Skript zur Vorlesung

Vertiefende Kapitel zur Funktionalanalysis

Sommersemester 2017

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] P. S. Alexandroff, Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen, Berlin, 1965.

[2] P. Junghanns, Funktionalanalysis - Skript zur Vorlesung WS 2015/16, http://www-user.tu-chemnitz.de/~peju/skripte/lehre/fa.html

[3] M. M. Rao, Mearure Theory and Integration, New York, Basel, 2004.

[4] M. Schechter, Principles of Functional Analysis, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002.

Kapitel 1

Fredholm-Operatoren

1.1 Die Fredholm'sche Alternative (vgl. [2, Kapitel 2])

Es seien hier, falls nichts Anderes erwähnt wird, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, ... Banachräume. Die Menge der linearen Operatoren $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ bezeichnen wir mit $L(X,Y)$, die der linearen und beschränkten Operatoren $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ mit $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Mit

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} := \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbf{X},\ \|x\| \le 1\}$$

wird $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ zu einem Banachraum. Mit $N(A)$ und $R(A)$ bezeichnen wir den Nullraum bzw. das Bild des Operators $A \in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$,

$$N(A) = \{x \in \mathbf{X} : Ax = \theta\} \quad \text{und} \quad R(A) = \{Ax : x \in \mathbf{X}\}\ .$$

Bekanntlich ist der **adjungierte Operator** $A^* : \mathbf{Y}^* \longrightarrow \mathbf{X}^*$, $g \mapsto A^*g$ zu $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ definiert durch $(A^*g)(x) = g(Ax)\ \forall\, x \in \mathbf{X}$, $\forall\, g \in \mathbf{Y}^*$. Den Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ nennt man **Fredholmoperator**, wenn er ein abgeschlossenes Bild $R(A) \subset \mathbf{Y}$ hat und die Nullräume $N(A)$ und $N(A^*)$ endlichdimensional sind. Die Menge aller Fredholm-Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ bezeichnen wir mit $\Phi(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Für $A \in \Phi(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ heißt die Zahl

$$\kappa(A) = \dim N(A) - \dim N(A^*)$$

Fredholmindex oder auch nur **Index** des Operators A. Mit $\mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ bezeichnen wir die Teilmenge (den linearen Teilraum) von $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ der kompakten Operatoren. Im Fall $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ schreiben wir $\mathcal{L}(\mathbf{X})$, $\mathcal{K}(\mathbf{X})$ und $\Phi(\mathbf{X})$ statt $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{X})$, $\mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{X})$ und $\Phi(\mathbf{X},\mathbf{X})$. Das **Spektrum** $\sigma(A)$ eines Operators $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ besteht aus allen $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $A - \lambda I : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ nicht invertierbar ist. Wir erinnern an folgende Aussagen, die die Fredholm'sche Alternative beinhalten.

Satz 1.1 ([2], Folg. 2.13, Bem. 2.14, Satz 2.16) *Sind $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ und $A = I - T$, so gilt $A \in \Phi(\mathbf{X})$ und $\kappa(A) = 0$. Ferner besteht $\sigma(T) \setminus \{0\}$ aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten, deren einzig möglicher Häufungspunkt die Null ist.*

Die Beziehung $R(I-T) = N((I-T)^*)^\perp$ (vgl. die Überlegungen vor Lemma 1.7) liefert zusammen mit Satz 1.1 die eigentliche **Fredholm'sche Alternative**:

$$N(I-T) = \{\Theta\} \iff R(I-T) = \mathbf{X}\,.$$

1.2 Projektoren und direkte Komplemente

Ein Operator $P \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ heißt **Projektor**, wenn $P^2 = P$ gilt. Auch $Q = I - P$ ist dann ein Projektor, der sog. **komplementäre Projektor** zu P. Offenbar gilt $R(P) = N(Q)$. Hieraus folgt insbesondere, dass $R(P)$ stets abgeschlossen ist.

Sind $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ lineare Teilräume von $\mathbf{X}$ mit $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = \{x_1 + x_2 : x_j \in \mathbf{X}_j\} = \mathbf{X}$ und $\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2 = \{\Theta\}$, so sagen wir, dass $\mathbf{X}$ die **direkte Summe** von $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ ist, und schreiben dafür $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \dot{+} \mathbf{X}_2$. Jedes $x \in \mathbf{X}$ ist dann eindeutig in der Form $x = x_1 + x_2$ mit $x_j \in \mathbf{X}_j$ darstellbar und der Operator $P : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, $x = x_1 + x_2 \mapsto x_1$ ist idempotent, d.h., $P^2 = P$, mit $R(P) = \mathbf{X}_1$ und $N(P) = \mathbf{X}_2$.

Ist $P \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ ein Projektor, so folgt offenbar $\mathbf{X} = N(P) \dot{+} R(P)$. Umgekehrt gilt folgende Aussage.

Lemma 1.2 *Sind* $\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2 = \{\Theta\}$ *und* $\overline{\mathbf{X}_j} = \mathbf{X}_j$, $j = 1, 2$, *sowie* $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \dot{+} \mathbf{X}_2$, *so gilt* $P \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$.

Folgerung 1.3 *Sind* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \subset \mathbf{X}$ *abgeschlossene lineare Teilräume mit* $\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2 = \{\Theta\}$, *so ist* $\mathbf{X}_1 \dot{+} \mathbf{X}_2$ *genau dann abgeschlossen in* $\mathbf{X}$, *wenn* $P : \mathbf{X}_1 \dot{+} \mathbf{X}_2 \longrightarrow \mathbf{X}_1$, $x_1 + x_2 \longrightarrow x_1$ *stetig ist.*

Ist $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{X}$, so nennt man jeden abgeschlossenen linearen Teilraum $\mathbf{N} \subset \mathbf{X}$ mit $\mathbf{X} = \mathbf{M} \dot{+} \mathbf{N}$ ein **direktes Komplement** von $\mathbf{M}$ in $\mathbf{X}$.

Lemma 1.4 *Ist* $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ *ein linearer Teilraum mit* $\dim \mathbf{M} < \infty$, *so extistiert ein direktes Komplement von* $\mathbf{M}$ *in* $\mathbf{X}$.

Lemma 1.5 *Sind* $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \subset \mathbf{X}$ *lineare Teilräume von* $\mathbf{X}$ *mit* $\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2 = \{\Theta\}$, $\overline{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{X}_1$ *und* $\dim \mathbf{X}_2 < \infty$, *so ist* $\mathbf{X}_1 \dot{+} \mathbf{X}_2$ *abgeschlossen in* $\mathbf{X}$.

Lemma 1.6 *Zu jedem linear unabhängigen System* $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset \mathbf{X}^*$ *existieren* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{X}$ *mit* $f_j(x_k) = \delta_{jk}$, $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Für $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ und $\mathbf{N} \subset \mathbf{X}^*$ definieren wir $\mathbf{M}^\perp := \{f \in \mathbf{X}^* : f(x) = 0 \; \forall\, x \in \mathbf{M}\}$ und ${}^\perp\mathbf{N} := \{x \in \mathbf{X} : f(x) = 0 \; \forall\, f \in \mathbf{N}\}$. Es ist stets $\mathbf{M}^\perp = (\overline{\mathbf{M}})^\perp$. Ist $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ ein linearer Teilraum, so gilt ${}^\perp(\mathbf{M}^\perp) = \overline{\mathbf{M}}$. Ist $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, so gilt $R(A)^\perp = N(A^*)$.

Lemma 1.7 *Ist* $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ *ein abgeschlossener linearer Teilraum mit* $n := \dim \mathbf{M}^\perp < \infty$, *so existiert ein linearer Teilraum* $\mathbf{N} \subset \mathbf{X}$ *mit* $\dim \mathbf{N} = n$ *und* $\mathbf{X} = \mathbf{M} \dot{+} \mathbf{N}$.

Lemma 1.8 *Es seien* $\mathbf{X} = \mathbf{M} \dot{+} \mathbf{X}_0$, $\dim \mathbf{M} < \infty$ *und* $\overline{\mathbf{X}_0} = \mathbf{X}_0$. *Ist dann* $\mathbf{X}_1 \subset \mathbf{X}$ *ein linearer Teilraum mit* $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}_1$, *so ist* $\mathbf{X}_1$ *abgeschlossen.*

1.3 Eigenschaften von Fredholm-Operatoren

Sei $A \in \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Nach Lemma 1.4 existiert ein abgeschlossener linearer Teilraum $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ mit $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \dot{+} N(A)$. Wir definieren $\widetilde{A} : \mathbf{X}_0 \longrightarrow R(A)$, $x_0 \mapsto Ax_0$. Nach dem Satz von Banach existiert $\widetilde{A}^{-1} \in \mathcal{L}(R(A), \mathbf{X}_0)$. Wegen $R(A)^\perp = N(A^*)$ existiert nach Lemma 1.7 ein linearer Teilraum $\mathbf{Y}_0 \subset \mathbf{Y}$ mit $\dim \mathbf{Y}_0 = \dim N(A^*)$ und $\mathbf{Y} = R(A) \dot{+} \mathbf{Y}_0$. Wir definieren $P : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Y}$,

$y_1 + y_2 \mapsto y_2$, $y_1 \in R(A)$, $y_2 \in \mathbf{Y}_0$. Aus Lemma 1.2 folgt $P \in \mathcal{L}(\mathbf{Y})$. Somit ist der Operator $A_0 = \widetilde{A}^{-1}(I - P) \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ wohldefiniert. Dabei gilt

$$A_0 A x = x \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_0 \quad \text{und} \quad A\, A_0 y = y \quad \forall\, y \in R(A)\,.$$

Satz 1.9 *Ist $A \in \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, so existieren abgeschlossene lineare Teilräume $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}_0 \subset \mathbf{Y}$ mit $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \dot{+} N(A)$ und $\mathbf{Y} = R(A) \dot{+} \mathbf{Y}_0$ sowie $\dim \mathbf{Y}_0 = \dim N(A^*)$. Ferner exisatiert ein Operator $A_0 \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$, so dass die Operatoren $I - A_0 A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ und $I - A\, A_0 \in \mathcal{L}(\mathbf{Y})$ die Eigenschaften $R(I - A_0 A) = N(A)$ und $R(I - A\, A_0) = \mathbf{Y}_0$ haben.*

Satz 1.10 *Es sei $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Existieren Operatoren $B_1, B_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ mit $I - B_1 A \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ und $I - A\, B_2 \in \mathcal{K}(\mathbf{Y})$, so folgt $A \in \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.*

1.4 Beweis des Satzes über die Fredholm'sche Alternative

Zur Vorbereitung des Beweises des Satzes 1.1 beweisen wir folgende Aussagen (vgl. auch [2, Abschnitte 2.2-2.5]). Es sei bemerkt, dass nach wie vor $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ stets als Banachräume vorausgesetzt sind.

Lemma 1.11 *Das Bild eines Operators $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ mit $N(A) = \{\Theta\}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn eine positive Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\|x\| \le c\,\|Ax\|$ für alle $x \in \mathbf{X}$ gilt.*

Lemma 1.12 *Das Bild eines Operators $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ist genau dann abgeschlossen, wenn eine positive Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\operatorname{dist}(x, N(A)) \le c\,\|Ax\|$ für alle $x \in \mathbf{X}$ gilt.*

Beweis. Wir definieren $\widetilde{A} : \mathbf{X}/N(A) \longrightarrow \mathbf{Y}$, $[x]_{N(A)} \mapsto Ax$. Es folgt $N(\widetilde{A}) = \left\{[\Theta]_{N(A)}\right\}$ und $R(\widetilde{A}) = R(A)$. Die Anwendung von Lemma 1.11 liefert die Existenz einer positiven Konstanten c mit

$$\left\|[x]_{N(A)}\right\| \le c\,\|Ax\| \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,,$$

wobei definitionsgemäß

$$\left\|[x]_{N(A)}\right\| = \inf\left\{\|x + z\| : z \in N(A)\right\} = \operatorname{dist}(x, N(A))$$

gilt und somit das Lemma bewiesen ist. □

Lemma 1.13 *Sind $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{X}$ mit $\mathbf{X}_0 \ne \mathbf{X}$ und $\theta \in (0,1)$, so exstiert ein $x_\theta \in \mathbf{X}$ mit $\|x_\theta\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x_\theta, \mathbf{X}_0) \ge \theta$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $x_1 \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{X}_0$ mit $d := \operatorname{dist}(x_1, \mathbf{X}_0) > 0$. Wir setzen $\varepsilon := \dfrac{d(1-\theta)}{\theta}$ und erhalten die Existenz eines $x_0 \in \mathbf{X}_0$ mit $\|x_1 - x_0\| < d + \varepsilon = \frac{d}{\theta}$. Für $x_\theta := \|x_1 - x_0\|^{-1}(x_1 - x_0)$ folgt $\|x_\theta\| = 1$ und

$$\|x - x_\theta\| = \frac{\big\|\, \|x_1 - x_0\|\, x + x_0 - x_1 \big\|}{\|x_1 - x_0\|} \ge \frac{d}{\|x_1 - x_0\|} > \theta \quad \forall\, x \in \mathbf{X}_0\,,$$

und das Lemma ist bewiesen. □

Lemma 1.14 *Die Einheitsspäre* $S_{\mathbf{X}} = \{x \in \mathbf{X} : \|x\| = 1\}$ *ist genau dann kompakt, wenn* $\mathbf{X}$ *endlichdimensional ist.*

Beweis. Wir zeigen, dass aus der Kompaktheit von $S_{\mathbf{X}}$ die Endlichdimensionalität von $\mathbf{X}$ folgt. Dazu wählen wir $x_1 \in S_{\mathbf{X}}$ und setzen $\mathbf{X}_1 = \operatorname{span}\{x_1\}$. Ist $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}$, so sind wir fertig. Sonst gibt es ein $x_2 \in S_{\mathbf{X}}$ mit $\operatorname{dist}(x_2, \mathbf{X}_1) \ge \frac{1}{2}$. Ist $\mathbf{X}_2 := \operatorname{span}\{x_1, x_2\} \ne \mathbf{X}$, so gibt es ein $x_3 \in S_{\mathbf{X}}$ mit $\operatorname{dist}(x_3, \mathbf{X}_2) \ge \frac{1}{2}$, d.h., $\|x_3 - x_1\| \ge \frac{1}{2}$ und $\|x_3 - x_2\| \ge \frac{1}{2}$. Dieser Prozess muss wegen der Kompaktheit von $\mathbf{S}_{\mathbf{X}}$ abbrechen, da sonst eine Punktfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $S_{\mathbf{X}}$ existieren würde, die keine konvergente Teilfolge besitzt. □

Lemma 1.15 *Sind* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *und* $R(A)$ *abgeschlossen, so gilt* $R(A^*) = N(A)^{\perp}$, *so dass auch* $R(A^*)$ *abgeschlossen ist.*

Beweis. Aus $f \in R(A^*)$ folgt die Existenz eines $g \in \mathbf{Y}^*$ mit $A^*g = f$. Es gilt dann für alle $x \in N(A)$ die Beziehung $f(x) = g(Ax) = g(\Theta) = 0$, also $f \in N(A)^{\perp}$, so dass $R(A^*) \subset N(A)^{\perp}$ gilt. Für ein beliebiges $f \in N(A)^{\perp}$ definieren wir $g(y) = f(x) \; \forall\, y = Ax \in R(A)$. Diese Definition ist korrekt, da aus $Ax_1 = Ax_2$ folgt $x_1 - x_2 \in N(A)$ und somit $f(x_1) = f(x_2)$. Für alle $z \in N(A)$ gilt (mit $y = Ax$)

$$|g(y)| = |f(x)| = |f(x - z)| \le \|f\| \, \|x - z\| \, ,$$

also wegen Lemma 1.12

$$|g(y)| \le \|f\| \operatorname{dist}(x, N(A)) \le c \, \|f\| \, \|y\| \, .$$

Damit ist g stetig auf $R(A)$. Es sei $\widetilde{g} \in \mathbf{Y}^*$ eine Fortsetzung von g auf $\mathbf{Y}$. Es folgt für beliebige $x \in \mathbf{X}$ die Bezeihung $\widetilde{g}(Ax) = g(Ax) = f(x)$, d.h., $f = A^*\widetilde{g} \in R(A^*)$. □

Es seien nun $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ und $A = I - T$. Wir zeigen,

- dass mit $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ auch $T^* \in \mathcal{K}(\mathbf{X}^*)$ gilt,

  Beweis. Wir erinnern daran, dass in einem vollständigen metrischen Raum eine Menge genau dann relativ kompakt ist, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz zu dieser Menge A existiert, welches auch so gewählt werden kann, dass es Teilmenge der Menge A ist. Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existieren $x_1, \ldots, x_m \in K_1^{\mathbf{X}}(\theta) := \{x \in \mathbf{X} : \|x\| \le 1\}$ mit

  $$\forall\, x \in K_1^{\mathbf{X}}(\Theta) \; \exists\, k \in \{1, \ldots, m\} : \|Tx - Tx_k\| < \frac{\varepsilon}{4} \, .$$

  Für $g \in \mathbf{Y}^*$ definieren wir $Bg := \left[\begin{array}{ccc} g(Tx_1) & \ldots & g(Tx_m) \end{array} \right]^T \in \mathbb{C}^m$. Es folgt, dass $B\left(U_1^{\mathbf{X}^*}(\Theta)\right)$ relativ kompakt ist als beschränkte Menge in einem endlichdimensionalen Raum. Somit existieren $g_1, \ldots, g_n \in K_1^{\mathbf{X}^*}(\Theta)$ mit

  $$\forall\, g \in K_1^{\mathbf{X}^*}(\Theta) \; \exists\, j \in \{1, \ldots, n\} : \|Bg - Bg_j\| < \frac{\varepsilon}{4}$$

  oder $|g(Tx_k) - g_j(Tx_k)| < \frac{\varepsilon}{4}$, $k = 1, \ldots, m$. Somit gilt für alle $x \in U_1^{\mathbf{X}}(\Theta)$ und alle $g \in K_1^{\mathbf{X}^*}(\theta)$

  $$\begin{aligned} |(T^*g)(x) - (T^*g_j)(x)| &= |g(Tx) - g_j(Tx)| \\ &\le |g(Tx) - g(Tx_k)| + |g(Tx_k) - g_j(Tx_k)| + |g_j(Tx_k) - g_j(Tx)| \\ &\le \|Tx - Tx_k\| + \frac{\varepsilon}{4} + \|Tx_k - Tx\| \le \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon \, . \end{aligned}$$

  Also ist $\{T^*g_j : j = 1, \ldots, n\}$ ein ε-Netz für $T^*\left(K_1^{\mathbf{X}^*}(\Theta)\right)$. □

- dass $R(A)$ abgeschlossen ist und dass $N(A)$ genau dann trivial ist, wenn dies auch für $N(A^*)$ gilt,

  Beweis. Annahme: $\exists\, x_n \in \mathbf{X} : \|Ax_n\| > 0\,,\ \mathrm{dist}(x_n, N(A)) = c_n \|Ax_n\|\ ,\ c_n \longrightarrow \infty\,.$ Wir setzen $x_n^0 := \dfrac{x_n}{c_n \|Ax_n\|}$, so dass $\mathrm{dist}(x_n^0, N(A)) = 1$ und $\left\|Ax_n^0\right\| = \dfrac{1}{c_n} \longrightarrow 0$ folgt. Somit gibt es $x_n^1 \in N(A)$ mit $\left\|x_n^0 - x_n^1\right\| \le 2\,.$ Für $z_n := x_n^0 - x_n^1$ folgt

  $$\mathrm{dist}(z_n, N(A)) = 1\,,\ \|z_n\| \le 2\,,\ \|Az_n\| \longrightarrow 0\,.$$

  Wegen der Kompaktheit von T existiert eine Teilfolge $\left(z_n^1\right)_{n=1}^\infty$ von $(z_n)_{n=1}^\infty$ mit $Tz_n^1 \longrightarrow z\,.$ Es folgt $z_n^1 = Tz_n^1 + Az_n^1 \longrightarrow z$ und somit $Az_n^1 \longrightarrow Az = \Theta$, d.h., $z \in N(A)$, im Widerspruch zu $\left\|z_n^1 - z\right\| \ge \mathrm{dist}(z_n^1, N(A)) = 1\,.$ Aus Lemma 1.12 folgt somit die Abgeschlossenheit von $R(A)\,.$

  Es sei nun $\dim N(A^*) = 0\,.$ Daraus folgt $R(A) = {}^\perp\left(R(A)^\perp\right) = {}^\perp N(A^*) = \mathbf{X}\,.$ Annahme: $\exists\, x_1 \in N(A) \setminus \{\Theta\}$. Dann existieren $x_{n+1} \in \mathbf{X}$ mit $Ax_{n+1} = x_n\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$ Wegen $A^n x_n = A^{n-1}x_{n-1} = \ldots = Ax_1 = \Theta$ und $A^{n-1}x_n = \ldots = Ax_2 = x_1 \ne \Theta$ steht in der Inklusionskette

  $$N(A) \subset N(A^2) \subset \ldots \subset N(A^n) \subset \ldots$$

  nirgends die Gleichheit. Nach Lemma 1.13 gibt es also $z_n \in N(A^n)$ mit $\|z_n\| = 1$ und $\mathrm{dist}(z_n, N(A^{n-1})) \ge \frac{1}{2}\,.$ Somit hat Tz_n eine konvergente Teilfolge. Andererseits gilt aber für $n > m$

  $$\|Tz_n - Tz_m\| = \|z_n - (z_m - Az_m + Az_n)\| \ge \frac{1}{2}\,.$$

  Also ist $\dim N(A) = 0\,.$

  Es sei nun umgekehrt $\dim N(A) = 0\,.$ Mit Lemma 1.15 folgt $R(A^*) = N(A)^\perp = \mathbf{X}^*\,.$ Da außerdem $T^* \in \mathcal{K}(\mathbf{X}^*)$ gilt, ergibt sich wie oben $\dim N(A^*) = 0\,.$ □

- dass $N(A)$ und $N(A^*)$ endlichdimensional sind,

  Beweis. Wir schreiben $S_{N(A)}\ :\ 0\,\{x \in N(A) : \|x\| = 1\}$. Ist nun $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von Punkten aus $S_{N(A)}$, so exisieren $x_{n_k} \in S_{N(A)}\,,\ n_1 < n_2 < \ldots$, mit $Tx_{n_k} \longrightarrow x$ für $k \longrightarrow \infty\,.$ Es folgt $Ax_{n_k} = \Theta = x_{n_k} - Tx_{n_k}$ und somit $x_{n_k} \longrightarrow x\,.$ Also ist $S_{N(A)}$ kompakt und somit nach Lemma 1.14 $N(A)$ endlichdimensional. Da auch $T^* \in \mathcal{K}(\mathbf{X}^*)$ gilt, ist $N(A^*)$ ebenfalls endlichdimensional. □

- dass $\dim N(A) = \dim N(A^*)$ gilt,

- dass $\sigma(T)$ aus höchsten abzählbar vielen Eigenwerten besteht, die sich nur in der Null häufen können.

1.5 Weitere Eigenschaften von $\Phi(\mathbf{X},\mathbf{Y})$

Bemerkung Die Sätze 1.9 und 1.10 zeigen, dass ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ genau dann zu $\Phi(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ gehört, wenn ein Operator $B \in \mathcal{L}(\mathbf{Y},\mathbf{X})$ existiert, so dass $I - BA$ und $I - AB$ kompakte Operatoren in $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{Y}$ sind.

Satz 1.16 *Sind $A \in \Phi(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ und $B \in \Phi(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$, so ist $BA \in \Phi(\mathbf{X},\mathbf{Z})$, und es gilt $\kappa(BA) = \kappa(A) + \kappa(B)$.*

Folgerung 1.17 *Sind $A \in \Phi(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, $B \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ und $I - BA \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ sowie $I - AB \in \mathcal{K}(\mathbf{Y})$, so folgt $B \in \Phi(\mathbf{Y},\mathbf{X})$ und $\kappa(B) = -\kappa(A)$.*

Satz 1.18 *Aus* $A \in \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *und* $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *folgt* $A + T \in \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *und* $\kappa(A + T) = \kappa(A)$.

Satz 1.19 *Für jeden Fredholm-Operator* $A \in \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *existiert eine reelle Zahl* $r > 0$, *so dass aus* $T \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *und* $\|T\|_{\mathbf{X} \to \mathbf{Y}} < r$ *folgt* $A + T \in \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *und* $\kappa(A + T) = \kappa(A)$.

Kapitel 2

Banachalgebren

2.1 Grundlagen

Definition 2.1 *Ein Banachraum $\mathcal{A}$ über $\mathbb{C}$ wird* **Banachalgebra** *genannt, wenn $\mathcal{A}$ nicht nur aus dem Nullelement besteht, eine Abbildung $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, $(a,b) \mapsto ab$ erklärt ist und ein Element $e \in \mathcal{A}$ existiert, so dass folgende Axiome erfüllt sind: $\forall\, a,b,c \in \mathcal{A}$ und $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt*

(B1) $(\alpha a + \beta b)c = \alpha(ac) + \beta(bc)\,,\ c(\alpha a + \beta b) = \alpha(ca) + \beta(cb)\,,$

(B2) $a(bc) = (ab)c\,,$

(B3) $ea = ae = a\,,$

(B4) $\|ab\| \le \|a\|\,\|b\|\ .$

Man spricht von einer **kommutativen Banachalgebra** *$\mathcal{A}$, wenn $ab = ba$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt.*

Das Element e heißt **Einselement** und ist eindeutig bestimmt. Ein Element $a \in \mathcal{A}$ nennt man **regulär**, wenn ein Element b existiert, so dass $ab = ba = e$ gilt. Das Element b ist dann eindeutig bestimmt, wird mit a^{-1} bezeichnet und **Inverses** von a genannt. Die Menge der regulären Elemente von $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $G\mathcal{A}$. Unter der **Resolventenmenge** $\rho(a)$ eines Elementes $a \in \mathcal{A}$ versteht man die Menge der Skalare $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $a - \lambda e$ regulär ist. Das **Spektrum** $\sigma(a)$ ist definiert als $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$.

Beispiel 2.2 *Ist $\mathbf{X}$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$, so ist $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ eine Banachalgebra.*

Beispiel 2.3 *Ist $\mathbf{X}$ ein kompakter metrischer Raum, so ist der Raum $\left(\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty\right)$ der komplexwertigen stetigen Funktionen auf $\mathbf{X}$ mit $\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in \mathbf{X}\}$ und der punktweisen Multiplikation $(fg)(x) := f(x)g(x)$ eine kommutative Banachalgebra.*

Satz 2.4 *Es seien $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $a \in \mathcal{A}$.*

(a) *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ konvergent, so ist $e - a \in G\mathcal{A}$ und es gilt*

$$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\,. \tag{2.1}$$

(b) *Ist* $\|a\| < 1$, *so ist* $e - a \in G\mathcal{A}$ *und es gilt* (2.1). *Die Menge* $G\mathcal{A}$ *ist offen in* $\mathcal{A}$, *und die Abbildung* $G\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, $a \mapsto a^{-1}$ *ist stetig.*

(c) *Der Grenzwert* $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$ *existiert und ist endlich. Dabei gilt*

$$r(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} \qquad (\textbf{Spektralradius}\ \textit{von}\ a).$$

(d) *Für* $|\zeta| > r(a)$ *ist* $\zeta e - a$ *regulär, und es gilt*

$$(\zeta e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} a^n .$$

(e) *Die Resolventenmenge* $\rho(a)$ *ist eine offene Menge in* $\mathbb{C}$.

Beweis. (c) Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| > \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} =: r_0(a)$. Dann existieren ein $\delta \in (0,1)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le \delta|\zeta|\ \forall\, n \ge n_0$. Für $b := \zeta^{-1}a$ gilt $\|b^n\| = |\zeta|^{-n}\|a^n\| \le \delta^n$, $n \ge n_0$, d.h., $\sum_{n=0}^{\infty} \|b^n\| < \infty$. Aus (a) folgt $(e-b)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n$ und somit $\zeta e - a = \zeta(e-b) \in G\mathcal{A}$, d.h., $\zeta \in \rho(a)$, wobei

$$(\zeta e - a)^{-1} = \zeta^{-1}(e-b)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} a^n . \tag{2.2}$$

Definieren wir $r(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$, so folgt $r(a) \le r_0(a) \le \|a\|$. Es seien nun $n \in \{2,3,\ldots\}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda^n \in \rho(a^n)$. Aus

$$a^n - \lambda^n e = b(a - \lambda e) = (a - \lambda e)b , \quad \text{d.h.,} \quad (a^n - \lambda^n e)^{-1} b(a - \lambda e) = (a - \lambda e) b (a^n - \lambda^n e)^{-1}$$

mit $b = a^{n-1} + \lambda a^{n-2} + \ldots + \lambda^{n-1} e$ folgt die Existenz von

$$(a - \lambda e)^{-1} = b(a^n - \lambda^n e)^{-1} = (a^n - \lambda^n e)^{-1} b ,$$

d.h., $\lambda \in \rho(a)$. Aus $\lambda \in \sigma(a)$ folgt also auch $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ und somit $|\lambda|^n \le \|a^n\|$ bzw. $|\lambda| \le \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Somit ergibt sich $r(a) \le \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Aus (b) folgen sofort (e) und die Stetigkeit der Abbildung $f : \rho(a) \longrightarrow \mathcal{A}$, $\lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1}$. Es gilt sogar

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda - \lambda_0}[f(\lambda) - f(\lambda_0)] &= \frac{1}{\lambda - \lambda_0}(a - \lambda e)^{-1}\left[(a - \lambda_0 e) - (a - \lambda e)\right](a - \lambda_0 e)^{-1} \\ &= f(\lambda)(f(\lambda_0) \stackrel{\lambda \longrightarrow \lambda_0}{\longrightarrow} f(\lambda_0)^2 = (a - \lambda_0 e)^{-2} . \end{aligned}$$

Für beliebiges $\varphi \in \mathcal{A}^*$ definieren wir $\psi : \rho(a) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto \varphi(f(\lambda)) = \varphi\left(((a - \lambda e)^{-1}\right)$. Es folgt

$$\frac{\psi(\lambda) - \psi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \varphi\left(\frac{1}{\lambda - \lambda_0}[f(\lambda) - f(\lambda_0)]\right) \stackrel{\lambda \longrightarrow \lambda_0}{\longrightarrow} \varphi\left((a - \lambda_0 e)^{-2}\right) .$$

Damit ist $\psi : \rho(a) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dabei gilt wegen (2.2) und der Holomorphie von $\psi(\lambda)$ auf $\rho(a)$

$$\psi(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \varphi(a^n) , \quad |\lambda| > r(a) .$$

Es folgt $j_{\lambda^{-n}a^n}(\varphi) := \varphi(\lambda^{-n}a^n) \longrightarrow 0$ für $n \longrightarrow \infty$, $|\lambda| > r(a)$ und $\varphi \in \mathcal{A}^*$. Also sind die Funktionale $j_{\lambda^{-n}a^n} : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ gleichmäßig beschränkt, so dass

$$\left\|\lambda^{-n}a^n\right\|_{\mathcal{A}} = \|j_{\lambda^{-n}a^n}\|_{\mathcal{A}^{**}} \le c(\lambda)\,, \quad |\lambda| > r(a)\,.$$

Es folgt

$$\|a^n\| \le |\lambda|^n c(\lambda) \quad \text{bzw.} \quad \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le |\lambda| \sqrt[n]{c(\lambda)}\,.$$

Folglich gilt $r_0(a) \le |\lambda|$ für alle $|\lambda| > r(a)$. Das ergibt letztendlich

$$r(a) \le \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \le \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = r_0(a) \le r(a)\,,$$

also $r(a) = \lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Aus (2.2) folgt damit auch (d). □

Satz 2.5 *Ist $p(\zeta)$ ein Polynom in ζ, so gilt für jedes $a \in \mathcal{A}$*

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}\ .$$

Beweis. Seien $\lambda \in \sigma(a)$ und $p(z) - p(\lambda) = (z - \lambda)q(z)$, so dass $p(a) - p(\lambda)e = (a - \lambda e)q(a) = q(a)(a - \lambda e)$. Ist also $p(\lambda) \in \rho(p(a))$, so gilt auch $\lambda \in \rho(a)$, d.h., $p(\sigma(a)) \subset \sigma(p(a))$. Es sei nun $p(z) - \mu = \alpha_0(z - \mu_1)\dots(z - \mu_n)$, $\alpha_0 \ne 0$. Es folgt $p(a) - \mu e = \alpha_0(a - \mu_1 e)\dots(a - \mu_n e)$. Sind also alle $\mu_j \in \rho(a)$, so gilt $\mu \in \rho(p(a))$. Umgekehrt folgt aus $\mu \in \sigma(p(a))$ die Existenz eines $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mu_k \in \sigma(a)$. Daraus folgt dann $\mu = p(\mu_k) \in p(\sigma(a))$, d.h., $\sigma(p(a)) \subset p(\sigma(a))$.
□

Satz 2.6 *Für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist $\sigma(a)$ nicht leer.*

2.2 Kommutative Banachalgebren

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra. Ein lineares Funktional $m \in L(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ nennt man **multiplikativ**, wenn $m \ne \Theta$ und

$$m(ab) = m(a)m(b) \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}$$

gilt. Die Menge der linearen multiplikativen Funktionale auf $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $\mathbf{M}_{\mathcal{A}}$.

Lemma 2.7 *Für jedes $a \in \mathcal{A}$ gilt $\{m(a) : m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}\} \subset \sigma(a)$.*

Ein linearer Teilraum $\mathcal{N}$ von $\mathcal{A}$ heißt **Ideal**, wenn aus $a \in \mathcal{N}$ und $b \in \mathcal{A}$ folgt $ab \in \mathcal{N}$. Man nennt das Ideal $\mathcal{N}$ **maximal**, wenn jedes $a \in \mathcal{A}$ auf eindeutige Weise in der Form $a = a_0 + \lambda e$, $a_0 \in \mathcal{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, darstellbar ist.

Beispiel 2.8 *Ist $E_0 \subset \mathbf{E}$ eine Teilmenge des kompakten metrischen Raumes $\mathbf{E}$, so ist*

$$\mathcal{N}(E_0) = \{f \in \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C}) : f(x) = 0\,,\ x \in E_0\}$$

ein Ideal in $\Big(\mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty\Big)$. Dieses Ideal ist genau dann maximal, wenn E_0 aus genau einem Punkt $x_0 \in \mathbf{E}$ besteht.

Beispiel 2.9 *Ist $m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$, so ist $N(m) = \{a \in \mathcal{A} : m(a) = 0\}$ ein maximales Ideal.*

Satz 2.10 *Jedes Ideal $\mathcal{N} \neq \mathcal{A}$ ist in einem maximalen Ideal enthalten.*

Beispiel 2.9 kann man in gewisser Weise umkehren, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 2.11 *Ist $\mathcal{N} \neq \mathcal{A}$ ein Ideal, so existiert ein $m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$ mit der Eigenschaft $\mathcal{N} \subset N(m)$.*

Theorem 2.12 *Für jedes $a \in \mathcal{A}$ gilt $\sigma(a) = \{m(a) : m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}\}$.*

Wir listen noch einige Eigenschaften maximaler Ideale bzw. linearer multiplikativer Funktionale auf.

Satz 2.13 *In einer kommutativen Banachalgebra $\mathcal{A}$ gilt:*

(a) *Jedes maximale Ideal ist abgeschlossen.*

(b) *Aus $m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$ folgt $m \in \mathcal{A}^*$ und $\|m\| \leq 1$.*

(c) *Das Ideal $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{N} \neq \mathcal{A}$, ist genau dann maximal, wenn für jedes Ideal $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ mit $\mathcal{N} \neq \mathcal{M}$ und $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ folgt $\mathcal{M} = \mathcal{A}$.*

2.3 Die Gelfand-Transformation

Auch in diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra.

1. Ein geordnetes Paar $(\mathbf{X}, \mathcal{F})$ aus einer nichtleeren Menge $\mathbf{X}$ und einem System $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ von Teilmengen von $\mathbf{X}$ nennt man **topologischen Raum**, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

   (T1) $\emptyset, \mathbf{X} \in \mathcal{F}$.

   (T2) Eine beliebige Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{F}$ gehört zu $\mathcal{F}$.

   (T3) Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathcal{F}$ gehört zu $\mathcal{F}$.

   Die Elemente von $\mathcal{F}$ nennt man **offene Mengen** in $\mathbf{X}$. Der topologische Raum $\mathbf{X}$ heißt **kompakt**, wenn aus jeder offenen Überdeckung von $\mathbf{X}$ eine endliche Teilüberdeckung von $\mathbf{X}$ ausgewählt werden kann. Man nennt $\mathbf{X}$ einen **Hausdorff-Raum**, wenn die Topologie $\mathcal{F}$ die Punkte von $\mathbf{X}$ trennt, d.h., wenn für beliebige $x, y \in \mathbf{X}$ mit $x \neq y$ zwei Mengen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ existieren, so dass $x \in F_1$, $y \in F_2$ und $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ gilt.

2. Eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen nennt man **stetig**, wenn das vollständige Urbild jeder offenen Menge bezüglich dieser Abbildung offen ist. Unter einer **Basis** des Systems der offenen Mengen versteht man ein Teilsystem $\mathcal{F}_0$ von $\mathcal{F}$ mit der Eigenschaft, dass jede Menge $F \in \mathcal{F}$ als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{F}_0$ geschrieben werden kann. Es gibt noch den Begriff der **Subbasis**, der ein System $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ meint, für welches das System aller Durchschnitte endlich vieler Mengen aus $\mathcal{G}$ eine Basis von $\mathcal{F}$ ergibt.

3. Mit $\mathcal{R}$ bezeichnen wir den Durchschnitt aller maximalen Ideale der kommutativen Banachalgebra $\mathcal{A}$, das sogenannte **Radikal** von $\mathcal{A}$. Beispiel 2.9, Theorem 2.12 und Satz 2.13,(c) besagen, dass jedes maximale Ideal Nullraum eines multiplikativen linearen Funktionals ist. Diese Zuordnung ist eineindeutig, denn aus $m_1, m_2 \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$ und $N(m_1) = N(m_2) =: \mathcal{M}$

folgt mit der Darstellung $a = b + \lambda e$, $b \in \mathcal{M}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, die Gleichung $\lambda = m_1(a) = m_2(a)$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{R} \quad &\Longleftrightarrow \quad a \in N(m) \ \forall\, m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}} \\ &\Longleftrightarrow \quad \sigma(a) = \{0\} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad b - a \in G\mathcal{A} \ \forall\, b \in G\mathcal{A}\,. \end{aligned}$$

Man nennt $\mathcal{A}$ **halbeinfach**, wenn $\mathcal{R} = \{\Theta\}$ ist. Es gilt:

(a) Ist $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$ ein abgeschlossenes Ideal, so ist die Faktoralgebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ eine kommutative Banachalgebra mit der Multiplikation $[a]_{\mathcal{J}}[b]_{\mathcal{J}} := [ab]_{\mathcal{J}}$.

(b) $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ ist halbeinfach.

(c) Mit $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ bezeichnen wir die Menge der maximalen Ideale in $\mathcal{A}$, die wir also nach obigen Überlegungen mit der Menge $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ der multiplikativen linearen Funktionale identifizieren können. Falls $\mathcal{M} \in \mathbf{M}(\mathcal{A})$, so ist $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ isomorph zu $\mathbb{C}$, weil wegen der Äquivalenzkette

$$\begin{aligned} [a]_{\mathcal{M}} \neq [\Theta]_{\mathcal{M}} \quad &\Longleftrightarrow \quad a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{M} \\ &\Longleftrightarrow \quad \{ax + y : x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{M}\} = \mathcal{A} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, x_0 \in \mathcal{A}, y_0 \in \mathcal{M} : e = ax_0 + y_0 \\ &\Longleftrightarrow \quad [a]_{\mathcal{M}} \in G(\mathcal{A}/\mathcal{M}) \end{aligned}$$

und $\sigma([a]_{\mathcal{M}}) \neq \emptyset$ genau ein $\lambda = \lambda(a)$ mit $[a]_{\mathcal{M}} = \lambda[e]_{\mathcal{M}}$ existiert. Bezeichnet $j_{\mathcal{M}} : \mathcal{A}/\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$, $[a]_{\mathcal{M}} \mapsto \lambda(a)$ den entsprechenden Isomorphismus, so hat die Abbildung $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \mapsto [a]_{\mathcal{M}} = a + \mathcal{M} \mapsto j_{\mathcal{M}}([a]_{\mathcal{M}}) =: a(\mathcal{M})$ folgende Eigenschaften:

i. $(a+b)(\mathcal{M}) = a(\mathcal{M}) + b(\mathcal{M})$,
denn $[a]_{\mathcal{M}} + [b]_{\mathcal{M}} = a(\mathcal{M})[e]_{\mathcal{M}} + b(\mathcal{M})[e]_{\mathcal{M}} = \Big(a(\mathcal{M}) + b(\mathcal{M})\Big)[e]_{\mathcal{M}}$,

ii. $(\alpha a)(\mathcal{M}) = \alpha\, a(\mathcal{M})$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
denn $\alpha[a]_{\mathcal{M}} = \Big(\alpha\, a(\mathcal{M})\Big)[e]_{\mathcal{M}}$,

iii. $(ab)(\mathcal{M}) = a(\mathcal{M})b(\mathcal{M})$,
denn $[a]_{\mathcal{M}}[b]_{\mathcal{M}} = a(\mathcal{M})[e]_{\mathcal{M}}b(\mathcal{M})[e]_{\mathcal{M}} = \Big(a(\mathcal{M})b(\mathcal{M})\Big)[e]_{\mathcal{M}}$,

iv. $a(\mathcal{M}) = 0 \iff [a]_{\mathcal{M}} = [\Theta]_{\mathcal{M}} \iff a \in \mathcal{M}$,

v. $e(\mathcal{M}) = 1$, denn $[e]_{\mathcal{M}} = 1 \cdot [e]_{\mathcal{M}}$,

vi. $|a(\mathcal{M})| \leq |a(\mathcal{M})|\, \|[e]_{\mathcal{M}}\| = \|a(\mathcal{M})[e]_{\mathcal{M}}\| = \|[a]_{\mathcal{M}}\| \leq \|a\|$.

(d) Für $\mathcal{M} \in \mathbf{M}(\mathcal{A})$ definieren wir

$$f_{\mathcal{M}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad a \mapsto a(\mathcal{M})\,.$$

Die Abbildung $\mathbf{M}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{M} \mapsto f_{\mathcal{M}}$ ist bijektiv (vgl. (c)).

4. In 3.,(d) wird die Abbildung $a \mapsto a(\mathcal{M})$ bei festem $\mathcal{M} \in \mathbf{M}(\mathcal{A})$ betrachtet. Hält man dagegen $a \in \mathcal{A}$ fest, so ergibt sich eine Abbildung $\widehat{a} : \mathbf{M}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{M} \mapsto a(\mathcal{M})$. Unter dem **Raum der maximalen Ideale** versteht man die Menge $\mathbf{M}(\mathcal{A})$, versehen mit der

schwächsten Topologie, in der alle Funktionen $\widehat{a} : \mathbf{M}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \mathcal{A}$, stetig sind. Eine geeignete Subbasis $\{U(a, \mathcal{M}_0, \varepsilon) : a \in \mathcal{A}\,,\ \mathcal{M}_0 \in \mathbf{M}(\mathcal{A})\,,\ \varepsilon > 0\}$ für diese Topologie bilden die Mengen

$$U(a, \mathcal{M}_0, \varepsilon) = \{\mathcal{M} \in \mathbf{M}(\mathcal{A}) : |a(\mathcal{M}) - a(\mathcal{M}_0)| < \varepsilon\}\ .$$

Eine Basis der offenen Mengen in $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ bilden damit alle Mengen der Gestalt

$$\{\mathcal{M} \in \mathbf{M}(\mathcal{A}) : |a_j(\mathcal{M} - a_j(\mathcal{M}_j)| < \varepsilon_j,\, j = 1, \ldots, n\}\,,$$

$\mathcal{M}_j \in \mathbf{M}(\mathcal{A})\,,\ \varepsilon_j > 0\,,\ a_j \in \mathcal{A}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$

5. Der Raum der maximalen Ideale $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ ist ein kompakter Hausdorff-Raum.

Im Folgenden geben wir einige weiterführende Erläuterungen und bereiten den Beweis von Punkt 5 vor. Sind $(\mathbf{X}, \mathcal{F}_1)$ und $(\mathbf{X}, \mathcal{F}_2)$ zwei topologische Räume, so nennt man die Topologie $\mathcal{F}_1$ schwächer als die Topologie $\mathcal{F}_2$, wenn $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ gilt.

Sei $(\mathbf{X}, \mathcal{F})$ ein topologischer Raum. Unter der Abschließung $\overline{A}$ einer Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ versteht man die Menge

$$\overline{A} := \bigcap_{F \in \mathcal{F} : A \subset \mathbf{X} \setminus F} (\mathbf{X} \setminus F)\,.$$

Die Menge $U \subset \mathbf{X}$ heißt **Umgebung** des Punktes $x \in \mathbf{X}$, wenn ein $F \in \mathcal{F}$ mit $x \in F \subset U$ existiert. Eine Menge $\mathbb{I}$ mit einer partiellen Ordnung "$\prec$" nennt man **gerichtet**, wenn für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$ ein $\gamma \in \mathbb{I}$ existiert, so dass $\alpha \prec \gamma$ und $\beta \prec \gamma$ gilt. Unter einem **Netz** in einem Raum $\mathbf{X}$ versteht man eine Abbildung $\mathbb{I} \longrightarrow \mathbf{X}$, $\alpha \mapsto x_\alpha$, wobei $\mathbb{I}$ eine gerichtete Menge ist. Diese Abbildung wird auch kurz in der Form $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}}$ geschrieben. Man sagt, dass das Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}}$ gegen x **konvergiert**, und schreibt dafür

$$x = \lim_\alpha x_\alpha \quad \text{oder} \quad x_\alpha \longrightarrow x\,,$$

wenn für jede Umgebung U von x ein $\beta \in \mathbb{I}$ existiert, so dass $x_\alpha \in U$ für alle $\alpha \in \mathbb{I}$ mit $\beta \prec \alpha$ gilt.

Satz 2.14 *Ein Punkt $x \in \mathbf{X}$ gehört genau dann zur Abschließung von $A \subset \mathbf{X}$, wenn ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}}$ mit $x_\alpha \in A\ \forall \alpha \in \mathbb{I}$ und $x = \lim_\alpha x_\alpha$ existiert.*

Satz 2.15 *Eine Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ zwischen zwei topologischen Räumen $(\mathbf{X}, \mathcal{F})$ und $(\mathbf{Y}, \mathcal{G})$ ist genau dann stetig, wenn aus $x_\alpha \longrightarrow x$ in $\mathbf{X}$ folgt $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$ in $\mathbf{Y}$.*

Sind $(\mathbf{X}_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{I}$ toplogische Räume und $\mathbf{Y}$ eine nichtleere Menge sowie $\mathbf{K}$ eine Familie von Funktionen $f_\alpha : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}_\alpha$, so versteht man unter der **K-schwachen Topologie** auf $\mathbf{Y}$ die schwächste Topologie, in der alle $f_\alpha \in \mathbf{K}$ stetig sind. Eine Subbasis für diese Toplogie ist dann $\left\{f_\alpha^{-1}(F) : \alpha \in \mathbb{I},\, F \in \mathcal{F}_\alpha\right\}$. Ist nun $\mathbf{X}$ ein Banachraum, so versteht man unter der ***schwachen Topologie** auf $\mathbf{X}^*$ die $\mathbf{K}$-schwache Topologie mit $\mathbf{K} = \{j_x : x \in \mathbf{X}\}$, wobei, wie gewohnt, $j_x \in \mathbf{X}^{**}$ definiert ist durch $j_x(f) = f(x)$, $f \in \mathbf{X}^*$.

Es seien $\mathbf{Y}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{I}$ nichtleere Mengen und $\mathbf{Y} := \left\{(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{I}} : x_\alpha \in \mathbf{Y}_\alpha\right\}$ das Produkt dieser Mengen. Mit π_α bezeichnen wir die Projektion $\pi_\alpha : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Y}_\alpha$, $(x_\beta)_{\beta \in \mathbb{I}} \mapsto x_\alpha$. Sind nun $(\mathbf{Y}_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$ topologische Räume, so ist die **Produkttopologie** auf $\mathbf{Y}$ definiert als die $\mathbf{K}$-schwache Topologie mit $\mathbf{K} = \{\pi_\alpha : \alpha \in \mathbb{I}\}$. Wir formulieren nun den **Satz von Tychonoff**.

Satz 2.16 ([1], Anhänge zu Kapitel VII, Satz 11) *Sind sämtliche Räume $(\mathbf{Y}_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$ kompakte topologische Räume, so ist ihr Produkt $\mathbf{Y}$ in der Produkttopologie ebenfalls kompakt.*

Satz 2.17 (Banach-Alaoglu) *Ist* $\mathbf{X}$ *ein Banachraum, so ist die abgeschlossene Einheitskugel* $\mathbf{S}_* := \{f \in \mathbf{X}^* : \|f\|_{\mathbf{X}^*} \le 1\}$ *kompakt in der* **schwachen Topologie.*

Man nennt nun die Abbildung $\mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}(\mathbf{M}(\mathcal{A}))$, $a \mapsto \widehat{a}$ **Gelfand-Transformation** und $\widehat{a}$ die **Gelfand-Transformierte** von $a \in \mathcal{A}$.

Theorem 2.18 *Es sei* $\mathcal{A}$ *eine kommutative Banachalgebra.*

(a) *Die Gelfand-Transformation ist ein stetiger Homomorphismus mit Norm* ≤ 1.

(b) *Die Menge* $\{\widehat{a} : a \in \mathcal{A}\}$ *ist eine Teilalgebra von* $\mathbf{C}(\mathbf{M}(\mathcal{A}))$, *die die Abbildung* $\equiv 1$ *enthält und die die Punkte von* $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ *trennt.*

(c) *Ein Element* $a \in \mathcal{A}$ *ist genau dann invertierbar, wenn* $\widehat{a}(\mathcal{M}) \ne 0$ *für alle* $\mathcal{M} \in \mathbf{M}(\mathcal{A})$ *gilt.*

(d) *Der Nullraum der Gelfand-Transformation ist das Radikal von* $\mathcal{A}$.

(e) *Für jedes* $a \in \mathcal{A}$ *gilt* $\sigma(a) = \{\widehat{a}(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \in \mathbf{M}(\mathcal{A})\}$ *und* $r(a) = \|\widehat{a}\|_\infty$.

2.4 Beispiele

(A1) Vgl. Satz 2.14. Wir versehen $\mathbf{X} = [0,1] \subset \mathbb{R}$ mit der Topologie

$$\mathcal{F} = \{F \subset [0,1] : [0,1] \setminus F \text{ ist höchstens abzählbar}\} \cup \{\emptyset\} .$$

Für $A = [0,1)$ gilt dann $\overline{A} = [0,1]$, weil $\{1\} \notin \mathcal{F}$. Der Punkt $1 \in \overline{A}$ ist **nicht** Grenzwert einer Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ mit $x_n \in A \;\forall\, n \in \mathbb{N}$.

(A2) Die Ideale

$$\mathcal{J}_0 = \left\{ f \in \mathbf{C}[0,1] : \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } f(t) = 0 \;\forall\, t \in \left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right) \right\}$$

und

$$\mathcal{J}_1 = \left\{ f \in \mathbf{C}[0.1] : \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } f\left(\frac{1}{k}\right) = 0 \;\forall\, k \in \mathbb{N} \cap [n,\infty) \right\}$$

sind nicht abgeschlossen in $(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_\infty)$.

(A3) Die 2×2-Matrizen $\mathcal{A} = \mathbb{C}^{2\times 2}$, versehen mit irgendeiner (induzierten) Operatornorm, bilden eine Banachalgebra mit dem Einselement $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Die Teilmenge $\mathcal{A}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$ ist eine abgeschlossene Teilalgebra, die das Einselement I von $\mathcal{A}$ nicht enthält, aber das eigene Einselement $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ besitzt.

(B1) Vgl. Beispiel 2.8. Der Raum der maximalen Ideale der kommutativen Banachalgebra $(\mathbf{C}(\mathbf{E}) : \|.\|_\infty)$ ($\mathbf{E}$ - kompakter Hausdorff-Raum) ist homöomorph zu $\mathbf{E}$.

(B2) Wir betrachten

$$\mathcal{A}_{\mathbb{D}} := \{f \in \mathbf{C}(\mathbb{T}) : \text{Es existieren Polynome } p_n(t) \text{ mit } \|f - p_n\|_\infty \longrightarrow 0\}$$

als (abgeschlossene) Teilalgebra von $\mathcal{A} = (\mathbf{C}(\mathbb{T}), \|.\|_\infty)$, wobei $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ die Einheitskreislinie der komplexen Ebene bezeichnet. Es zeigt sich, dass

$$\sigma_{\mathcal{A}_\mathbb{D}}(f) = \mathbb{D} \cup \mathbb{T} \neq \mathbb{T} = \sigma_\mathcal{A}(f)$$

gilt, wobei $f(t) = t$ und $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sind.

(C) Mit $\ell^1_\mathbb{Z} = \left\{ (\xi_n)_{n=-\infty}^\infty : \xi_n \in \mathbb{C}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\xi_n| < \infty \right\}$ bezeichnen wir den Banachraum der (zweiseitigen) summierbaren Zahlenfolgen, $\|\xi\|_{\ell^1_\mathbb{Z}} = \|\xi\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\xi_n|$. Versehen mit der Multiplikation

$$\xi * \eta = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{n-k}\eta_k \right)_{n=1}^\infty$$

ist $\ell^1_\mathbb{Z}$ eine kommutative Banachalgebra, die isometrisch isomorph zur **Wiener'schen Algebra**

$$\mathcal{W} := \left\{ f \in \mathbf{C}(\mathbb{T}) : f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi_n t^n, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\xi_n| < \infty \right\}$$

mit der punktweisen Multiplikation und der Norm $\|f\|_\mathcal{W} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\xi_n|$ ist. Der Raum der maximalen Ideale von $\ell^1_\mathbb{Z}$ ist homöomorph zu $\mathbb{T}$.

(D) Auf dem Banachraum $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ wird durch

$$(f * g)(t) = \int_\mathbb{R} f(t-s)g(s)\,ds \tag{2.3}$$

eine kommutative Multiplikation definiert, bzgl. der aber in $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ kein Einselement existiert. (Für die Korrektheit der Definition von (2.3) in $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ und die Gültigkeit von $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$ siehe z.B. den Beweis von [3, Section 6.2, Prop. 4].)

(E) Ist $\mathbf{X}$ ein Banachraum, so ist $(\mathcal{L}(\mathbf{X}), \|.\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{X}})$ eine (i. Allg. nicht kommutative) Banachalgebra mit dem abgeschlossenen (zweiseitigen) Ideal $\mathcal{K}(\mathbf{X})$ der kompakten Operatoren. Aus Satz 1.9 und Satz 1.10 folgt, das $A \in \Phi(\mathbf{X})$ äquivalent zur Invertierbarkeit der Restklasse $A + \mathcal{K}(\mathbf{X})$ in der Faktoralgebra $\mathcal{L}(\mathbf{X})/\mathcal{K}(\mathbf{X})$ ist.

2.5 Banach*- und C^*-Algebren

Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra, so heißt eine Abbildung $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, $a \mapsto a^*$ **Involution**, wenn

(I1) $(a^*)^* = a \quad \forall\, a \in \mathcal{A}$,

(I2) $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^* \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $\forall\, a, b \in \mathcal{A}$,

(I3) $(ab)^* = b^* a^* \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}$

gilt. Eine Banachalgebra mit Involution (auch **involutive** Banachalgebra genannt) nennt man **Banach*-Algebra**, wenn

(B*) $\|a^*\| = \|a\| \quad \forall\, a \in \mathcal{A}$

gilt. Sie heißt **C^*-Algebra**, wenn

(C*) $\|a^* a\| = \|a\|^2 \quad \forall\, a \in \mathcal{A}$

erfüllt ist. Wir bemerken, dass (B*) aus (C*) folgt aund dass (C*) auch $\|a\, a^*\| = \|a\|^2$ impliziert. Man nennt ein Element a einer Algebra mit Involution

- **selbstadjungiert**, wenn $a^* = a$,
- **normal**, wenn $a^* a = a\, a^*$,
- **isometrisch** wenn $a^* a = e$,
- **unitär**, wenn $a^* a = e = a\, a^*$

gilt.

Satz 2.19 *Sind $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $a \in \mathcal{A}$ ein normales Element, so gilt $r(a) = \|a\|$.*

Eine lineare Abbildung $W : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ zwischen zwei Algebren heißt **Homomorphismus**, wenn $W(ab) = W(a)W(b)$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt. Ein solcher Homomorphismus wird **unital** genannt, wenn $W(e)$ das Einselement in $\mathcal{B}$ ist.

Lemma 2.20 *Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Banachalgebren und $W : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein unitaler Homomorphismus, so gilt für alle $a \in \mathcal{A}$*

$$\sigma_{\mathcal{B}}(W(a)) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(a)\,.$$

Ein Homomorphismus $W : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ zwischen zwei involutiven Algebren heißt ***-Homomorphismus**, falls $W(a^*) = W(a)^*$ für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt.

Satz 2.21 *Sind $\mathcal{A}$ eine Banach*-Algebra, $\mathcal{B}$ eine C^*-Algebra und $W : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein *-Homomorphismus, so folgt*

$$\|W(a)\| \le \|a\| \quad \forall\, a \in \mathcal{A}\,.$$

Zu einigen Beispielen aus Abschnitt 2.4:

(B1) Mit der Definition $f^*(x) := \overline{f(x)}$ wird $(\mathbf{C}(\mathbf{E}), \|.\|_\infty)$ zu einer C^*-Algebra.

(C) Mit $\xi^* := \left(\overline{\xi}_{-n}\right)_{n=-\infty}^{\infty}$ bzw. $f^*(t) := \overline{f(t)}$, $t \in \mathbb{T}$ werden $\ell^1_{\mathbb{Z}}$ bzw. die Wiener'sche Algebra $\mathcal{W}$ zu Banach*-Algebren.

(E) Die Algebra $(\mathcal{L}(\mathbf{X}), \|.\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{X}})$ ist im Fall eines Hilbertraumes $(\mathbf{X}, \langle .,. \rangle)$ mit der Involution $A \mapsto A^*$, definiert durch $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \ \forall\, x, y \in \mathbf{X}$, eine C^*-Algebra.

Satz 2.22 *Ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ eine abgeschlossene Teilalgebra der Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit $e \in \mathcal{B}$, so gilt für jedes $b \in \mathcal{B}$ die Inklusion*

$$\partial\sigma_{\mathcal{B}}(b) \subset \partial\sigma_{\mathcal{A}}(b)\,.$$

Folgerung 2.23 *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.22 ist $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ die Vereinigung aus $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$ mit einer gewissen Anzahl der (offenen) Zusammenhangskomponenten con $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(b)$. Besitzt also $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ keine inneren Punkte, so gilt $\sigma_{\mathcal{B}}(b) = \sigma_{\mathcal{A}}(b)$.*

Satz 2.24 *Es sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra. Ist $a \in \mathcal{A}$*

(a) *isometrisch, so gilt $r(a) = 1$,*

(b) *unitär, so folgt $\sigma(a) \subset \mathbb{T}$,*

(c) *selbstadjungiert, so ist $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

Satz 2.25 *Ist $\mathcal{B}$ eine C^*-Teilalgebra der $\mathbb{C}^*$-Algebra $\mathcal{A}$, so ist $\mathcal{B}$* **invers abgeschlossen** *in $\mathcal{A}$. (D.h., aus $b \in \mathcal{B} \cap G\mathcal{A}$ folgt $b \in G\mathcal{B}$.)*

Satz 2.26 *Es seien $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, $a \in \mathcal{A} \setminus \{e\}$ und $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ die kleinste abgeschlossene Teilalgebra von $\mathcal{A}$, die e und a enthält, d.h., die Abschließung (in $\mathcal{A}$) der Menge*

$$\{p(a) : p(t) \text{ ist Polynom}\} .$$

Dann ist $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(a)$ zusammenhängend.

Mit $\ell^2(\mathbb{Z})$ und $\mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ bezeichnen wir die Hilberträume der quadratisch summierbaren (zweiseitigen) Zahlenfolgen $(\xi_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ und den Raum der quadratisch integrierbaren (Klassen von) Funktionen $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$, versehen mit den entsprechenden inneren Produkten

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n} \quad \text{und} \quad \langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{\mathbf{i}s}) \overline{g(e^{\mathbf{i}s})}\, ds .$$

Wir verwenden den isometrischen Isomorphismus

$$J : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{T}) , \quad (\xi_n)_{n=-\infty}^{\infty} \mapsto x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e_n$$

mit $e_n(t) = t^n$ sowie den Orthoprojektor

$$P : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) , \quad (\xi_n)_{n=-\infty}^{\infty} \mapsto (\ldots, 0, \ldots, 0, \xi_0, \xi_1, \ldots) .$$

Im Hilbertraum $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z})$ betrachten wir für $a \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{T})$ den **Laurentoperator**

$$L(a)\xi = J^{-1} a J \xi$$

und im Raum $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}_0)$ den **Toeplitzoperator** $T(a) : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$,

$$(\xi_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \xi^0 := (\ldots, 0, \ldots, 0, \xi_0, \xi_1, \ldots) \mapsto \eta := P J^{-1} a J \xi^0 \mapsto (\eta_n)_{n=0}^{\infty}$$

sowie den **Hankeloperator** $H(a) : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$,

$$(\xi_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \xi^0 := (\ldots, 0, \ldots, 0, \xi_0, \xi_1, \ldots) \mapsto \eta := (I - P) J^{-1} \widetilde{a} J \xi^0 \mapsto (\eta_{-n-1})_{n=0}^{\infty}$$

mit $\widetilde{a}(t) := a(t^{-1})$. Der n-te **Fourierkoeffizient** einer Funktion $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T})$ ist gegeben durch

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{\mathbf{i}x}) e^{-\mathbf{i}nx}\, dx = \langle f, e_n \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{T})} , \quad n \in \mathbb{Z} ,$$

mit $e_n(t) = t^n$. Es folgt

$$L(a)\xi = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{a}_{j-k} \xi_k \right)_{j=-\infty}^{\infty}$$

sowie

$$T(a)\xi = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{a}_{j-k}\xi_k\right)_{j=0}^{\infty} \quad \text{und} \quad H(a)\xi = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{a}_{j+k+1}\xi_k\right)_{j=0}^{\infty}$$

bzw.

$$T(a) = \begin{bmatrix} \widehat{a}_0 & \widehat{a}_{-1} & \widehat{a}_{-2} & \dots \\ \widehat{a}_1 & \widehat{a}_0 & \widehat{a}_{-1} & \dots \\ \widehat{a}_2 & \widehat{a}_1 & \widehat{a}_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad H(a) = \begin{bmatrix} \widehat{a}_1 & \widehat{a}_2 & \widehat{a}_3 & \dots \\ \widehat{a}_2 & \widehat{a}_3 & \widehat{a}_4 & \dots \\ \widehat{a}_3 & \widehat{a}_4 & \widehat{a}_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Offenbar gilt $\|L(a)\|_{\mathcal{L}(\ell(\mathbb{Z}))}$, $\|T(a)\|_{\mathcal{L}(\ell^2)}$, $\|H(a)\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} \le \|a\|_\infty$. Für den Laurentoperator ist sogar $\|L(a)\|_{\mathcal{L}(\ell(\mathbb{Z}))} = \|a\|_\infty$. Auch für den Toeplitzoperator gilt

(T) $\quad \|T(a)\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} = \|a\|_\infty \quad \forall\, a \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{T})$.

Definieren wir $\mathbf{H} := \ell^2 \times \ell^2$, $\|(\xi,\eta)\|_{\mathbf{H}} := \sqrt{\|\xi\|_{\ell^2} + \|\eta\|_{\ell^2}}$ und

$$\langle(\xi^1,\eta^1),(\xi^2,\eta^2)\rangle_{\mathbf{H}} := \langle\xi^1,\xi^2\rangle_{\ell^2} + \langle\eta^1,\eta^2\rangle_{\ell^2}$$

sowie

$$D : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{H}\,, \quad (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto \Big((\xi_{-n-1})_{n=0}^{\infty}\,, (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \Big)\,,$$

so ist D eine bijektive Isometrie mit $D^* = D^{-1}$ und

$$DL(a)D^{-1} = \begin{bmatrix} T(\widetilde{a}) & H(\widetilde{a}) \\ H(a) & T(a) \end{bmatrix}.$$

Damit kann man die Formeln

(TH1) $\quad T(ab) = T(a)T(b) + H(a)H(\widetilde{b})$

und

(TH2) $\quad T(a)^* = T(\overline{a})\,,\ H(a)^* = H(\widetilde{\overline{a}})$

herleiten.

Wir erinnern an folgenden Sachverhalt: Sind $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z},\mathbf{W}$ Banachräume, $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$, $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ und $B_n \in \mathcal{L}(\mathbf{W},\mathbf{X})$, $A_n \longrightarrow A$ (stark) und $B_n^* \longrightarrow B^*$ (stark), so folgt $\|A_nTB_n - ATB\|_{\mathcal{L}(\mathbf{W},\mathbf{Z})} \longrightarrow 0$.

Unter Verwendung dieses Sachverhaltes und der Formel $V_{-1}T(a)V_1 = T(a)$ sowie von $\big(V_{-1}\big)^n \longrightarrow 0$ (stark), wobei $V_1\,(\xi_n)_{n=0}^{\infty} = (0,\xi_0,\xi_1,\dots)$ und $V_{-1}\,(\xi_n)_{n=0}^{\infty} = (\xi_1,\xi_2,\dots)$, erhält man für beliebiges $a \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{T})$

(T1) $\quad \|T(a)\|_{\mathcal{L}(\ell^2)} \le \|T(a)+K\|_{\mathcal{L}(\ell^2)}\ ,\ \forall\, K \in \mathcal{K}(\ell^2)$

und

(T2) $\ T(a) \in \mathcal{K}(\ell^2) \iff T(a) = \Theta$.

Ferner gilt

(H) $H(a) \in \mathcal{K}(\ell^2)\ \forall\, a \in \mathbf{C}(\mathbb{T})$.

Mit $\mathrm{alg}\mathcal{T}(\mathbf{C})$ bezeichnen wir die kleinste abgeschlossene Teilalgebra von $\mathcal{L}(\ell^2)$, die alle Operatoren $T(a)$ mit $a \in \mathbf{C}(\mathbb{T})$ enthält. Da mit $a \in \mathbf{C}(\mathbb{T})$ auch $\overline{a} \in \mathbf{C}(\mathbb{T})$ und $T(a)^* = T(\overline{a})$ gilt, ist $\mathrm{alg}\mathcal{T}(\mathbf{C})$ eine C^*-Teilalgebra. Es gilt

(TC1) $\mathcal{K}(\ell^2) \subset \mathrm{alg}\mathcal{T}(\mathbf{C})$,

(TC2) $\mathrm{alg}\mathcal{T}(\mathbf{C}) = \left\{ T(a) + K : a \in \mathbf{C}(\mathbb{T}),\ K \in \mathcal{K}(\ell^2) \right\}$.

Die Abbildung $\pi : \mathbf{C}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathrm{alg}\mathcal{T}(\mathbf{C})/\mathcal{K}(\ell^2)$, $a \mapsto T(a) + \mathcal{K}(\ell^2)$ ist ein isometrischer $*$-Isomorphismus. Somit sind der Raum der maximalen Ideale von $\mathrm{alg}\mathcal{T}(\mathbf{C})/\mathcal{K}(\ell^2)$ homöomorph zu $\mathbb{T}$ und $T(a) + \mathcal{K}(\ell^2) \mapsto a$ die entsprechende Gelfand-Transformation. Also gilt

(F1) $T(a)$, $a \in \mathbf{C}(\mathbb{T})$ ist genau dann Fredholmsch, wenn $a(t) \neq 0\ \forall\, t \in \mathbb{T}$.

2.6 Das Lokale Prinzip von Gohberg-Krupnik

Es sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra. Eine nichtleere Menge $\mathbf{M} \subset \mathcal{A}$ heißt **lokalisierende Klasse**, wenn $\Theta \notin \mathbf{M}$ und wenn für beliebige $f_1, f_2 \in \mathbf{M}$ ein $f \in \mathbf{M}$ mit $f_j f = f\, f_j = f$, $j = 1, 2$ existiert. Eine Familie $\{\mathbf{M}_t : t \in T\}$ lokalisierender Klassen wird **überdeckend** genannt, wenn für eine beliebige Auswahl $\{f_t \in \mathbf{M}_t : t \in T\}$ eine endliche Anzahl von Elementen f_{t_j}, $j = 1, \ldots, N$ existiert, so dass $f_{t_1} + \ldots + f_{t_N}$ invertierbar ist, und sie heißt **überlappend**, wenn jede lokalisierende Klasse $\mathbf{M}_t$, $t \in T$ beschränkt ist, alle Elemente in $\mathcal{M} := \bigcup_{t \in T} \mathbf{M}_t$ paarweise kommutieren, T ein topologischer Raum ist und für jedes $t_0 \in T$ und jedes $f \in \mathbf{M}_{t_0}$ eine Umgebung $U \subset T$ von t_0 existiert, so dass $f \in \mathbf{M}_t$ für alle $t \in U$ gilt.

Ist $\mathbf{M} \subset \mathcal{A}$ eine lokalisierende Klasse, so nennt man zwei Elemente $a, b \in \mathcal{A}$ **M-äquivalent** (in Zeichen: $a \sim_{\mathbf{M}} b$), falls

$$\inf \{ \|(a-b)f\| : f \in \mathbf{M} \} = \inf \{ \|f(a-b)\| : f \in \mathbf{M} \} = 0$$

gilt. Ein Element $a \in \mathcal{A}$ heißt **M**-invertierbar, wenn $b, c \in \mathcal{A}$ und $f, g \in \mathbf{M}$ existieren, so dass $baf = f$ und $gac = g$ gilt.

Lemma 2.27 *Seien $x, y \in \mathcal{A}$. Sind x $\mathbf{M}$-invertierbar und $y \sim_{\mathbf{M}} x$, so ist auch y $\mathbf{M}$-invertierbar.*

Für ein System $\{\mathbf{M}_t : t \in T\}$ lokalisierender Klassen und $\mathcal{M} = \bigcup_{t \in T} \mathbf{M}_t$ betrachten wir

$$\mathrm{com}\,\mathcal{M} := \{ a \in \mathcal{A} : af = fa\ \forall\, f \in \mathcal{M} \}$$

sowie $\mathbf{Z}_t := \{ z \in \mathrm{com}\,\mathcal{M} : z \sim_{\mathbf{M}_t} \Theta \}$, $t \in T$.

Lemma 2.28 *Die Menge $\mathrm{com}\,\mathcal{M}$ ist eine abgeschlossene Teilalgebra von $\mathcal{A}$. Ist $\mathbf{M}_t$ beschränkt, so ist $\mathbf{Z}_t$ ein abgeschlossenes, zweiseitiges Ideal in $\mathrm{com}\,\mathcal{M}$.*

Die Restklasse $a + \mathbf{Z}_t$ bezeichnen wir mit a^t, und, wie gewohnt, definieren wir

$$\left\| a^t \right\| := \inf \{ \|a + z\| : z \in \mathbf{Z}_t \}\ .$$

Satz 2.29 *Es seien $\{\mathbf{M}_t : t \in T\}$ eine überdeckende Familie lokalisierender Klassen und $a \in \mathrm{com}\,\mathcal{M}$.*

(1) *Falls* $a \sim_{\mathbf{M}_t} a_t \ \forall\, t \in T$, *so gilt* $a \in G\mathcal{A}$ *genau dann, wenn die* a_t $\mathbf{M}_t$*-invertierbar* $\forall\, t \in T$ *sind.*

(2) *Sind alle* $\mathbf{M}_t$ *beschränkt, so gilt* $a \in G\mathcal{A}$ *genau dann, wenn alle* a^t , $t \in T$ *invertierbar sind.*

(3) *Ist die Familie der lokalisierenden Klassen überlappend, so ist die Abbildung* $T \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \left\|a^t\right\|$ *oberhalbstetig.*

(4) *Sind die Familie der lokalisierenden Klassen überlappend,* $\mathcal{A}$ *eine* C^**-Algebra,* $\mathbf{M}_t = \mathbf{M}_t^*$ $\forall\, t \in T$ *und* T *kompakt, so gilt*

$$\|a\| = \max\left\{\left\|a^t\right\| : t \in T\right\} .$$

Wir wollen das lokale Prinzip von Gohberg-Krupnik zur Herleitung eines Fredholm-Kriteriums für Toeplitzoperatoren $T(a)$ mit stückweise stetiger Erzeugerfunktion verwenden. Mit $\mathbf{PC}(\mathbb{T})$ bezeichnen wir die Menge der Funktionen $a : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$, für die in jedem Punkt $t \in \mathbb{T}$ die einseitigen Grenzwerte $a(t \pm 0) = \lim_{\varepsilon \to \pm 0} a\big(t\, \mathrm{e}^{\mathbf{i}\varepsilon}\big)$ existieren. Die Menge $\mathbf{PC}(\mathbb{T})$ ist die Abschließung in $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{T})$ der Menge $\mathbf{PC}_0(\mathbb{T}) \subset \mathbf{PC}(\mathbb{T})$ der Funktionen, die nur endlich viele Sprungstellen haben. Mit $\mathrm{alg}\mathcal{T}(\mathbf{PC})$ bezeichnen wir die kleinste abgeschlossene Teilalgebra von $\mathcal{L}(\ell^2)$, die alle Operatoren $T(a)$, $a \in \mathbf{PC}$ enthält, die wieder eine C^*-Algebra mit $\mathcal{K}(\ell^2) \subset \mathrm{alg}\mathcal{T}(\mathbf{PC})$ ist.

Für $a \in \mathbf{PC}(\mathbb{T})$ definieren wird

$$a_2 : \mathbb{T} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad (t,\mu) \mapsto (1-\mu)a(t-0) + \mu\, a(t+0)\,,$$

deren Bild auf natürliche Weise orientiert ist. Ist $a_2(t,\mu) \neq 0$ für alle $(t,\mu) \in \mathbb{T} \times [0,1]$, so bezeichnen wir mit $\mathrm{wind}\, a_2(t,\mu)$ die Windungszahl dieses Bildes um den Koordinatenursprung (im mathematisch positiven Sinn, also den Zuwachs des stetigen Argumentes bei einem Durchlauf der Bildkurve, dividiert durch 2π).

Die Äquivalenzklasse $A + \mathcal{K}(\ell^2) \in \mathcal{A} := \mathrm{alg}\mathcal{T}(\mathbf{PC})/\mathcal{K}(\ell^2)$ bezeichen wir kurz mit A^o . Für jedes $t \in \mathbb{T}$ ist

$$\mathbf{M}_t = \{T(f)^o : f \in \mathbf{C}(\mathbb{T}),\, 0 \le f \le 1,\, f \equiv 1 \,\text{in einer Umgebung von}\, t\}$$

eine lokalisierende Klasse in $\mathcal{A}$. Das System $\{\mathbf{M}_t : t \in \mathbb{T}\}$ ist überdeckend, und es gilt für $a, b \in \mathbf{PC}(\mathbb{T})$

$$T(a)^o \sim_{\mathbf{M}_t} T(b)^o \iff a(t \pm 0) = b(t \pm 0)\,.$$

(TF1) Sind $a \in \mathbf{C}(\mathbb{T})$ und $T(a) \in \Phi(\ell^2)$, so gilt $\kappa(T(a)) = -\mathrm{wind}\, a$.

(TF2) Für $a \in \mathbf{PC}(\mathbb{T})$ gilt $T(a) \in \Phi(\ell^2)$ genau dann, wenn $a_2(t,\mu) \neq 0 \ \forall\, (t,\mu) \in \mathbb{T} \times [0,1]$.

(TF3) Sind $a \in \mathbf{PC}(\mathbb{T})$ und $T(a) \in \Phi(\ell^2)$, so gilt $\kappa(T(a)) = -\mathrm{wind}\, a_2(t,\mu)$.

Für den Beweis der folgenden Aussage verwenden wir (**F. und M. Riesz**): Sind $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{T})$ und $\widehat{f}_n = 0$, $n < 0$, so ist f auf $\mathbb{T}$ f. ü. Null oder f. ü. ungleich Null.

(T3) Für $a \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{T})\backslash\{\Theta\}$ ist $\dim N(T(a)) = 0$ oder $\dim N(T(\overline{a}) = 0$. Ist also $T(a)$ Fredholmsch mit Index 0 , so ist $T(a) : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ invertierbar.

2.7 Kommutative C^*-Algebren

Satz 2.30 (Stone-Weierstrass) *Es seien* $\mathbf{X}$ *ein kompakter Hausdorff-Raum und* $\mathcal{A}$ *eine abgeschlossene und symmetrische Teilalgebra von* $\mathbf{C}(\mathbf{X})$, *die die Punkte von* $\mathbf{X}$ *trennt und die konstante Funktion* $\chi(x) \equiv 1$ *enthält. Dann ist* $\mathcal{A} = \mathbf{C}(\mathbf{X})$.

Satz 2.31 (Gelfand) *Ist* $\mathcal{A}$ *eine kommutative* C^**-Algebra, so ist die Gelfand-Transformation* $\mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}(\mathbf{M}(\mathcal{A}))$, $a \mapsto \widehat{a}$ *ein isometrischer* **-Isomorphismus.*

Satz 2.32 *Sind* $\mathcal{A}$ *eine* C^**-Algebra und* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *die kleinste abgeschlossene und symmetrische Teilalgebra von* $\mathcal{A}$, *die* e *und das normale Element* $a \in \mathcal{A} \setminus \{e\}$ *enthält, so sind* $\mathcal{B}$ *und* $\mathbf{C}(\sigma(a))$ *zueinander isometrisch* **-isomorph.*

Bemerkung 2.33 *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.32 ist der isometrische* **-Isomorphismus* $\mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{C}(\sigma(a))$ *gegeben durch* $b \mapsto \widehat{b} \circ \widehat{a}^{-1}$, *wobei* $\widehat{\ }$ *die Gelfandtransformation* $\mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{C}(\mathbf{M}(\mathcal{B}))$ *bezeichnet. Ist* $\varphi_a : \mathbf{C}(\sigma(a)) \longrightarrow \mathcal{B}$ *die Umkehrabbildung, so können wir jeder stetigen Funktion* $f : \sigma(a) \longrightarrow \mathbb{C}$ *das Element* $f(a) := \varphi_a(f)$ *zuordnen. Dabei gilt für alle* $f, g \in \mathbf{C}(\sigma(a))$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$(\alpha f + \beta g)(a) = \varphi_a(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi_a(f) + \beta\varphi_a(g) = \alpha f(a) + \beta g(a)\,,$$

$$(fg)(a) = \varphi_a(fg) = \varphi_a(f)\varphi_a(g) = f(a)g(a)\,, \quad \overline{f}(a) = \varphi_a(\overline{f}) = \varphi_a(f)^* = f(a)^*$$

und der **Spektralabbildungssatz**

$$\begin{aligned}\sigma(f(a)) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : f(a) - \lambda e \notin G\mathcal{B}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi_a(f - \lambda 1) \notin G\mathcal{B}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : f - \lambda 1 \notin G\mathbf{C}(\sigma(a))\} = \{f(x) : x \in \sigma(a)\} = f(\sigma(a))\,.\end{aligned}$$

Sind also a selbstadjungiert, was $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ impliziert, und

$$f_+(x) = \max\{0, x\}\,, \quad f_-(x) = -\min\{0, x\} \quad \text{sowie} \quad f(x) = |x|\,,$$

so kann man $a_\pm := f_\pm(a)$ und $|a| := f(a)$ definieren. Ist a normal und gilt $\sigma(a) \subset [0, \infty)$, so ist z.B. $\sqrt{a} := g(a)$ mit $g(x) = \sqrt{x}$ wohldefiniert.

2.8 C^*-Algebren (Fortsetzung)

Wir setzen hier die Betrachtungen aus Abschnitt 2.5 fort und präsentieren einige weitere interessante Eigenschaften von C^*-Algebren. Ideale seien im Weiteren stets zweiseitige.

Satz 2.34 *Sind* $\mathcal{A}$ *eine* C^**-Algebra und* $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ *ein abgeschlossenes Ideal, so existiert für jedes* $x \in \mathcal{J}$ *eine Folge* $(e_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{J}$ *mit* $e_n^* = e_n$ *und* $\sigma(e_n) \subset [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ *sowie* $x\, e_n \longrightarrow x$.

Folgerung 2.35 *Jedes abgeschlossene Ideal einer* C^**-Algebra ist ein* **-Ideal.*

Folgerung 2.36 *Ist* $\mathcal{J}$ *ein abgeschlossenes Ideal einer* C^**-Algebra* $\mathcal{A}$, *so ist* $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ *eine* C^**-Algebra.*

Kapitel 3

Darstellungstheorie für C^*-Algebren

In diesem Kapitel sei $\mathcal{A}$ stets eine C^*-Algebra (mit dem Einselement e).

3.1 Positivität und Ordnung

Ein Element $a = a^* \in \mathcal{A}$ heißt **positiv**, wenn $\sigma(a) \subset [0, \infty)$ gilt. Mit $\mathcal{A}_+$ bezeichnen wir die Menge aller positiven Elemente von $\mathcal{A}$.

Lemma 3.1 *Für $a \in \mathcal{A}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $a \in \mathcal{A}_+$

(b) $a = b^2$ *mit* $b^* = b \in \mathcal{A}$

(c) $a^* = a$ *und* $\|\lambda e - a\| \le \lambda \ \forall\, \lambda \ge \|a\|$

(d) $a^* = a$ *und* $\exists\, \lambda \ge \|a\| : \|\lambda e - a\| \le \lambda$

Folgerung 3.2 $\mathcal{A}_+$ *ist abgeschlossen in* $\mathcal{A}$ *und*

$$\lambda \mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}_+ \ \forall\, \lambda \ge 0\,, \quad \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}_+\,, \quad \mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{\Theta\}\ .$$

Folgerung 3.3 $a \in \mathcal{A}_+ \iff \exists\, b \in \mathcal{A} : a = b^* b$.

Für selbstadjungierte Elemente $a, b \in \mathcal{A}$ schreiben wir $a \ge b$ genau dann, wenn $a - b \in \mathcal{A}_+$ gilt. Damit wird auf der Menge der selbstadjungierten Elemente von $\mathcal{A}$ eine partielle Ordnung erklärt.

Folgerung 3.4 *Es seien* $a, b, c \in \mathcal{A}$.

(a) $a \ge b \ge \Theta$ *impliziert* $\|a\| \ge \|b\|$ *und* $c^* a c \ge c^* b c$.

(b) $a \ge b \ge \Theta$, $a, b \in G\mathcal{A}$, $ab = ba$ *impliziert* $b^{-1} \ge a^{-1} \ge \theta$.

Wir wissen bereits (vgl. Satz 2.21), dass ein *-Homomorphismus $W : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ zwischen einer Banach*-Algebra $\mathcal{A}$ und einer C^*-Algebra $\mathcal{B}$ die Eigenschaft $\|W\| \le 1$ hat.

Satz 3.5 *Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei C^*-Algebren und $W : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein *-Homomorphismus, so gilt*

(a) $\|W\| \le 1$,

(b) *W ist eine Isometrie, falls W injektiv ist,*

(c) *$W(\mathcal{A})$ is abgeschlossen in $\mathcal{B}$, also eine C^*-Teilalgebra von $\mathcal{B}$.*

Folgerung 3.6 *Seien $\mathcal{B}$ eine C^*-Teilalgebra der C^*-Algebra $\mathcal{A}$ und $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ ein abgeschlossenes Ideal. Dann ist $\mathcal{B} + \mathcal{J}$ die kleinste C^*-Teilalgebra von $\mathcal{A}$ die $\mathcal{B}$ und $\mathcal{J}$ umfasst.*

Ein lineares Funktional $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **positiv**, wenn $f(a) \ge 0$ für alle $a \in \mathcal{A}_+$ gilt. Unter einem **Zustand** auf $\mathcal{A}$ verstehen wir ein stetiges Funktional $f \in \mathcal{A}_+$ mit $\|f\| = 1$. Die Menge aller positiven linearen Funktionale bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_+^*$, die Menge der Zustände mit $\mathcal{A}_S$.

Sind $\mathbf{H}$ ein Hilbertraum und $x_0 \in \mathbf{H}$, so ist $f : \mathcal{L}(\mathbf{H}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $A \mapsto \langle Ax_0, x_0 \rangle$ ein Beispiel für ein positives lineares Funktional, welches im Fall $\|x_0\| = 1$ ein Zustand auf $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist.

Satz 3.7 *Ist $f \in \mathcal{A}_+^*$, so $f \in \mathcal{A}^*$.*

Satz 3.8 *Für $f \in \mathcal{A}_+^*$ gilt*

(a) *die* **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$|f(a^*b)|^2 \le f(a^*a)f(b^*b) \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A},$$

(b) *die Symmetrie $f(a^*) = \overline{f(a)}$ $\forall\, a \in \mathcal{A}$.*

Folgerung 3.9 *Für $f \in \mathcal{A}_+^*$ gilt $f(e) = \|f\|$.*

Satz 3.10 *Ein lineares Funktional $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ gehört genau dann zu $\mathcal{A}_+^*$, wenn $f \in \mathcal{A}^*$ und $\|f\| = f(e)$ gilt.*

Unter einer **Darstellung** einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ verstehen wir ein geordnetes Paar $(\mathbf{H}, \pi)$ aus einem Hilbertraum $\mathbf{H}$ und einem *-Homomorphismus $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})$. Gilt $N(\pi) = \{\Theta\}$, so spricht man von einer **treuen Darstellung**, für die nach Satz 3.5,(b) dann $\mathcal{A}$ isometrisch *-isomorph zu der C^*-Teilalgebra $\pi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist.

Eine Darstellung $(\mathbf{H}, \pi)$ mit $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H})$, $a \mapsto \Theta$ heisst **triviale Darstellung**. Ist $(\mathbf{H}, \pi)$ eine Darstellung, so nennt man

$$\mathbf{H}_0 := \{x \in \mathbf{H} : \pi(a)x = \Theta \ \forall\, a \in \mathcal{A}\} = \bigcap_{a \in \mathcal{A}} N(\pi(a))$$

den **trivialen Teil** dieser Darstellung. Im Fall $\mathbf{H}_0 = \{\Theta\}$ nennt man die Darstellung **nicht entartet**. Eine Darstellung $(\mathbf{H}, \pi)$ heißt **zyklisch**, falls ein $x \in \mathbf{H}$ existiert, so dass $\{\pi(a)x : a \in \mathcal{A}\}$ dicht in $\mathbf{H}$ ist.

Lemma 3.11 *Eine zyklische Darstellung ist nicht entartet.*

Sind $(\mathbf{H}_1, \pi_1)$ eine Darstellung von $\mathcal{A}$ und $U : \mathbf{H}_1 \longrightarrow \mathbf{H}_2$ ein unitärer Operator, so ist $\pi_2 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H}_2)$, $a \mapsto U\pi_1(a)U^*$ ein *-Homomorphismus, also $(\mathbf{H}_2, \pi_2)$ ebenfalls eine Darstellung von $\mathcal{A}$. Solche Darstellungen heißen zueinander **unitär äquivalent** und werden eigentlich nicht unterschieden.

Satz 3.12 (Gelfand/Naimark/Segal) *Ist $f \in \mathcal{A}_+^*$, so existiert eine, bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmte, zyklische Darstellung $(\mathbf{H}, \pi)$ von $\mathcal{A}$ mit $\overline{\{\pi(a)x_f : a \in \mathcal{A}\}} = \mathbf{H}$, $\|x_f\|^2 = \|f\|$ und*

$$f(a) = \langle \pi(a)x_f, x_f \rangle \quad \forall\, a \in \mathcal{A}.$$

Satz 3.13 *Für jedes $a \in \mathcal{A}$ existiert ein $f \in \mathcal{A}_S$ mit $f(a^*a) = \|a\|^2$. Ist (H, π) die Darstellung zu f gemäß Satz 3.12, so gilt $\|\pi(a)\| = \|a\|$.*

Unter der direkten Summe einer Familie $\{\mathbf{H}_\alpha : \alpha \in \mathbb{I}\}$ von Hilberträumen $\mathbf{H}_\alpha$ versteht man die Menge

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{I}} \mathbf{H}_\alpha := \left\{ f : \mathbb{I} \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathbb{I}} \mathbf{H}_\alpha \text{ mit } f(\alpha) \in \mathbf{H}_\alpha \,\forall\, \alpha \in \mathbb{I} \text{ und } \sum_{\alpha \in \mathbb{I}} \|f(\alpha)\|^2_{\mathbf{H}_\alpha} < \infty \right\},$$

versehen mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle := \sum_{\alpha \in \mathbb{I}} \langle f(\alpha), g(\alpha) \rangle_{\mathbf{H}_\alpha}.$$

Dabei sind die Summen im Sinne der Konvergenz des Netzes $\mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F \mapsto \sum_{\alpha \in F} \ldots$ mit der bezüglich "$\subset$" gerichteten $\mathcal{F} := \{F \subset \mathbb{I} : |F| < \infty\}$ zu verstehen. Das so definierte geordnete Paar $\left(\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{I}} \mathbf{H}_\alpha, \langle .,. \rangle \right)$ ist dann ein Hilbertraum.

Ist $\{(\mathbf{H}_\alpha, \pi_\alpha) : \alpha \in \mathbb{I}\}$ eine Familie von Darstellungen von $\mathcal{A}$, so ist $(\mathbf{H}, \pi)$ mit

$$\mathbf{H} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{I}} \mathbf{H}_\alpha \quad \text{und} \quad \big(\pi(a)f\big)(\alpha) = \pi_\alpha(a)f(\alpha) \;\forall\, \alpha \in \mathbb{I},\, f \in \mathbf{H}$$

eine Darstellung von $\mathcal{A}$. Diese wird auch mit $\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{I}} (\mathbf{H}_\alpha, \pi_\alpha)$ bezeichnet.

Satz 3.14 *Jede C^*-Algebra ist isometrisch *-isomorph zu einer C^*-Algebra linearer und stetiger Operatoren auf einem Hilbertraum.*

Beweis. Für jedes $f \in \mathcal{A}_S$ sei $(\mathbf{H}_f, \pi_f)$ die zyklische Darstellung von $\mathcal{A}$ gemäß Satz 3.12. Wir setzen $(\mathbf{H}, \pi) := \bigoplus_{f \in \mathcal{A}_S} (\mathbf{H}_f, \pi_f)$. Aus Satz 3.13 folgt für jedes $a \in \mathcal{A}$ die Existenz eines Zustandes

$f \in \mathcal{A}_S$ mit $\|\pi_f(a)\| = \|a\|$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\|\pi(a)\|_{\mathbf{L}(\mathbf{H})} &= \sup\left\{\|\pi(a)g\|_{\mathbf{H}} : g \in \mathbf{H},\ \|g\|_{\mathbf{H}} \le 1\right\} \\
&= \sup\left\{\sqrt{\sum_{f\in\mathcal{A}_S} \|\pi_f(a)g(f)\|^2_{\mathbf{H}_f}} : g \in \mathbf{H},\ \sqrt{\sum_{f\in\mathcal{A}_S} \|g(f)\|^2_{\mathbf{H}_f}} \le 1\right\} \\
&\ge \sup\left\{\|\pi_f(a)g(f)\|_{\mathbf{H}_f} : g \in \mathbf{H},\ \|g(f)\|_{\mathbf{H}_f} \le 1\right\} \\
&= \sup\left\{\|\pi_f(a)x\|_{\mathbf{H}_f} : x \in \mathbf{H}_f,\ \|x\|_{\mathbf{H}_f} \le 1\right\} \\
&= \|\pi_f(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H}_f)} = \|a\|_{\mathcal{A}} .
\end{aligned}$$

Aus Satz 3.5,(a) folgt somit $\|\pi(a)\| = \|a\| \ \forall\, a \in \mathcal{A}$. □

Im Weiteren sei $\mathbf{X}$ ein kompakter Hausdorff-Raum. Eine Teilmenge von $\mathbf{X}$ heißt **G_δ-Menge**, wenn sie als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen darstellbar ist. Die σ-Algebra der **Baire'schen Mengen** ist die kleinste σ-Algebra, die alle kompakten G_δ-Mengen enthält. Unter einem **Baire'schen Maß** versteht man ein Maß μ auf der σ-Algebra der Baire'schen Mengen mit $\mu(\mathbf{X}) < \infty$.

Die σ-Algebra der **Borelmengen** ist die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält. Ein Maß μ auf dieser σ-Algebra mit $\mu(\mathbf{X}) < \infty$ heißt **Borelmaß**. Jedes Baire'sche Maß kann zu einem Borelmaß fortgesetzt werden, wobei die Fortsetzung auf ein reguläres Borelmaß eindeutig ist. Dabei heißt ein Borelmaß **regulär**, wenn

$$\mu(\mathbf{X}_0) = \inf\{\mu(G) : G \text{ - offen},\ \mathbf{X}_0 \subset G\} = \sup\{\mu(K) : K \text{ - kompakt},\ K \subset \mathbf{X}_0\}$$

für jede Borelmenge $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ gilt.

Satz 3.15 (Riesz/Markov) *Ist φ ein positives lineares Funktional auf $\mathbf{C}(\mathbf{X})$, so existiert genau ein Baire'sches Maß μ auf $\mathbf{X}$, so dass*

$$\varphi(f) = \int_{\mathbf{X}} f\, d\mu \quad \forall\, f \in \mathbf{C}(\mathbf{X})$$

gilt.

- Man beachte, dass für eine stetige Funktion $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ und beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}([\alpha,\infty)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left((\alpha - \frac{1}{n}, \infty)\right)$ eine G_δ-Menge ist, weshalb es zur Integration stetiger Funktionen genügt, in der entsprechenden σ-Algebra die G_δ-Mengen zu haben.
- Ist μ ein Baire'sches Maß, so gilt $\mathbf{C}(\mathbf{X}) \subset \mathbf{L}^p(\mathbf{X},\mu)$ für $1 \le p \le \infty$, wobei diese Einbettung stetig ist und $C(\mathbf{X})$ für $1 \le p < \infty$ in $\mathbf{L}^p(\mathbf{X},\mu)$ dicht liegt. Ist μ ein Borelmaß, so ist $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ nur dann in $\mathbf{L}^1(\mathbf{X},\mu)$ dicht, wenn μ regulär ist.
- Ist $\mathbf{X}$ ein kompakter metrsicher Raum, so fallen die σ-Algebren der Baire'schen Mengen und der Borelmengen zusammen, denn in diesem Fall ist jede abgeschlossene Menge eine G_δ-Menge.

Lemma 3.16 (Urysohn) *Sind $K_1, K_2 \subset \mathbf{X}$ kompakte Mengen mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, so existiert eine stetige Funktion $f \in \mathbf{C}(X)$ mit $0 \le f(x) \le 1\ \forall\, x \in \mathbf{X}$ und $f(x) = 0\ \forall\, x \in K_1$ sowie $f(x) = 1\ \forall\, x \in K_2$.*

Ist $\varphi \in \mathbf{C}(\mathbf{X})^*_+$, so gewinnt man das Baire'sche Maß μ gemäß Satz 3.15 durch

$$\mu(K) = \inf\{\varphi(f) : f \in \mathbf{C}(\mathbf{X}),\ f \ge \chi_K\} \quad \forall\, K \subset \mathbf{X} - \mathrm{G}_\delta \text{ und kompakt},$$

wobei χ_K die charakteristische Funktion der Menge K bezeichnet.

Begründung: Aus $f \ge \chi_K$ folgt $\mu(K) = \int_{\mathbf{X}} \chi_K\, d\mu \le \int_{\mathbf{X}} f\, d\mu = \varphi(f)$. Es bleibt also zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $f \in \mathbf{C}(\mathbf{X})$ mit $\chi_K \le f$ und $\varphi(f) \le \mu(K) + \varepsilon$ existiert. Dazu sei $G \supset K$ eine offene Menge mit $\mu(G \setminus K) < \varepsilon$, die wegen der G_δ-Eigenschaft von K existiert. Aus lemma 3.16 folgt die Existenz einer Funktion $f \in \mathbf{C}(\mathbf{X})$ mit $0 \le f(x) \le 1\ \forall\, x \in \mathbf{X}$, $f(x) = 1\ \forall\, x \in K$ und $f(x) = 0\ \forall\, x \in \mathbf{X} \setminus G$. Damit ist $\varphi(f) = \int_G f\, d\mu \le \mu(G) < \mu(K) + \varepsilon$. □

Satz 3.12 liefert zusammen mit Satz 3.15 in Anwendung auf ein $\varphi \in \mathbf{C}(\mathbf{X})^*_+$ den Hilbertraum $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathbf{X}, \mu)$ und den *-Homomorphismus $\pi : \mathbf{C}(\mathbf{X}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\mathbf{X}, \mu))$ mit $\pi(f)g = fg$ für alle $g \in \mathbf{L}^2(\mathbf{X}, \mu)$ und alle $f \in \mathbf{C}(\mathbf{X})$.

Begündung: Sei $\varphi(f) = \int_{\mathbf{X}} f\, d\mu$ (vgl. Satz 3.15). Es ist dann (vgl. den beweis von Satz 3.12)

$$J_v p = \left\{ f \in \mathbf{C}(\mathbf{X}) : \varphi(|f|^2) = 0 \right\} = \{ f \in \mathbf{C}(\mathbf{X}) : f(x) = 0\ \forall\, x \in \operatorname{supp} \mu \} \ .$$

Die Vervollständigung von $(\mathbf{C}(\mathbf{X})/J_\varphi, \langle ., . \rangle)$ mit

$$\langle [f], [g] \rangle = \int_{\mathbf{X}} f(x) \overline{g(x)}\, d\mu$$

ergibt den Hilbertraum $\mathbf{L}^2(\mathbf{X}, \mu)$. Ferner ist (vgl. den Beweis von Satz 3.12) $\pi([f])[g] = [fg] = [f][g]$ für $f \in \mathbf{C}(\mathbf{X})$. Es bleibt nur noch $[f]$ mit f bzw. $[g]$ mit g zu identifizieren. Es sei bemerkt, dass $f_0 \equiv 1$ das entsprechende zyklische Element ist, wobei

$$\|f_0\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbf{X}, \mu)} = \int_{\mathbf{X}} d\mu = \|\varphi\|_{\mathbf{C}(\mathbf{X})^*}$$

gilt. □

3.2 Irreduzible Darstellungen

Es seien $\mathbf{H}$ ein Hilbertraum, $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}$ ein linearer Teilraum und $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(\mathbf{H})$. Wir nennen $\mathbf{H}_1$ **invariant** bezüglich $\mathcal{M}$, wenn $Ax \in \mathbf{H}_1$ für alle $x \in \mathbf{H}_1$ und alle $A \in \mathcal{M}$ gilt. Sind $\mathbf{H}_1$ abgeschlossen und $P_1 := P_{\mathbf{H}_1}$ der Orthoprojektor auf $\mathbf{H}_1$, so ist $\mathbf{H}_1$ genau dann invariant bezüglich $\mathcal{M}$, wenn

$$P_1 A P_1 = A P_1 \quad \forall\, A \in \mathcal{M} \tag{3.1}$$

gilt. Ist $\mathcal{M}$ symmetrisch, d.h., aus $A \in \mathcal{M}$ folgt $A^* \in \mathcal{M}$, so ist die Bedingung (3.1) äquivalent zu

$$P_1 A = A P_1 \quad \forall\, A \in \mathcal{M}\,, \tag{3.2}$$

denn aus (3.1) folgt dann $P_1 A = (A^* P_1)^* = (P_1 A^* P_1)^* = P_1 A P_1 = A P_1$, und umgekehrt folgt aus (3.2) $P_1 A P_1 = A P_1^2 = A P_1$.

Sind $\mathbf{H}_2 := \mathbf{H}_1^\perp$ und $P_2 := P_{\mathbf{H}_2}$, so gilt

$$P_1 A = A P_1 \iff P_2 A = (I - P_1) A = A - P_1 A = A - A P_1 = A(I - P_1) = A P_2\,,$$

d.h., im Fall einer symmetrischen Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}(\mathbf{H})$ ist $\mathbf{H}_1$ genau dann invariant bezüglich $\mathcal{M}$, wenn $\mathbf{H}_2$ diese Eigenschaft hat. In diesem Fall gilt $A = P_1AP_1 + P_2AP_2$ für alle $A \in \mathcal{M}$.

Eine nichttriviale Darstellung $(\mathbf{H}, \pi)$ heißt **topologisch irreduzibel**, wenn $\{\Theta\}$ und $\mathbf{H}$ die einzigen abgeschlossenen und bezüglich $R(\pi) = \{\pi(a) : a \in \mathcal{A}\}$ invarianten Teilräume von $\mathbf{H}$ sind.

Satz 3.17 *Ist $(\mathbf{H}, \pi)$ eine nichttriviale Darstellung von $\mathcal{A}$, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $(\mathbf{H}, \pi)$ *ist topologisch irreduzibel.*

(b) $\operatorname{comm} R(\pi) := \{B \in \mathcal{L}(\mathbf{H}) : B\pi(a) = \pi(a)B \ \forall\, a \in \mathcal{A}\} = \{cI : c \in \mathbb{C}\}$.

(c) $\overline{\{\pi(a)x : a \in \mathcal{A}\}} = \mathbf{H} \ \ \forall\, x \in \mathbf{H} \setminus \{\Theta\}$.

Beweis. (a)⇒(b): Es seien $(\mathbf{H}, \pi)$ eine irreduzible Dartsellung von $\mathcal{A}$, $B \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ und $B\pi(a) = \pi(a)B \ \forall\, a \in \mathcal{A}$ sowie $B = B_1 + \mathbf{i}B_2$ mit $B_j^* = B_j$. Es folgt $B_j \in \operatorname{comm} R(\pi)$, $j = 1, 2$. Es seien $\lambda, \mu \in \sigma(B_1)$ und $\lambda \neq \mu$. Dann existieren $f, g \in \mathbf{C}(\sigma(B_1))$ mit $f(\lambda) = 1$, $g(\mu) = 1$ und $f(\eta)g(\eta) = 0 \ \forall\, \eta \in \sigma(B_1)$. Das liefert $f(B_1)g(B_1) = \Theta$. Da $\operatorname{comm} R(\pi)$ abgeschlossen ist, ist auch $g(B_1) \in \operatorname{comm} R(\pi)$, also $\pi(a)g(B_1)x = g(B_1)\pi(a)x \in g(B_1)(\mathbf{H}) \ \forall\, x \in \mathbf{H}$. Damit ist $\overline{g(B_1)(\mathbf{H})}$ ein abgeschlossener und bezüglich $R(\pi)$ invarianter Teilraum. Wegen $g(\mu) = 1$ ist $g(B_1) \neq \Theta$, so dass $\overline{g(B_1)(\mathbf{H})} = \mathbf{H}$ (topologische Irreduzibilität!) folgt, d.h., $g(B_1)(\mathbf{H})$ ist dicht in $\mathbf{H}$. Mit $f(B_1)g(B_1) = \Theta$ folgt daraus $f(B_1) = \Theta$ im Widerspruch zu $f(\lambda) = 1$. Damit besteht $\sigma(B_1)$ aus nur einer Zahl, sagen wir $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Es ist also $\sigma(B_1 - \lambda_1 I) = \{0\}$ und somit $B_1 = \lambda_1 I$. Analog gilt $B_2 = \lambda_2 I$.

(b)⇒(c): Es sei $x \in \mathbf{H} \setminus \{\Theta\}$. Wegen $\pi(a)\pi(b)x = \pi(ab)x$ ist $\mathbf{H}_1 := \overline{\{\pi(a)x : a \in \mathcal{A}\}}$ ein abgeschlossener und bezüglich $R(\pi)$ invarianter Teilraum. Somit ist (vgl. (3.2)) $P_1 := P_{\mathbf{H}_1} \in \operatorname{comm} R(\pi)$, so dass $P_1 = \gamma I$ mit einer Zahl $\gamma \in \mathbb{C}$ gilt. Aus $P_1^2 = P_1$ folgt $\gamma = 1$ oder $\gamma = 0$, d.h. $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$ oder $\mathbf{H}_1 = \{\Theta\}$. Da $(\mathbf{H}, \pi)$ als nichttrivial vorausgesetzt ist, ist nur $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$ möglich.

(c)⇒(a): Es seien $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}$ ein abgeschlossener und bezüglich $R(\pi)$ invarianter Teilraum sowie $x \in \mathbf{H}_1 \setminus \{\Theta\}$. Es folgt $\pi(a)x \in \mathbf{H}_1 \ \forall\, a \in \mathcal{A}$, also auch $\overline{\{\pi(a)x : a \in \mathcal{A}\}} \subset \mathbf{H}_1$ und somit $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$. □

Wir bemerken, dass die Menge der Zustände $\mathcal{A}_S$ eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{A}^*$ ist. Ein Zustand $f \in \mathcal{A}_S$ heißt **rein**, wenn aus $g_1, g_2 \in \mathcal{A}_S$, $0 < \mu < 1$ und $f = \mu g_1 + (1-\mu)g_2$ folgt $g_1 = g_2 = f$.

Satz 3.18 *Sind $(\mathbf{H}, \pi)$ eine zyklische Darstellung, $\overline{\{\pi(a)x_f : a \in \mathcal{A}\}} = \mathbf{H}$, $\|x_f\| = 1$ und*

$$f(a) = \langle \pi(a)x_f, x_f \rangle \quad \forall\, a \in \mathcal{A},$$

so ist $f \in \mathcal{A}_S$ genau dann rein, wenn $(\mathbf{H}, \pi)$ topologisch irreduzibel ist.

Beispiel 3.19 *Ist $(\mathbf{H}, \pi)$ eine topologisch irreduzible Darstellung der kommutativen C^*-Algebra $\mathcal{A}$, so ist π unitär äquivalent zu einem linearen multiplikativen Funktional $f \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$.*

Satz 3.20 *Sind $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ ein abgeschlossenes Ideal der C^*-Algebra $\mathcal{A}$ und $(\mathbf{H}, \pi_0)$ eine topologisch irreduzible Darstellung der C^*-Teilalgebra $\mathcal{J}$ (i.a. ohne Einselement), so gibt es genau eine Darstellung $(\mathbf{H}, \pi)$ von $\mathcal{A}$ mit $\pi|_{\mathcal{J}} = \pi_0$. Diese Darstellung ist topologisch irreduzibel.*

(A) Für ein abgeschlossenes Ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$ und eine topologisch irreduzible Darstellung $(\mathbf{H}, \pi)$ von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{J} \subset N(\pi)$ definieren wird

$$\pi_{\mathcal{J}} : \mathcal{A}/\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{H}), \quad a + \mathcal{J} \mapsto \pi(a).$$

Die Abbildung $(\mathbf{H}, \pi) \mapsto (\mathbf{H}, \pi_{\mathcal{J}})$ ist eine Bijektion zwischen der Menge der topologisch irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{A}$, die auf $\mathcal{J}$ verschwinden, und der Menge der topologisch irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{A}/\mathcal{J}$.

(B) Ist $(\mathbf{H}, \pi)$ eine topologisch irreduzible Darstellung mit $\mathcal{J} \not\subset N(\pi)$, so ist $(\mathbf{H}_0, \pi|_{\mathcal{J}})$ eine topologisch irreduzible Darstellung von $\mathcal{J}$, wobei

$$\mathbf{H}_0 := \mathbf{H} \ominus \mathbf{H}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{H}_1 = \{x \in \mathbf{H} : \pi(b)x = \Theta \;\forall\, b \in \mathcal{J}\}.$$

(C) Wir betrachten die Algebra $\mathcal{A} = \mathrm{alg}\mathcal{T}(\mathbf{C}) \overset{(TC2)}{=} \{T(a) : a \in \mathbf{C}(\mathbb{T})\} + \mathcal{K}(\ell^2)$. Nach den Überlegungen in (A) und Beispiel 3.19 können wir die Menge der topologisch irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{A}$, die auf $\mathcal{K}(\ell^2)$ verschwinden, mit der Menge $\mathbf{M}_{\mathcal{A}/\mathcal{K}(\ell^2)}$ der linearen multiplikativen Funktionale auf $\mathcal{A}/\mathcal{K}(\ell^2)$ identifizieren.

(D) Jede topologisch irreduzible Darstellung von $\mathcal{K}(\ell^2)$ ist unitär äquivalent zu $\left(\ell^2, \mathrm{id}_{\mathcal{K}(\ell^2)}\right)$.

(E) Ist $(\mathbf{H}, \pi)$ eine topologisch irreduzible Darstellung von $\mathrm{alg}\mathcal{T}(\mathbf{C})$ mit $\mathcal{K}(\ell^2) \not\subset N(\pi)$, so ist nach (B) $\left(\mathbf{H}_0, \pi|_{\mathcal{K}(\ell^2)}\right)$ eine topologisch irreduzible Darstellung von $\mathcal{K}(\ell^2)$, die nach (D) unitär äquivalent zu (ℓ^2, id) ist. Nach Satz 3.20 kann damit $(\mathbf{H}, \pi)$ nur unitär äquivalent zu $\left(\ell^2, \mathrm{id}_{\mathrm{alg}\mathcal{T}(\mathbf{C})}\right)$ sein.

Index