Funktionentheorie, 5. Übung

1. Man entwickle folgende Funktionen an den im Endlichen liegenden Singularitäten und im Punkt P_∞ in eine Laurentreihe und gebe das Konvergenzgebiet an:

   (a) $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$, (b) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$,

   (c) $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$, (d) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

2. Man charakterisiere die Art der Singularität und bestimme das Residuum von $f(z)$ an der Stelle z_0 :

   (a) $f(z) = \sin \dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = 1$, (b) $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$, $z_0 = 0$,

   (c) $f(z) = \dfrac{1}{1+z-e^z}$, $z_0 = 0$, (d) $f(z) = \cot z$, $z_0 = 0$,

   (e) $f(z) = \dfrac{z^2 - z + 7}{z-2}$, $z_0 = 2$.

3. Berechnen Sie möglichst effektiv die Residuen von $f(z)$ an den angegebenen Stellen

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{(z+3)(z-5)^2}$, $z_1 = -3$, $z_2 = 5$, $z_3 = P_\infty$,

   (b) $f(z) = (\sin z - \cos z)^{-1}$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$,

   (c) $f(z) = \cot z$, $z_0 = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$,

   (d) $f(z) = \dfrac{c}{(z-z_0)^n (z-z_1)}$, $c \neq 0$, z_0, z_1, wobei $z_0 \neq z_1$.

4. Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

   (a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\, dz$, (b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathbf{i} \cot z}{z(z-1)}\, dz$, (c) $\displaystyle\int_{|1+\mathbf{i}-z|=2} \frac{dz}{1+z^2}$.

5. Berechnen Sie folgende uneigentliche (reelle) Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$,

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\, dx$, (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n}+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,

   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2+1}\, dx$, $\alpha > 0$. Hinweis: Betrachten Sie $f(z) = \dfrac{z e^{\mathbf{i}\alpha z}}{z^2+1}$.

   (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n - 1}{x^{n+2}-1}\, dx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, (g) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

6. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$.