

# Probeklausur Funktionentheorie

**Arbeitszeit: 120 Minuten**

1. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  der Funktion  $f(z) = ze^{-z^2}$ ,  $z = x + iy$ .
2. Es sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet.
  - (a) Wann nennt man eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  im Punkt  $z_0 \in G$  differenzierbar und wann in  $z_0$  holomorph?
  - (b) In welchen Punkten der komplexen Ebene ist die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z \operatorname{Re} z$  differenzierbar?

3. Bestimmen Sie das maximale (offene) Konvergenzgebiet der Reihe

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^n = 1 + 2 \frac{z-1}{z+1} + 2 \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^2 + \dots$$

Wie lautet dort ihre Summenfunktion?

4. Entwickeln Sie die Funktion  $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$  nach Potenzen von  $z$  und nach Potenzen von  $z - 1$ . Geben Sie jeweils das maximale (offene) Konvergenzgebiet der Reihen an.
5. Entwickeln Sie die Funktion  $f(z) = (z^2 - 1)e^{(z-1)^{-1}}$  um  $z_0 = 1$  in eine Laurent-Reihe und geben Sie das maximale (offene) Konvergenzgebiet an.
6. Berechnen Sie folgende Integrale (Ergebnisse in der Form  $z = x + iy$ ):

(a)  $\int_{\Gamma_1} |z|^2 dz$ ,  $\Gamma_1$  - oberer Halbkreis von 2 nach 0 mit dem Mittelpunkt 1 und Radius 1

(b)  $\int_{|z-1|=4} \frac{\sin z}{z - i} dz$

(c)  $\int_{|z-1|=a} \frac{z dz}{(z+2)(z-2i)^2}$  für die Fälle  $a = 1$  und  $a = 5$

7. Berechnen Sie  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x) dx}{1+x^2}$  für  $\alpha > 0$ .
8. Mit  $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  bezeichnen wir den Hauptzweig des Logarithmus. Berechnen Sie unter Verwendung des Hauptzweiges des Logarithmus die Potenz  $(\operatorname{Log} i)^i$  in der trigonometrischen Form  $r e^{i\varphi}$ .
9. Bestimmen Sie das Bild des Kreisringes  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$  unter der Abbildung

$$w = f(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Welche Menge wird durch  $f$  auf die offene Einheitskreisscheibe abgebildet?

Punktbewertung der einzelnen Aufgaben:

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b>a</b>	<b>b</b>				<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	
2	2	2	3	5	4	3	2	3

Gesamtpunktzahl: 35

Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0
Punkte	34	32	30	28	26	23	21	19	16	14