Funktionentheorie, 3. Übung

1. Berechnen Sie unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel das Integral

$$I_K := \int_K \frac{dz}{1+z^2}\,,$$

wobei K positiv orientiert und durch folgende Gleichungen gegeben ist:

(a) $|z-\mathbf{i}| = 1\,,$ (b) $|z+\mathbf{i}| = 1\,,$ (c) $|z| = 2\,.$

2. Berechnen Sie das Integral

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_C \frac{ze^z}{(z-a)^3}\,dz,$$

wenn C ein positiv orientierter, geschlossener Jordan-Integrationsweg ist, der $a \in \mathbb{C}$ umschließt.

3. Berechnen Sie unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel

(a) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}\,,$ (b) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{\sin z}{z+\mathbf{i}}\,dz\,,$ (c) $\displaystyle\int_{C_3} \frac{dz}{z^2+\pi^2}\,,$

(d) $\displaystyle\int_{C_4} \frac{e^{1-z}dz}{z^3(1-z)}\,,$ (e) $\displaystyle\int_{C_5} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz\,,$ (f) $\displaystyle\int_{C_6} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}\,,\ n,m = 1,2,\dots\,,$

(g) $\displaystyle\int_{C_7} \frac{\cos z}{(z+\pi)^n}\,dz\,,$

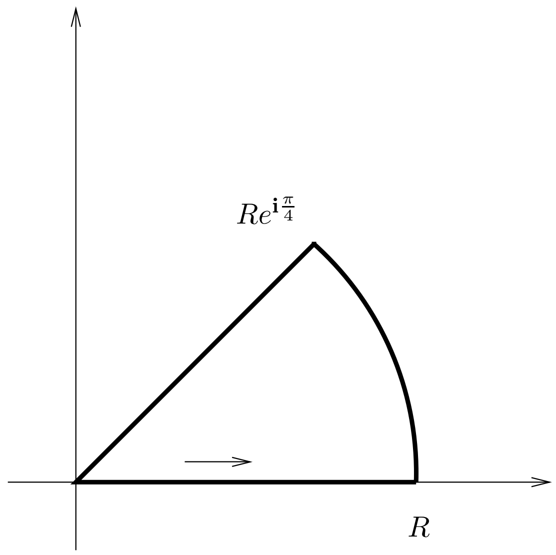
wobei die geschlossenen (positiv orientierten) Kurven C_i gegeben sind durch

(a) $|z+1| = 1\,,$ (b) $|z| = 2\,,$ (c) $|z+2\mathbf{i}| = 3\,,$ (d) $|z| = \frac{1}{2}\,,$ (e) $|z-1| = 1\,,$

(f) $|z| = r$, wobei $|a| < r < |b|\,,$ (g) $|z+2| = 2\,.$

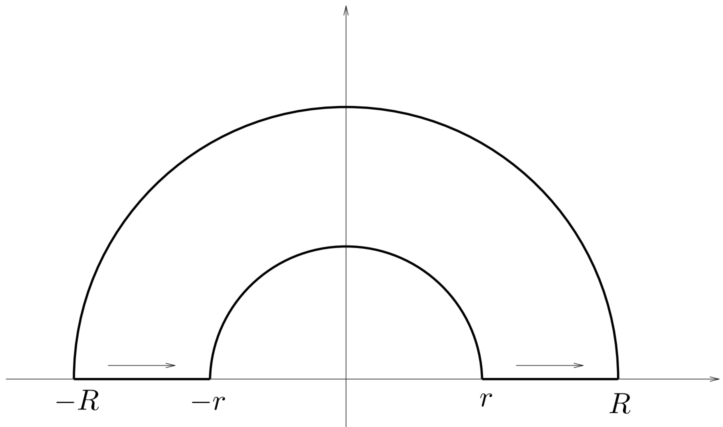
4. Berechnen Sie folgende Integrale mittels Integration der angegeben Funktion $f(z)$ entlang der (in den Abbildungen) gezeigten Kurven und durch Grenzübergang:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2\,dx\,,\ \int_0^\infty \sin x^2\,dx\,,\ f(z) = e^{\mathbf{i}z^2}$



Grenzübergang $R \longrightarrow +\infty$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\,,\ f(z)=\frac{e^{\mathbf{i}z}}{z}$



Grenzübergang $R \longrightarrow +\infty\,,\ r \longrightarrow +0$

5. Gibt es eine im Nullpunkt holomorphe Funktion, die in den Punkten $z_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Werte annimmt:

   (a) $0, \dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{4}, 0, \dfrac{1}{6}, \dots\,,$

   (b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots\,.$