

## Funktionentheorie, 4. Übung

1. Zeigen Sie, dass die Möbiustransformationen (d.h. die gebrochen linearen Abbildungen  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $ad-bc \neq 0$ ) bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden.
2. In welche Figuren gehen folgende Mengen bei der Abbildung  $f(z) = (\bar{z})^{-1}$  (Spiegelung am Einheitskreis) über?
  - (a)  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ ,  $r > 0$ ,
  - (b)  $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$ ,
  - (c)  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 1\}$ ,
  - (d) eine beliebige Gerade durch  $z_0 \neq 0$ .
3. Man bestimme das Bild
  - (a) des Einheitskreises  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  bei der Abbildung  $w = \frac{z}{1-z}$ ,
  - (b) der rechten Halbebene bei der Abbildung  $w = \frac{1-z}{1+z}$ ,
  - (c) des ersten Quadranten bei der Abbildung  $w = \frac{\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$ .
4. Geben Sie die allgemeine Form einer gebrochen linearen Abbildung an, die den Einheitskreis auf die untere Halbebene abbildet.
5. Für die Abbildung  $w = \frac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$  bestimme man das Bild der reellen Achse, der imaginären Achse und des Einheitskreises sowie alle Fixpunkte.
6. Man bestimme eine gebrochen lineare Abbildung  $w = \frac{az+b}{cz+d}$ , die
  - (a) die Punkte  $-1, \mathbf{i}, 1+\mathbf{i}$  in die Punkte  $0, 2\mathbf{i}, 1-\mathbf{i}$ ,
  - (b) die Punkte  $-1, P_\infty, \mathbf{i}$  in die Punkte  $P_\infty, \mathbf{i}, 1$überführt.
7. Man zeige, dass die Hyperbeln  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = C_1\}$  und  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = C_2\}$  für beliebige Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  senkrecht aufeinander stehen.