0) \,,$$

harmonisch.

Wir betrachten das **Dirichlet-Problem**

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad G, \quad u = g \quad \text{auf} \quad \partial G \,. \tag{8.3}$$

Dabei ist $g : \partial G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene stetige Funktion. Gesucht ist eine stetige Funktion $u : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}$, die in G harmonisch ist. Aus dem Maximumprinzip (Satz 8.8) folgt, dass das Problem (8.3) höchstens eine Lösung hat.

Satz 8.11 *Für den Fall $G = U_R(0)$ ist*

$$u(z) = \int_0^{2\pi} g(Re^{\mathbf{i}t}) P_R(Re^{\mathbf{i}t}, z)\, dt\,, \quad z \in G\,,$$

die Lösung von (8.3).

Wir lösen jetzt das Dirichletsche Randwertproblem (8.3) für die obere Halbebene $G = \mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Im}\, z > 0\}$. Dabei setzen wir voraus, dass $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, für die die beiden Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$ endlich und gleich sind. Wir suchen also eine in der oberen Halbebene $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x \in \mathbb{R}\right\}$ harmonische Funktion, die auf deren Abschließung $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \in \mathbb{R}\right\}$ stetig ist und der Bedingung $u(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, genügt.

Sei $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0$ mit $y_0 > 0$ fest gewählt. Die Funktion

$$w = f(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$$

ist eine holomorphe Abbildung der oberen Halbebene auf den Einheitskreis $\{|w| < 1\}$ (vgl. Beispiel 7.9). Nach Satz 8.10 ist

$$\widetilde{u}(w) = \frac{1}{2\pi} \mathsf{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} g(f^{-1}(e^{\mathbf{i}\varphi}))\, \frac{e^{\mathbf{i}\varphi} + w}{e^{\mathbf{i}\varphi} - w}\, d\varphi \right\}$$

harmonisch in $\{|w| < 1\}$, wobei $\widetilde{u}(e^{\mathbf{i}\varphi}) = g(f^{-1}(e^{\mathbf{i}\varphi}))$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, gilt. Somit ist die Funktion $u(z) = \widetilde{u}(f(z))$ harmonisch in $\mathbb{C}_+$, und für $x = f^{-1}(e^{\mathbf{i}\psi}) \in \mathbb{R}$ gilt $u(x) = \widetilde{u}(e^{\mathbf{i}\psi}) = g(x)$. Wir erhalten also unter Verwendung der Substitution

$$t = f^{-1}(e^{\mathbf{i}\varphi}) \quad \text{bzw.} \quad e^{\mathbf{i}\varphi} = \frac{t - z_0}{t - \overline{z_0}}$$

die Formel

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \mathsf{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \frac{\dfrac{t - z_0}{t - \overline{z_0}} + \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}}{\dfrac{t - z_0}{t - \overline{z_0}} - \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}}\, \frac{y_0}{(x_0 - t)^2 + y_0^2}\, dt \right\}.$$

Für $z = z_0$ folgt die **Poissonsche Integralformel für die obere Halbebene**

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{y_0}{(x_0 - t)^2 + y_0^2}\, dt\,.$$

Definition 8.12 *Eine Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ hat die* **Mittelwerteigenschaft***, wenn f stetig ist und wenn für alle $z_0 \in G$ eine Umgebung $\overline{U_R(z_0)} \subset G$ existiert, so dass*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\mathbf{i}t})\, dt \quad \forall\, r \in (0, R]$$

gilt.

Satz 8.13 *Eine auf G stetige Funktion ist genau dann harmonisch, wenn sie die Mittelwerteigenschaft hat.*

Index