Fakultät für Mathematik

Prof. Dr. Peter Junghanns

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Chemnitz, 16. Februar 2008

Prüfungsklausur Funktionentheorie

- **Arbeitszeit**: 90 min, 10:00–11:30
- **Hilfsmittel**: Formelsammlung (ohne durchgerechnete Beispiele)
- Der Lösungsweg sollte klar erkennbar sein. Alle Aussagen sind zu begründen!

Viel Erfolg!

1. Es seien $G \subset \mathbb{C}$ und $F \subset \mathbb{C}$ Gebiete.

   (a) Wann nennt man eine Funktion $f : G \longrightarrow F$ biholomorph?

   (b) In welchen Punkten der komplexen Ebene ist die Funktion $f_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ z \mapsto z^2\overline{z}$ differenzierbar?

2. Berechnen Sie das Integral
$$\int_{\Gamma_a} \frac{z}{z^2+2}\,dz$$
für die Fälle $a = 1$ und $a = 2$, wobei Γ_a den oberen Halbkreisbogen von $-a$ bis a mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius a bezeichnet.

3. Für welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen?
$$\text{(a)}\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2+1}, \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$$
Bestimmen Sie die Summe der zweiten Reihe.

4. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = (z^2-1)e^{(z-1)^{-1}}$ um $z_0 = 1$ in eine Laurentreihe und geben Sie das maximale Konvergenzgebiet an.

Bitte wenden!

5. Sei f holomorph im Gebiet D, $z \in D$ und $r > 0$ so dass $U_r(z) \subset D$. Zeigen Sie: $f(z)$ ist gleich dem „arithmetischen Mittel“ der Funktionswerte von f auf $\partial U_r(z)$, d.h.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt.$$

6. (**Zusatzaufgabe**) Gibt es im Gebiet

   (a) $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 2\}$ (b) $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 3\}$

   eine holomorphe Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften $f(n^{-1}) = 0\,,\ n = 1, 2, \ldots\,,$ und $f(2) = 2\,.$

7. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{1 + x^2}\,dx$ für $\alpha > 0$ und (**Zusatzaufgabe**) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,.$

8. Man bestimme das Bild des Kreisringes $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ unter der Abbildung

$$w(z) = \frac{z}{z - 1}\,.$$

   Welche Menge wird durch w auf die offene Einheitskreisscheibe abgebildet?

Punktbewertung der einzelnen Aufgaben:

1		**2**	**3**		**4**	**5**	**6**	**7**		**8**
a	b		a	b			**Z**		**Z**	
2	3	5	3	3	4	3	2	5	2	4

Gesamtpunktzahl: 32+4Z

Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0
Punkte	30	29	27	25	24	21	19	17	14	13