Lösungen zur Prüfungsklausur Funktionentheorie am 16.2.2008

1. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ und $F \subset \mathbb{C}$ Gebiete.

   (a) Wann nennt man eine Funktion $f : G \longrightarrow F$ biholomorph?

   - Die Funktion $f : G \longrightarrow F$ heißt biholomorph, wenn sie bijektiv ist und sowohl f als auch $f^{-1} : F \longrightarrow G$ holomorph sind. (2P)

   (b) In welchen Punkten der komplexen Ebene ist die Funktion $f_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ z \mapsto z^2\overline{z}$ differenzierbar?

   - Da $f_1(z) = f_1(x + \mathbf{i}y) = (x + \mathbf{i}y)(x^2 + y^2) = x^3 + xy^2 + \mathbf{i}(x^2y + y^3)$, sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nur im Punkt $z = 0$ erfüllt. Dort gilt $f_1(z) = f_1(0) + (z - 0)g(z)$ mit der stetigen Funktion $g(z) = |z|^2$, so dass f nur in $z_0 = 0$ differenzierbar ist. (Hinweis auf reelle Differenzierbarkeit im Punkt 0 genügt auch.) (3P)

2. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Gamma_a} \frac{z}{z^2 + 2}\, dz$$

für die Fälle $a = 1$ und $a = 2$, wobei Γ_a den oberen Halbkreisbogen von $-a$ bis a mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius a bezeichnet.

- Der Integrand $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 2}$ ist holomorph im (konvexen) Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt{2}\}$. Folglich ist die Integration innerhalb dieses Gebiets wegunabhängig und somit

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0.$$

(2P)

Sei nun Γ der geschlossene, positiv orientierte Jordan-Integrationsweg, der durch Γ_2 und das Intervall $(-2, 2)$ gegeben ist. Dann gilt

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\, dz = \int_{-2}^{2} f(x)\, dx - \int_{\Gamma} f(z)\, dz = 0 - 2\pi\mathbf{i}\, \mathrm{res}_{\sqrt{2}\mathbf{i}} f = -\pi\mathbf{i}.$$

(3P)

3. Für welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen?

$$\text{(a)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2 + 1}, \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$$

Bestimmen Sie die Summe der zweiten Reihe.

(a) - Für $|z - 1| < 1$ konvergiert der Hauptteil der Reihe nicht (vgl. notwendiges Konvergenzkriterium). Für $|z - 1| > 1$ konvergiert der Nebenteil der Reihe nicht. Für $|z - 1| = 1$ gilt

$$\sum_{n=-k}^{m} \left| \frac{(z-1)^n}{n^2 + 1} \right| = \sum_{n=-k}^{m} \frac{1}{n^2 + 1} \leq 1 + 2 \sum_{n=1}^{\max\{k,m\}} \frac{1}{n^2},$$

woraus die (absolute) Konvergenz folgt.

(3P)

(b) • Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ gleich 1. Für $|z| = 1$ ist die notwendige Konvergenzbedingung verletzt. Also konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\, z^n$ genau dann, wenn $|z| < 1$. Die Summe lässt sich mittels

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\, z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

berechnen. (3P)

4. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = (z^2-1)e^{(z-1)^{-1}}$ um $z_0 = 1$ in eine Laurentreihe und geben Sie das maximale Konvergenzgebiet an.

   • Da $e^w = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ $\forall w \in \mathbb{C}$, gilt für $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+1)(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-1)^{-n} \\ &= (z-1+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-1)^{-n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-1)^{-n+2} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-1)^{-n+1} \\ &= \sum_{n=2}^{-\infty}\frac{5-2n}{(2-n)!}(z-1)^n. \end{aligned}$$

(4P)

5. Sei f holomorph im Gebiet D, $z \in D$ und $r > 0$ so dass $U_r(z) \subset D$. Zeigen Sie: $f(z)$ ist gleich dem „arithmetischen Mittel“ der Funktionswerte von f auf $\partial U_r(z)$, d.h.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})dt.$$

   • Nach der Cauchyschen Integralformel gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{\partial U_r(z)}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})dt$$

   mit der Substitution $\xi = z + re^{it}$. (3P)

6. (**Zusatzaufgabe**) Gibt es im Gebiet

   (a) $G = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 2\}$ (b) $G = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 3\}$

   eine holomorphe Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften $f(n^{-1}) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, und $f(2) = 2$.

(a) • Ja, $f(z) = z\sin\frac{\pi}{z}$. (1Z)

(b) • Nein, denn nach dem Identitätssatz folgt aus $f(n^{-1}) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ für eine holomorphe Funktion f, dass $f \equiv 0$. (1Z)

7. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\,dx$ für $\alpha > 0$ und (**Zusatzaufgabe**) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

- Aus $\displaystyle\operatorname{res}_{\mathbf{i}} \frac{e^{\mathbf{i}\alpha z}}{1+z^2} = \left.\frac{e^{\mathbf{i}\alpha z}}{z+\mathbf{i}}\right|_{z=\mathbf{i}} = \frac{e^{-\alpha}}{2\mathbf{i}}$ und dem Residuensatz folgt für $R > 1$

$$\pi\, e^{-\alpha} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\mathbf{i}\alpha z}}{1+z^2}\,dz + \int_{|z|=R,\,\mathsf{Im}\,z\geq 0} \frac{e^{\mathbf{i}\alpha z}}{1+z^2}\,dz = 2\int_0^R \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\,dx + I_R$$

mit

$$|I_R| \leq \frac{R}{R^2-1}\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin\varphi}\,d\varphi \leq \frac{R\pi}{R^2-1} \longrightarrow 0 \ (R \longrightarrow \infty).$$

Es folgt

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi\, e^{-\alpha}}{2}\,.$$

(5P)

- Mit der Substitution $z = \sqrt{x^2-1}$ folgt

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^\infty \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}2\pi\mathbf{i}\operatorname{res}_{\mathbf{i}}\frac{1}{z^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Alternative: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+1} = [\arctan z]_0^\infty$. (2Z)

8. Man bestimme das Bild des Kreisringes $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ unter der Abbildung

$$w(z) = \frac{z}{z-1}\,.$$

Welche Menge wird durch w auf die offene Einheitskreisscheibe abgebildet?

- w ist eine Möbiustransformation. Aus $1 \mapsto P_\infty$, $-1 \mapsto \frac{1}{2}$, $\mathbf{i} \mapsto \frac{1-\mathbf{i}}{2}$ und $0 \mapsto 0$ folgt

$$w\left(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z > \frac{1}{2}\right\}.$$

Aus $2 \mapsto 2$, $-2 \mapsto \frac{2}{3}$, $w(\overline{z}) = \overline{w(z)}$ und $1 \mapsto P_\infty$ folgt, dass

$$w\left(\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{4}{3}\right| > \frac{2}{3}\right\}.$$

Somit ist

$$w\left(\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{4}{3}\right| > \frac{2}{3}, \mathsf{Re}\, z > \frac{1}{2}\right\}.$$

(3P)

- Die Umkehrabbildung lautet ebenfalls $w^{-1}(z) = \dfrac{z}{z-1}$. Daraus folgt

$$w^{-1}\left(\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z < \frac{1}{2}\right\}.$$

(1P)