Funktionentheorie, 6. Übung

1. Man bestimme alle möglichen Logarithmen

   (a) $\log \mathbf{i}$, (b) $\log(1+\mathbf{i})^3$, (c) $\log(-1)$.

2. Man berechne

   (a) $\operatorname{Log}(3-4\mathbf{i})^4$, (b) $\operatorname{Log}(-2+\sqrt{5}\mathbf{i})$,

   wobei Log den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet.

3. Es sei $U := \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2,\ \mathsf{Re}\, z > 0\right\}$, und Log bezeichne den Hauptzweig des Logarithmus. Man skizziere folgende Mengen:

   (a) U,

   (b) $\operatorname{Log} U = \{w \in \mathbb{C} : w = \operatorname{Log} z, z \in U\}$,

   (c) $\exp^{-1} U = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z \in U\}$.

4. Bestimmen Sie eine Stammfunktion der (reellen) Funktion $f(x) = (x^2 - 4x + 5)^{-1}$

   (a) durch reelle Rechnung,

   (b) durch Zerlegung von $z^2 - 4z + 5$ in (komplexe) Linearfaktoren.

5. Man verwende zur Definition der komplexen Potenzen jeweils den Hauptzweig des Logarithmus und berechne

   (a) $(1+\mathbf{i})^{\mathbf{i}}$, (b) $(1+\mathbf{i})^2$, (c) $5^{3+4\mathbf{i}}$.

6. Berechnen Sie alle möglichen Werte für folgende Ausdrücke

   (a) $\mathbf{i}^{\mathbf{i}}$, (b) $\mathbf{i}^{\frac{1}{3}}$.

7. Es sei $z = re^{\mathbf{i}\varphi}$, $r > 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi)$. Zeigen Sie, dass sich für $w = z^{\frac{1}{n}}$ durch geeignete Wahl eines Zweiges des Logarithmus für $\log z$ jeweils genau eine der Zahlen $w_j = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\mathbf{i}(\varphi + 2j\pi)}{n}}$, $j = 0, \ldots, n-1$ ergibt.

8. Man zeige, dass sich auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ eine holomorphe Funktion $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ definieren lässt, welche für reelles $x > 1$ mit der reellen Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ zusammenfällt.