Probeklausur Funktionentheorie am 16.01.2008

Arbeitszeit: 90 Minuten

1. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil $u(x, y)$ und $v(x, y)$ der Funktion $f(z) = ze^{-z^2}$, $z = x + \mathbf{i}y$.

2. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.
   (a) Wann nennt man eine Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ im Punkt $z_0 \in G$ differenzierbar und wann in z_0 holomorph?
   (b) In welchen Punkten der komplexen Ebene ist die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z \operatorname{Re} z$ differenzierbar?

3. Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der Reihe $1 + 2\frac{z-1}{z+1} + 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \cdots$. Wie lautet dort ihre Summenfunktion?

4. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$ nach Potenzen von z und nach Potenzen von $z - 1$. Geben Sie jeweils das maximale Konvergenzgebiet der Reihen an. (Randpunkte des Konvergenzgebietes sind **nicht** zu betrachten!)

5. Berechnen Sie folgende Integrale (Ergebnisse in der Form $z = x + \mathbf{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$):
   (a) $\int_{\Gamma_1} |z|^2 \, dz$, Γ_1 - oberer Halbkreis von 2 nach 0 mit dem Mittelpunkt 1 und Radius 1
   (b) $\int_{\Gamma_2} \frac{z}{\overline{z}} \, dz$, Γ_2 - Viertelkreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ von 2 nach $2\mathbf{i}$
   (c) $\int_{|z-1|=4} \frac{\sin z}{z - \mathbf{i}} \, dz$
   (d) $\int_{|z-1|=a} \frac{z \, dz}{(z+2)(z-2\mathbf{i})^2}$ für die Fälle $a = 1$ und $a = 5$.

6. Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x) \, dx}{1 + x^2}$ für $\alpha > 0$.

7. Es seien $G \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ ein Gebiet, $\overline{G} \cap \mathbb{R} = [a, b]$, $a < b$, und $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph sowie $f : G \cup (a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, wobei $f(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in (a, b)$. Wir definieren $G^* = G \cup (a, b) \cup \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \overline{\zeta} \in G\right\}$ und

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & : \quad z \in G \cup (a, b), \\ \overline{f(\overline{z})} & : \quad \overline{z} \in G. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass $g : G^* \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)

   Hinweis: Nach dem Satz von Morera ist $f : G^* \longrightarrow \mathbb{C}$ genau dann holomorph, wenn $\int_\Delta f(z) \, dz = 0$ gilt für alle Dreieckskurven $\Delta \subset G^*$.

Punktbewertung der einzelnen Aufgaben:

1	**2**		**3**	**4**	**5**				**6**	**7**
	a	b			a	b	c	d		
2	2	2	3	5	3	2	2	3	5	5

Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0
Punkte	32	31	29	27	25	22	20	18	15	13