Skript zur Vorlesung

Funktionalanalysis

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] H. W. Alt, Lineare Funktionalanalysis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[2] A. Böttcher, Analysis - Skript zur Vorlesung 2010/11 von A. T. Oestreich,
http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/ang_funktionalanalysis/rost/
AnalysisI-II-Mathematiker/Kap1-9.pdf

[3] B. Choudhary, S. Nanda, Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New Delhi.

[4] M. Dobrowolski, Angewandte Funktionalanalysis- Funktionalanalysis, Sobolev-Räume und elliptische Differentialgleichungen, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[5] I. M. Gelfand, D. A. Raikov, G. E. Schilow, Kommutative normierte Algebren, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.

[6] A. Göpfert, T. Riedrich, C. Tammer, Angewandte Funktionalanalysis - Motivationen und Methoden für Mathematiker und Wirtschaftswissenschaftler, Vieweg+Teubner, Wiesbaden.

[7] H. Heuser, Funktionalanalysis, Theorie und Anwendung, Teubner, Stuttgart.

[8] F. Hirzebruch, W. Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis, Spektrum, Akademie Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford.

[9] P. Junghanns, Analysis I/II - Skript zur Vorlesung 2013/14,
http://www-user.tu-chemnitz.de/~peju/skripte/lehre/ana.html

[10] P. Junghanns, Maßtheorie - Skript zur Vorlesung WS 2014/15,
http://www-user.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/mass.html

[11] L. A. Ljusternik, W. I. Sobolew, Elemente der Funktionalanalysis, Akademie-Verlag, Berlin.

[12] N. K. Nikol'skij, Functional Analysis I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[13] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[14] M. Schechter, Principles of Functional Analysis, Academic Press, New York.

[15] C. Swartz, Measure, Integration and Function Spaces, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

[16] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

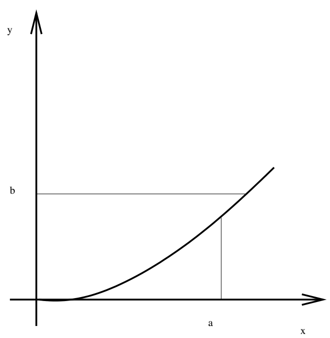
Kapitel 0

Vorbereitungen

0.1 Ungleichungen

Man vergleiche hierzu die 2. Übung, Aufgabe 5 zu [10].

Es seien $p > 1$ und $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ ist offenbar nicht größer als die Summe der Inhalte der Flächen, die von der ξ– bzw. der η–Achse und dem Graphen der Funktion $\eta = \xi^{p-1}$ begrenzt werden (siehe Abb.). Die Gleichung der Umkehrfunktion lautet $\xi = \eta^{q-1}$.



Es folgt

$$\alpha\beta \le \int_0^\alpha \xi^{p-1}\, d\xi + \int_0^\beta \eta^{q-1}\, d\eta = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\,, \quad \alpha, \beta \ge 0\,. \tag{0.1}$$

Sind wenigstens eine der Zahlen $\xi_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, m$, und eine der Zahlen $\eta_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, m$, von Null verschieden, so folgt mit

$$\alpha_j = \frac{\xi_j}{\left(\sum_{k=1}^m |\xi_k|^p \right)^{1/p}} \quad \text{und} \quad \beta_j = \frac{\eta_j}{\left(\sum_{k=1}^m |\eta_k|^q \right)^{1/q}}$$

unter Verwendung von (0.1)

$$\left| \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_j \right| \le \sum_{j=1}^m |\alpha_j|\, |\beta_j| \le \frac{1}{p} \sum_{j=1}^m \frac{|\xi_j|^p}{\left(\sum_{k=1}^m |\xi_k|^p \right)} + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^m \frac{|\eta_j|^q}{\left(\sum_{k=1}^m |\eta_k|^q \right)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Wir erhalten die **Hölder-Ungleichung**

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \xi_j \eta_j\right| \le \left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{m} |\eta_j|^q\right)^{1/q}, \tag{0.2}$$

die für beliebige $\xi_j, \eta_j \in \mathbb{C}$ und $p > 1, q > 1$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ gilt. Für $p = q = 2$ ist diese als **Cauchy-Schwarz-** bzw. **Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung** bekannt. Aus (0.2) folgt auch

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} |\xi_j + \eta_j|^p &\le \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|\,|\xi_j + \eta_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{m} |\eta_j|\,|\xi_j + \eta_j|^{p-1} \\ &\le \left[\left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{m} |\eta_j|^p\right)^{1/p}\right] \left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j + \eta_j|^{q(p-1)}\right)^{1/q},\end{aligned}$$

so dass sich wegen $q(p-1) = p$ und $1 - q^{-1} = p^{-1}$ die **Minkowski-Ungleichung**

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{m} |\eta_j|^p\right)^{1/p} \tag{0.3}$$

ergibt, die trivialerweise auch für $p = 1$ gilt.

0.2 Metrische Räume

Man vergleiche hierzu Kapitel 2 und Kapitel 3 in [9].

Unter einem **metrischen Raum X** versteht man ein geordnetes Paar $(\mathbf{X}, d)$ aus einer nichtleeren Menge (den Punkten des Raumes) und einer Abbildung $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow [0, \infty)$ (der Metrik), die folgenden Axiomen genügt:

(M1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}$,

(M3) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbf{X}$ (Dreiecksungleichung).

Eine Punktfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{X}$ nennt man **konvergent** mit dem **Grenzwert** $x^* \in \mathbf{X}$ (in Zeichen: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$), wenn $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x^*) = 0$ gilt. Der Grenzwert einer konvergenten Punktfolge ist offenbar eindeutig bestimmt, und jede Teilfolge einer konvergenten Punktfolge ist ebenfalls konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

Zu gegebenen $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbf{X}$ bezeichnen

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbf{X} : d(x, y) < \varepsilon\} \quad \text{und} \quad K_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbf{X} : d(x, y) \le \varepsilon\}$$

die **offene Kugel** mit dem Mittelpunkt x sowie dem Radius ε (auch ε-**Umgebung** von x genannt) und die entsprechende **abgeschlossene Kugel**. Für eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ des metrischen Raumes $\mathbf{X}$ definiert man die Menge

$$\operatorname{int}(A) := \{x \in A : \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \subset A\}$$

der **inneren Punkte** von A und die Menge

$$\overline{A} := \{x \in \mathbf{X} : \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, y \in A \text{ mit } y \in U_\varepsilon(x)\}$$

der **Berührungspunkte** von A. Man nennt $A \subset \mathbf{X}$

- **offen**, wenn $\mathrm{int}(A) = A$,
- **abgeschlossen**, wenn $\overline{A} = A$

gilt. Ein Punkt $x \in A$ heißt **isolierter Punkt** von A, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $A \cap U_\varepsilon(x) = \{x\}$ existiert. Einen Berührungspunkt von A, der kein isolierter Punkt von A ist, nennt man **Häufungspunkt** von A. Die Menge der Häufungspunkte von A bezeichnet man auch mit A'.

Satz 0.1 (vgl. [9], Satz 2.23, Satz 3.2,(c)) *Für beliebige Teilmengen $A \subset \mathbf{X}$ eines metrischen Raumes $\mathbf{X}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *A ist abgeschlossen.*

(b) *$\mathbf{X} \setminus A$ ist offen.*

(c) *Es gilt $A' \subset A$.*

(d) *Aus $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\} \subset A$ und $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ folgt stets $x^* \in A$.*

Im Umgang mit offenen und abgeschlossenen Mengen sind folgende Aussagen wichtig (vgl. [9, Satz 2.23,(d),(e)]):

- Die Vereinigung und der Durchschnitt endlich vieler offener bzw. abgeschlossener Mengen sind offen bzw. abgeschlossen: Sind z.B. $A_1, A_2 \in \mathbf{X}$ abgeschlossen und $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A_1 \cap A_2$ mit $x_n \longrightarrow x^*$, so folgt aus Satz 0.1,(d) $x^* \in A_1 \cap A_2$ und somit die Abgeschlossenheit von $A_1 \cap A_2$. Ist $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A_1 \cup A_2$ mit $x_n \longrightarrow x^*$, so existiert wenigstens eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$, die ganz in A_1 oder in A_2 liegt, so dass $x^* \in A_1$ oder $x^* \in A_2$ gilt, also $x^* \in A_1 \cup A_2$, und die Abgeschlossenheit von $A_1 \cup A_2$ folgt wieder aus Satz 0.1,(d). Die Aussagen für offene Mengen ergeben sich aus $\mathbf{X} \setminus (A_1 \cap A_2) = (\mathbf{X} \setminus A_1) \cup (\mathbf{X} \setminus A_2)$ und $\mathbf{X} \setminus (A_1 \cup A_2) = (\mathbf{X} \setminus A_1) \cap (\mathbf{X} \setminus A_2)$ sowie Satz 0.1,(b).
- Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen: Sind die Mengen $A_\alpha \subset \mathbf{X}$ offen und $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha$, so folgt die Existenz eines $\alpha_0 \in \mathcal{I}$ und eines $\varepsilon > 0$ mit $x \in A_{\alpha_0}$ und $U_\varepsilon(x) \subset A_{\alpha_0}$, also $U_\varepsilon(x) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha$.
- Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen: Man verwende die vorhergehende Aussage, Satz 0.1 und $\mathbf{X} \setminus \bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{I}} (\mathbf{X} \setminus A_\alpha)$.

Sind A und B Teilmengen eines metrischen Raumes $\mathbf{X}$, so sagt man, dass A in B dicht liegt, wenn $\overline{A} \supset B$ gilt. Insbesondere ist A dicht in $\mathbf{X}$, wenn $\overline{A} = \mathbf{X}$ ist. Einen metrischen Raum $\mathbf{X}$ nennt man **separabel**, wenn er eine abzählbare, dichte Teilmenge $\{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ enthält, d.h. $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}} = \mathbf{X}$ (oder: $\forall\, x \in \mathbf{X}$ und $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}_0 : d(x_N, x) < \varepsilon$).

Eine Punktfolge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}$ nennt man **Cauchyfolge** oder **Fundamentalfolge**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m > N$ existiert. Der metrische Raum $(\mathbf{X}, d)$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in $\mathbf{X}$ konvergent in $\mathbf{X}$ ist.

Folgerung 0.2 *Ist* $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ *eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes* $(\mathbf{X}, d)$, *so ist* $(\mathbf{X}_0, d)$ *ein vollständiger metrischer Raum.*

Beispiel 0.3 (Raum aller Zahlenfolgen) *Das geordnete Paar* $(\mathbf{s}, d)$ *mit*

$$\mathbf{s} = \{\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} : \xi_n \in \mathbb{C}\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

und

$$d(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}$$

ist ein vollständiger und separabler metrischer Raum. Die Konvergenz in $\mathbf{s}$ *ist äquivalent zur koordinatenweisen Konvergenz.*

Beispiel 0.4 (Raum der beschränkten Zahlenfolgen) *Auf*

$$\ell^{\infty} = \left\{\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} : \xi_n \in \mathbb{C}\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots\,,\ \sup_{n=0,1,2,\ldots} |\xi_n| < \infty\right\}$$

wird durch

$$d_{\infty}(\xi, \eta) = \sup_{n=0,1,2,\ldots} |\xi_n - \eta_n|$$

eine Metrik definiert (vgl. [9, Bsp. 2.28]). Der metrische Raum $(\ell^{\infty}, d_{\infty})$ *ist vollständig (vgl. [9, Bsp. 5.3], aber nicht separabel.*

Beispiel 0.5 (weitere Beispiele metrischer Räume)

1. $(\mathbf{c}, d_{\infty})$ *mit* $\mathbf{c} = \left\{\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} : \xi_n \in \mathbb{C}\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots\,,\ \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n \in \mathbb{C}\right\}$

   (*Raum der konvergenten Zahlenfolgen*)

2. $(\mathbf{c}_0, d_{\infty})$ *mit* $\mathbf{c}_0 = \left\{\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} : \xi_n \in \mathbb{C}\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots\,,\ \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0\right\}$

   (*Raum der Nullfolgen*)

3. $1 \le p < \infty$, (ℓ^p, d_p) *mit* $\ell^p = \left\{\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} : \xi_n \in \mathbb{C}\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots\,,\ \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty\right\}$ *und*

$$d_p(\xi, \eta) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p\right)^{1/p}$$

   (*Raum der zur* p*-ten Potenz summierbaren Zahlenfolgen*)

4. $(\mathbf{C}[0,1], d_{\infty})$ *mit* $\mathbf{C}[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig*$\}$ *und*

$$d_{\infty}(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\}$$

   (*Raum der auf* $[0,1]$ *stetigen komplexwertigen Funktionen*)

5. $(\mathbf{C}^{(m)}[0,1], d_{\infty,m})$ *mit* $m = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\mathbf{C}^{(m)}[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ ist } m \text{ mal stetig differenzierbar}\}$$

und

$$d_{\infty,m}(f,g) = \sum_{k=0}^{m} d_\infty(f^{(k)}, g^{(k)})$$

(*Raum der auf* $[0,1]$ m *mal stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen, Vereinbarungen:* $f^{(0)} = f$, $d_{\infty,0} = d_\infty$, $\mathbf{C}^{(0)}[0,1] = \mathbf{C}[0,1]$)

Einen linearen Raum $\mathbf{X}$ über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder der komplexen Zahlen (auch $\mathbb{K}$-Vektorraum genannt) nennt man **normierten Raum**, wenn eine Abbildung $\mathbf{X} \longrightarrow [0,\infty)$, $x \mapsto \|x\|$ mit folgenden Eigenschaften gegeben ist:

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = \Theta$,

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| \quad \forall\, x \in \mathbf{X} ,\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$,

(N3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}$ (Dreiecksungleichung).

Folgerung 0.6 *In einem normierten Raum* $\mathbf{X}$ *gilt*

$$\Big|\, \|x\| - \|y\| \,\Big| \le \|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in \mathbf{X} .$$

Folgerung 0.7 *Ist* $(\mathbf{X}, \|.\|)$ *ein normierter Raum, so ist* $(\mathbf{X}, d)$ *mit* $d(x,y) = \|x-y\|$ *ein metrischer Raum.*

Wenn dieser zugeordnete metrische Raum vollständig ist, so nennt man $(\mathbf{X}, \|.\|)$ einen **vollständigen normierten Raum** oder **Banachraum**.

Folgerung 0.8 *Die Räume* $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$, $(\mathbf{c}, \|.\|_\infty)$, $(\mathbf{c}_0, \|.\|_\infty)$ *und* $(\ell^p, \|.\|_p)$, $1 \le p < \infty$, *mit*

$$\|\xi\|_\infty = \sup_{n=0,1,2,\ldots} |\xi_n| \quad \text{und} \quad \|\xi\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{1/p}$$

sowie $(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_\infty)$ *und* $\left(\mathbf{C}^{(m)}[0,1], \|.\|_{\infty,m}\right)$ *mit*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \quad \text{und} \quad \|f\|_{\infty,m} = \sum_{k=0}^{m} \left\|f^{(k)}\right\|_\infty$$

sind Banachräume (vgl. die Beispiele 0.4 und 0.5 und Aufgabe 3 in Abschnitt 0.5), die bis auf ℓ^∞ *auch separabel sind.*

Unter einer **offenen Überdeckung** einer Menge $A \subset \mathbf{X}$ versteht man eine Familie $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ von offenen Mengen $U_\alpha \subset \mathbf{X}$, so dass $A \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha$ gilt. Man nennt eine solche Überdeckung **endlich**, wenn sie nur aus endlich vielen Mengen U_α besteht. Eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ heißt **kompakt**, wenn aus jeder offenen Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann. Man nennt $A \subset \mathbf{X}$ **relativ kompakt** oder **präkompakt**, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

Eine Menge $B \subset \mathbf{X}$ heißt ε-**Netz** zu $A \subset \mathbf{X}$, wenn für jedes $x \in A$ ein $y \in B$ mit $d(x,y) < \varepsilon$ existiert. Folgende Tatsache ist oft von Nutzen: Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz zu A, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ auch ein endliches ε-Netz zu A, welches nur aus Punkten von A besteht. Sind nämlich $\varepsilon > 0$ und $B = \{x_1, \ldots, x_N\}$ ein endliches $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz zu A, so können wir o.E.d.A. annehmen, dass $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j) \cap A \neq \emptyset$ für alle $j = 1, \ldots, N$ gilt (andernfalls würden wir das entsprechende x_j gar nicht für das Netz benötigen). Wählen wir nun ein $y_j \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j) \cap A$ für jedes $j = 1, \ldots, N$ aus, so folgt für jedes $x \in A$, dass ein $j \in \{1, \ldots, N\}$ mit $d(x, x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ existiert, so dass $d(x, y_j) < d(x, x_j) + d(x_j, y_j) < \varepsilon$ gilt.

Satz 0.9 *Es sei $A \subset \mathbf{X}$ eine Teilmenge des metrischen Raumes $\mathbf{X}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *A ist kompakt.*

(b) *Aus jeder Punktfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ kann eine konvergente Teilfolge ausgewählt werden, deren Grenzwert zu A gehört (vgl. [9, Satz 3.3]).*

(c) *Jede unendliche Teilmenge von A besitzt einen Häufungspunkt, der zu A gehört.*

Man nennt $A \subset \mathbf{X}$ **beschränkt**, wenn ein $R > 0$ und ein $x \in \mathbf{X}$ mit $A \subset U_R(x)$ existieren. Dies ist äquivalent zu $\sup\{d(x,y) : x, y \in A\} < \infty$.

Folgerung 0.10 *Ist A präkompakt, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz für A. Jede kompakte Menge ist abgeschlossen und beschränkt. Jeder kompakte metrische Raum ist separabel und vollständig.*

Sind $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ zwei metrische Räume, so kann man auf $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ z.B. die Metriken

$$d_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \left([d_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)]^p + [d_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2)]^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \le p < \infty, \tag{0.4}$$

und

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_{\mathbf{X}}(x_1, x_2), d_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2)\} \tag{0.5}$$

definieren. Die dadurch auf $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ definierten Konvergenzen bzw. Topologien sind qüivalent. Die Abbildung $d_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto d_{\mathbf{X}}(x,y)$ erweist sich dann als stetig.

Auch äquivalente Normen definieren äquivalente Konvergenzbegriffe bzw. Topologien. Man nennt zwei Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ auf einem linearen Raum $\mathbf{X}$ zueinander **äquivalent**, wenn positive Konstanten c_1, c_2 existieren, so dass

$$c_1 \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2 \|x\|_1 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}$$

gilt. Auf dem Kreuzprodukt $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ zweier normierter Räume $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{X}})$ und $(\mathbf{Y}, \|.\|_{\mathbf{Y}})$ kann man entsprechend zu (0.4) bzw. (0.5) verschiedene äquivalente Normen definieren, also

$$\|(x,y)\|_p := \left(\|x\|_{\mathbf{X}}^p + \|y\|_{\mathbf{Y}}^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \le p < \infty, \quad \text{oder} \quad \|(x,y)\|_\infty := \max\{\|x\|_{\mathbf{X}}, \|y\|_{\mathbf{Y}}\}.$$

Dabei ist $(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$ äquivalent zu $x_n \longrightarrow x$ und $y_n \longrightarrow y$.

Eine Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $x \mapsto f(x)$ zwischen zwei metrischen Räumen $(\mathbf{X}, d_{\mathbf{X}})$ und $(\mathbf{Y}, d_{\mathbf{Y}})$ nennt man **stetig**, wenn für jedes $x_0 \in \mathbf{X}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $x \in U_\delta(x_0)$ stets $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$ (d.h. $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$) folgt . Man nennt sie **gleichmäßig stetig**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d_{\mathbf{Y}}(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ mit $d_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) < \delta$ gilt.

Satz 0.11 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) *Die Abbildung* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *ist stetig.*

(b) *Aus* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{X}$ *und* $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *folgt* $f(x^*) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ *(vgl. [9, Satz3.22,(a)]).*

(c) *Für jede offene Menge* $A \subset \mathbf{Y}$ *ist* $f^{-1}(A)$ *offen (vgl. [9, Satz 2.44,(b)]).*

(d) *Für jede abgeschlossene Menge* $A \subset \mathbf{Y}$ *ist* $f^{-1}(A)$ *abgeschlossen (vgl. [9, Satz 2.44,(c)]).*

Folgerung 0.12 *Für einen normierten Raum* $\mathbf{X}$ *sind die Abbildungen* $\mathbf{X}\times\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ *und* $\mathbb{K} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ *sowie* $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ *stetig.*

Sind $\mathbf{X}$ ein normierter Raum und $x_n \in \mathbf{X}$, $n \in \mathbb{N}$, so kann man die **Reihe** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ betrachten. Man nennt diese Reihe **konvergent**, falls die Folge $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ der Partialsummen konvergiert. Unter ihrer **Summe** versteht man den Grenzwert der Folge der Partialsummen, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Man nennt die Reihe **absolut konvergent**, wenn die Zahlenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ konvergiert.

Satz 0.13 *Ein normierter Raum* $\mathbf{X}$ *ist genau dann Banachraum, wenn in ihm jede absolut konvergente Reihe auch konvergent ist.*

Satz 0.14 (vgl. [9], Satz 3.22,(b),(c)) *Es seien* $\mathbf{X}$ *ein kompakter und* $\mathbf{Y}$ *ein beliebiger metrischer Raum und* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *eine stetige Abbildung. Dann ist* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *gleichmäßig stetig. Im Fall* $\mathbf{Y} = \mathbb{R}$ *existieren Punkte* $x_u^*, x_o^* \in \mathbf{X}$ *mit*

$$f(x_u^*) \le f(x) \le f(x_o^*) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,.$$

Beispiel 0.15 *Ausgehend von Satz 0.14 kann man den normierten Raum* $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbb{C})$ *der stetigen, komplexwertigen Abbildungen* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ *auf dem kompakten metrischen Raum* $\mathbf{X}$ *mit der Norm*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{X}\}$$

definieren, der sich analog zu Beispiel 0.5, 4. als vollständig erweist (vgl. auch [9, Bsp. 5.3].

Eine Familie $\mathcal{F}$ von Funktionen $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ auf einem metrischen Raum $(\mathbf{X}, d)$ nennt man **gleichgradig stetig**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall\, f \in \mathcal{F},\ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{X} \quad \text{mit} \quad d(x_1, x_2) < \delta$$

gilt. $\mathcal{F}$ heißt **gleichmäßig beschränkt**, wenn eine Konstante $M > 0$ existiert, so dass

$$|f(x)| \le M \quad \forall\, f \in \mathcal{F},\ \forall\, x \in \mathbf{X}\,.$$

Theorem 0.16 (Arzela-Ascoli) *Es sei* $\mathbf{X}$ *ein kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge* $\mathcal{F} \subset \mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbb{C})$ *ist genau dann präkompakt in* $(\mathbf{C}(\mathbf{X}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$, *wenn die Funktionen aus* $\mathcal{F}$ *gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sind.*

Eine Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ zwischen zwei metrischen Räumen $(\mathbf{X}, d_{\mathbf{X}})$ und $(\mathbf{Y}, d_{\mathbf{Y}})$ nennt man **kontrahierend**, wenn ein $q \in (0,1)$ existiert, so dass

$$d_{\mathbf{Y}}(f(x_1), f(x_2)) \leq q\, d_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{X}$$

gilt.

Satz 0.17 (Banach'scher Fixpunktsatz, vgl. [9], Satz 4.46) *Es seien* $(\mathbf{X}, d)$ *ein vollständiger metrischer Raum und* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ *eine kontrahierende Abbildung mit der Kontraktionskonstanten* q. *Dann besitzt* f *in* $\mathbf{X}$ *genau einen* **Fixpunkt** $x^* \in \mathbf{X}$, *d.h. genau eine Lösung der Gleichung* $x = f(x)$. *Dabei gilt für jedes* $x_0 \in X$ *und*

$$x_n = f(x_{n-1})\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{0.6}$$

die Beziehung $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ *mit der a-priori Abschätzung*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1, x_0)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{0.7}$$

Das durch (0.6) beschriebene Verfahren zur näherungsweisen Berechnung einer Lösung der Gleichung $x = f(x)$ nennt man **Methode der sukzessiven Approximation**.

Satz 0.18 (Cantor'scher Durchschnittssatz) *Es sei* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge abgeschlossener, nichtleerer Teilmengen des vollständigen metrischen Raumes* $\mathbf{X}$, *deren Durchmesser*

$$d(A_n) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A_n\}$$

eine Nullfolge bilden und für die $A_{n+1} \subset A_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt. Dann existiert genau ein* $x^* \in \mathbf{X}$ *mit* $x^* \in A_n\ \forall\, n = 1, 2, \ldots$

Eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ des metrischen Raumes $\mathbf{X}$ nennt man **nirgends dicht** in $\mathbf{X}$, wenn jede offene Kugel in $\mathbf{X}$ eine zu A durchschnittsfremde offene Kugel enthält. Die Menge A heißt von **erster Kategorie**, wenn sie als Vereinigung höchstens abzählbar vieler nirgends dichter Mengen darstellbar ist. Man nennt sie von **zweiter Kategorie**, wenn sie nicht von erster Kategorie ist.

Satz 0.19 (Baire'scher Satz) *Jeder vollständige metrische Raum* $\mathbf{X}$ *ist (in sich selbst) eine Menge zweiter Kategorie.*

Folgerung 0.20 *Jeder vollständige metrische Raum ohne isolierte Punkte ist eine überabzählbare Menge.*

Ein System $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\} \subset \mathbf{X}$ nichtleerer offener Teilmengen $G_\alpha \subset \mathbf{X}$ heißt **Basis** des metrischen Raumes $\mathbf{X}$, wenn jede nichtleere offene Teilmenge von $\mathbf{X}$ als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{G}$ darstellbar ist.

Satz 0.21 *Ein metrischer Raum ist genau dann separabel, wenn er eine höchstens abzählbare Basis besitzt.*

0.3 Vervollständigung metrischer Räume

Beispiel 0.22 *Wir definieren auf der Menge* $\mathbf{C}[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$ *der stetigen komplexwertigen Funktionen über dem Interval* $[0,1]$ *die Metrik*

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

Dann ist der metrische Raum $(\mathbf{C}[0,1], d_1)$ *nicht vollständig.*

Es seien $(\mathbf{X}, d)$ ein metrischer Raum und $\widetilde{\mathbf{X}}$ die Menge aller Cauchyfolgen $(x_n) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbf{X}$. Auf $\widetilde{\mathbf{X}}$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0\,. \tag{0.8}$$

Mit $\mathcal{X}$ sei die Menge der Äquivalenzklassen $[(x_n)]_\sim$ mit $(x_n) \in \widetilde{\mathbf{X}}$ bezeichnet. Auf $\mathcal{X}$ definieren wir

$$d_{\mathcal{X}}\left([(x_n)]_\sim, [(y_n)]_\sim\right) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)\,. \tag{0.9}$$

Ferner sei $\mathcal{X}_0 = \{[(x)]_\sim : x \in \mathbf{X}\}$.

Satz 0.23 *Es ist* $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ *ein metrischer Raum. Dabei gilt:*

(a) *Die Abbildung* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathcal{X}_0$, $x \mapsto [(x)_{n=0}^{\infty}]_\sim$ *ist eine* **Isometrie**, *d.h.*

$$d_{\mathcal{X}}(f(x), f(y)) = d(x,y) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}\,.$$

(b) *Der Raum* $\mathcal{X}_0$ *ist* **dicht** *in* $\mathcal{X}$, *d.h.* $\overline{\mathcal{X}_0} = \mathcal{X}$.

(c) *Der metrische Raum* $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ *ist vollständig.*

Definition 0.24 *Ein metrischer Raum* $(\mathbf{Y}, d_{\mathbf{Y}})$ *heißt* **Vervollständigung** *eines metrischen Raumes* $(\mathbf{X}, d_{\mathbf{X}})$, *wenn* $(\mathbf{Y}, d_{\mathbf{Y}})$ *vollständig ist und einen dichten Teilraum* $\mathbf{Y}_0$ *enthält, der zu* $\mathbf{X}$ **isometrisch** *ist (d.h., es existiert eine bijektive Abbildung* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}_0$ *mit* $d_{\mathbf{Y}}(f(x_1), f(x_2)) = d_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)\ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{X}$).

Bemerkung 0.25 *Die Vervollständigung eines metrischen Raumes ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.*

Es seien $(\mathbf{X}, \|.\|)$ ein normierter Raum und $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ die eben konstruierte Vervollständigung des zugeordneten metrischen Raumes. Durch die Definitionen

$$\alpha[(x_n)]_\sim + \beta[(y_n)]_\sim = [(\alpha x_n + \beta y_n)]_\sim\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}\,,\ [(x_n)]_\sim, [(y_n)]_\sim \in \mathcal{X}\,, \tag{0.10}$$

und

$$\|[(x_n)]_\sim\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|\ , \quad [(x_n)]_\sim \in \mathcal{X}\,, \tag{0.11}$$

wird $\mathcal{X}$ zu einem Banachraum.

0.4 Räume mit Skalarprodukt

Es sei $\mathbf{H}$ ein linearer Raum (i.a. über dem Körper der komplexen Zahlen). Eine Abbildung $\mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ heißt **Skalarprodukt** oder **inneres Produkt** auf $\mathbf{H}$, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(S1) $\langle x,x\rangle \ge 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}$ und $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = \Theta$,

(S2) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} \quad \forall\, x,y \in \mathbf{H}$,

(S3) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle \quad \forall\, x,y,z \in \mathbf{H},\ \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{C}$.

Es gilt die **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**

$$|\langle x,y\rangle| \le \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} \quad \forall\, x,y \in \mathbf{H}. \tag{0.12}$$

Unter Verwendung dieser Ungleichung kann man zeigen, dass durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \tag{0.13}$$

eine Norm auf $\mathbf{H}$ definiert wird. Ein Raum $(\mathbf{H}, \langle .,.\rangle)$ mit Skalarprodukt heißt **Hilbertraum**, wenn $(\mathbf{H}, \|.\|)$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ ein Banachraum ist.

Folgerung 0.26 *Es sei $(\mathbf{H}, \langle .,.\rangle)$ ein Raum mit Skalarprodukt.*

(a) *Ist $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$, so ist*

$$\mathbf{L}^\perp := \{x \in \mathbf{H} : \langle x,y\rangle = 0\ \forall\, y \in \mathbf{L}\}$$

ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{H}$.

(b) *Die Abbildung $\mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ ist stetig.*

Folgerung 0.27 *Es sei $(\mathbf{H}, \langle .,.\rangle)$ ein Hilbertraum.*

(a) *Ist $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{H}$, so lässt sich jedes $x \in \mathbf{H}$ auf eindeutige Weise in der Form $x = y + z$ mit $y \in \mathbf{L}$ und $z \in \mathbf{L}^\perp$ darstellen. Dabei gilt*

$$\|x - y\| := \inf\{\|x - w\| : w \in \mathbf{L}\}\ .$$

Der Vektor y heißt **orthogonale Projektion** *von x auf $\mathbf{L}$ und $\mathbf{L}^\perp$* **orthogonales Komplement** *zu $\mathbf{L}$. Dabei gilt $\mathbf{L} \cap \mathbf{L}^\perp = \{\Theta\}$. Man schreibt $\mathbf{H} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{L}^\perp$ und sagt, dass $\mathbf{H}$ die* **direkte orthogonale Summe** *von $\mathbf{L}$ und $\mathbf{L}^\perp$ ist.*

(b) *Es sei $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ ein linearer Teilraum. Dann gilt $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{H}$ genau dann, wenn* **kein** *$x^* \in \mathbf{H}\backslash\{\Theta\}$ existiert, so dass $\langle x, x^*\rangle = 0$ für alle $x \in \mathbf{L}$ gilt.*

Ein System $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots\} = \{b_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbf{H}$ heißt **linear unabhängig**, wenn jedes endliche Teilsystem linear unabhängig ist. Das System B nennt man ein **Orthonormalsystem** (ONS), wenn $\langle b_j, b_k\rangle = \delta_{jk}$ für alle $j,k = 0,1,2,\ldots$ gilt. Man beachte, dass ein ONS automatisch linear unabhängig ist.

Folgerung 0.28 (Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren) *Es sei* $\{b_n : n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbf{H}$ *ein linear unabhängiges System. Wir setzen*

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\langle b_0, b_0 \rangle}}\, b_0 \,.$$

Dann gilt $\langle a_0, a_0 \rangle = 1$. *Wir bestimmen* $\beta_{10} \in \mathbb{C}$ *so, dass*

$$\widetilde{a}_1 = b_1 + \beta_{10} a_0$$

orthogonal zu a_0 *ist, d.h.* $\beta_{10} = -\langle b_1, a_0 \rangle$. *Da* $\widetilde{a}_1 \neq \Theta$ *gilt, können wir*

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_1 \rangle}}\, \widetilde{a}_1$$

setzen. Sind $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \operatorname{span}\{b_0, \ldots, b_{m-1}\}$ *so bestimmt, dass*

$$\langle a_j, a_k \rangle = \delta_{jk} \,, \quad j, k = 0, 1, \ldots, m-1 \,,$$

gilt, so setzen wir

$$\widetilde{a}_m = b_m + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{mk} a_k \quad \textit{mit} \quad \beta_{mk} = -\langle b_m, a_k \rangle$$

und

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{\langle \widetilde{a}_m, \widetilde{a}_m \rangle}}\, \widetilde{a}_m \,.$$

Auf diese Weise erhalten wir ein ONS $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *mit der Eigenschaft*

$$\operatorname{span}\{a_0, \ldots, a_n\} = \operatorname{span}\{b_0, \ldots, b_n\} \,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Folgerung 0.29 *Es seien* $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *ein ONS in* $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{L}_m = \operatorname{span}\{e_0, \ldots, e_m\} \,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \,,$$

und

$$\mathbf{L} = \left\{ \sum_{k=0}^{m} \alpha_k e_k : \alpha_k \in \mathbb{C},\, m = 0, 1, 2, \ldots \right\} = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbf{L}_m \,.$$

Dann ist

$$\sum_{k=0}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k$$

die **beste Approximation** *an* $x \in \mathbf{H}$ *durch Elemente aus* $\mathbf{L}_m$. *Die Zahlen* $\gamma_k = \langle x, e_k \rangle$ *werden die* **Fourierkoeffizienten** *von* x *bzgl. des ONS* $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *genannt. Dabei gilt die* **Bessel'sche Ungleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{H} \,.$$

Es ist $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{H}$ *äquivalent zu*

$$\lim_{m \to \infty} \left\| x - \sum_{k=0}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = 0 \,, \text{ d.h. } x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \,, \ \forall\, x \in \mathbf{H} \,,$$

bzw. zur **Parseval'schen Gleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

Im Fall $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{H}$ *nennt man* $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *ein* **vollständiges Orthonormalsystem** (*VONS*) *in* $\mathbf{H}$.

Folgerung 0.30 *Ist* $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *ein VONS im Hilbertraum* $\mathbf{H}$, *so ist die Abbildung* $\mathcal{F} : \mathbf{H} \longrightarrow \ell^2$, $x \mapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n=0}^{\infty}$ *ein* **isometrischer Isomorphismus**, *den man* **Fouriertransformation** *nennt.*

Beispiel 0.31 *Das System* $\{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *mit* $e_n = (\delta_{nk})_{k=0}^{\infty}$ *ist ein VONS in* ℓ^2.

Beispiel 0.32 *Wir definieren auf der Menge* $\mathbf{C}[-1,1] = \{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig*$\}$ *der stetigen komplexwertigen Funktionen über dem Interval* $[-1,1]$ *das innere Produkt*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\, dt\,.$$

Dann ist $(\mathbf{C}[-1,1], \langle .,.\rangle)$ *ein Raum mit Skalarprodukt, aber* **kein** *Hilbertraum. Das Funktionensystem* $\{b_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *mit* $b_n(t) = t^n$ *ist linear unabhängig. Das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren liefert* $\{P_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *als VONS in der Vervollständigung* $(\mathbf{L}^2(0,1), \langle .,.\rangle)$ *von* $(\mathbf{C}[0,1], \langle .,.\rangle)$, *wobei*

$$P_n(t) = \gamma_{nn}t^n + \gamma_{n,n-1}t^{n-1} + \ldots + \gamma_{n1}t + \gamma_{n0}$$

mit $\gamma_{nn} > 0$, $\gamma_{nk} \in \mathbb{R}$ *gilt. Das Polynom* $P_n(t)$ *nennt man n-tes orthonormiertes* **Legendre-Polynom**.

0.5 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass jeder Teilraum eines separablen metrischen Raumes separabel ist.
2. Sei $\mathbf{X}$ ein normierter Raum über dem Skalarkörper $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:
   (i) $\mathbf{X}$ ist separabel.
   (ii) Es existiert eine abzählbare Menge A mit $\mathbf{X} = \overline{\operatorname{span} A}$.
3. Zeigen Sie, dass die im Beispiel 0.5 aufgelisteten Räume separable Banachräume sind.
4. Wir betrachten den linearen Raum

$$\mathbf{c}_{00} := \left\{\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} : \xi_n \in \mathbb{C}, \exists\, N = N(\xi) \text{ mit } \xi_n = 0\ \forall n \geq N\right\}$$

   mit der Norm

$$\|\xi\|_\infty = \sup_{n=0,1,2,\ldots} |\xi_n|.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{c}_{00}$ kein Banachraum ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{c}_{00}$ separabel ist.

(c) Was ist die Abschließung von $\mathbf{c}_{00}$ in ℓ^∞?

5. Zeigen Sie, dass in einem normierten Raum $\mathbf{X}$ die Norm genau dann durch ein Skalarprodukt induziert wird, d.h., es gilt $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}\ \forall\, x \in \mathbf{X}$ mit einem geeigneten Skalarprodukt $\langle .,.\rangle$, wenn die Parallelogrammgleichung
$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbf{X}$$
gilt.

6. Gilt in den Räumen aus Beispiel 0.5 die Parallelogrammgleichung?

7. Welche Inklusionen gelten zwischen den ℓ^p-Räumen, $1 \le p \le \infty$?

8. Zeigen Sie, dass
$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty \quad \forall x \in \ell^1$$
gilt.

9. Zeigen Sie, dass man auf jedem metrischen Raum $(\mathbf{X}, d)$ eine äquivalente (d.h., dieselbe Konvergenz definierende) Metrik $d_0 : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren kann, so dass $(\mathbf{X}, d_0)$ ein beschränkter metrischer Raum ist.

10. Es seien $\mathbf{X}$ ein metrischer Raum und $A \subset \mathbf{X}$. Zeigen Sie: Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz zu A, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ auch ein endliches ε-Netz zu A, welches nur Punkte aus A enthält.

11. Beweisen Sie: In jedem vollständigen metrischen Raum $\mathbf{X}$ ist eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ genau dann präkompakt, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz zu A existiert.

12. Es sei $(\mathbf{X}, d)$ ein metrischer Raum. Für $x \in \mathbf{X}$, nichtleere Mengen $A \subset \mathbf{X}$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir
$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\} \quad \text{und} \quad U_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbf{X} : d(x,A) < \varepsilon\}\ .$$
Zeigen Sie, dass

(a) $U_\varepsilon(A)$ eine offene Menge ist,

(b) $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} U_\varepsilon(A) = \overline{A}$ gilt,

(c) $U_{\varepsilon_1}(U_{\varepsilon_2}(A)) \subset U_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(A)$ gilt,

(d) für festes $A \subset \mathbf{X}$ die Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,A)$ eine gleichmäßig stetige Abbildung ist.

(Z) Auf $\mathcal{H} = \{A \subset \mathbf{X} : A \neq \emptyset, \text{beschränkt}, \text{abgeschlossen}\}$ definieren wir
$$d_{\mathcal{H}}(A,B) := \inf\{\varepsilon :\ \varepsilon > 0,\ A \subset U_\varepsilon(B),\ B \subset U_\varepsilon(A)\}\ .$$
Man zeige, dass $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ ein metrischer Raum ist und dass
$$d_{\mathcal{H}}(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\} = \sup_{x\in M} |d(x,A) - d(x,B)|$$
für jedes $M \subset \mathbf{X}$ mit $A \cup B \subset M$ gilt. (Die Metrik $d_{\mathcal{H}}$ wird **Hausdorff-Abstand** genannt.)

13. Zeigen Sie, dass die Abschließung eines linearen Teilraumes eines normierten Raumes wieder ein linearer Teilraum ist.

14. Wir betrachten die Menge der Äquivalenzklassen $\mathcal{X}$, wie wir sie bei der Vervollständigung eines metrischen Raumes definiert haben, im Fall eines Raumes mit Skalarprodukt. Wie ist das Skalarprodukt zweier solcher Äquivalenzklassen zu definieren, so dass die Vervollständigung wieder ein Raum mit Skalarprodukt, also ein Hilbertraum ist? Zeigen Sie, dass diese Definition korrekt ist und tatsächlich das Skalarprodukt liefert, welches zur gegebenen Metrik passt.

Kapitel 1

Lineare Operatoren in normierten Räumen

1.1 Stetigkeit und Beschränktheit

Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ lineare Räume über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder der komplexen Zahlen. Bekanntlich nennen wir eine Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $x \mapsto f(x)$ **linear**, wenn für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ die Beziehung

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

gilt. Oft nennen wir eine solche lineare Abbildung auch **linearen Operator** und schreiben $f(x)$ in der Form Ax. Die Menge aller linearen Operatoren zwischen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ bezeichnen wir mit $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Sie ist mit der Definition

$$(\alpha A + \beta B)x := \alpha(Ax) + \beta(Bx)\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}\,,\ A, B \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\,,$$

selbst wieder ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

Satz 1.1 *Es seien* $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{X}})$ *und* $(\mathbf{Y}, \|.\|_{\mathbf{Y}})$ *zwei normierte Räume über* $\mathbb{K}$ *sowie* $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *ist eine stetige Abbildung.*

(b) $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *ist im Punkt* Θ *stetig.*

(c) *Es existiert eine Konstante* $M \geq 0$ *mit der Eigenschaft*

$$\|Ax\|_{\mathbf{Y}} \leq M \|x\|_{\mathbf{X}} \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,. \tag{1.1}$$

(d) $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *ist gleichmäßig stetig.*

Wenn es nicht zu Missverständnissen kommen kann, verzichten wir im Weiteren auf die Indizierung der Normen.

Die Menge der Operatoren $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, für die eine (und somit jede) der Aussagen (a)-(d) des Satzes 1.1 erfüllt ist, bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Definieren wir für $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$

$$\|A\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}} := \sup\left\{\|Ax\| : x \in \mathbf{X},\ \|x\| \leq 1\right\}\,, \tag{1.2}$$

so wird $(\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \|.\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}})$ zu einem normierten Raum, dem Raum der **beschränkten linearen Operatoren**. Die Zahl $\|A\| = \|A\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}}$ ist die kleinste aller Zahlen M, für die $\|Ax\| \le M\,\|x\|$ $\forall\, x \in \mathbf{X}$ gilt. Außerdem ist

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbf{X}\setminus\{\Theta\}\right\} = \sup\left\{\|Ax\| : x \in \mathbf{X},\ \|x\| = 1\right\}.$$

Satz 1.2 *Ist $\mathbf{Y}$ ein Banachraum, so ist auch $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ ein Banachraum.*

Beispiel 1.3 *Wir betrachten den Operator $A : \big(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_j\big) \longrightarrow \big(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_k\big)$ mit*

$$(Af)(t) = tf(t)\,, \quad 0 \le t \le 1\,,$$

für

$$\|f\|_\infty = \max\left\{|f(t)| : t \in [0,1]\right\} \quad \textit{und} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt}\,.$$

Die Elemente von $L(\mathbf{X},\mathbb{K})$ nennt man **lineare Funktionale**. Der Raum $(\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbb{K}), \|.\|_{\mathbf{X}\to\mathbb{K}})$ der linearen stetigen Funktionale heißt **dualer Raum** zu $\mathbf{X}$ und wird mit $\mathbf{X}^*$ bezeichnet. Nach Satz 1.2 ist $\mathbf{X}^*$ stets ein Banachraum.

Theorem 1.4 (Riesz'sches Darstellungstheorem) *Es seien $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ ein Hilbertraum und $f \in \mathbf{H}^*$. Dann existiert genau ein $x_f \in \mathbf{H}$, so dass*

$$f(x) = \langle x, x_f\rangle \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

Dabei gilt $\|f\|_{\mathbf{H}^*} = \|x_f\|_{\mathbf{H}}$.

Man kann also $\mathbf{H}^*$ mit $\mathbf{H}$ identifizieren. Dabei ist zu beachten, dass einer Linearkombination $\alpha f + \beta g$, $f,g \in \mathbf{H}^*$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ dabei das Element $\overline{\alpha}\,x_f + \overline{\beta}\,x_g \in \mathbf{H}$ zugeordnet wird.

Zwei normierte Räume $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ nennt man zueinander **isometrisch isomorph**, wenn ein linearer und bijektiver isometrischer Operator $U : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ (d.h. $\|Ux\| = \|x\|\ \forall\, x \in \mathbf{X}$ und $U(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$) existiert. Zueinander isometrisch isomorphe Räume werden oft miteinander identifiziert.

Beispiel 1.5 *Es gilt $c_0^* = \ell^1$, $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ und $(\ell^p)^* = \ell^q$, wobei $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.*

1.2 Das Theorem von Banach-Steinhaus

Lemma 1.6 *Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ normierte Räume und $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ eine Familie linearer stetiger Operatoren. Existieren ein $x^* \in \mathbf{X}$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass*

$$M(x^*,\varepsilon) := \sup\left\{\|Ax\| : A \in \mathcal{F}, x \in \mathbf{X}, \|x - x^*\| \le \varepsilon\right\} < \infty$$

gilt, so ist $\sup\left\{\|A\| : A \in \mathcal{F}\right\} < \infty$.

Das folgende Theorem konstatiert ein fundamentales Resultat der Funktionalanalysis, das **Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit**.

Theorem 1.7 *Es seien* $\mathbf{X}$ *ein Banachraum und* $\mathbf{Y}$ *ein normierter Raum. Ist eine Familie* $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ *linearer stetiger Operatoren punktweise beschränkt auf* $\mathbf{X}$, *d.h.*

$$\sup\{\|Ax\| : A \in \mathcal{F}\} < \infty \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,,$$

so ist $\mathcal{F}$ *gleichmäßig beschränkt, d.h.* $\sup\{\|A\| : A \in \mathcal{F}\} < \infty$.

Für Folgen $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ linearer beschränkter Operatoren unterscheiden wir drei Konvergenzbegriffe:

- **Normkonvergenz**: $\exists\, A \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) : \lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} = 0$
  (in Zeichen: $A = \lim_{n\to\infty} A_n$)
- **starke Konvergenz**: $\exists\, A \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) : \lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\|_{\mathbf{Y}} = 0 \;\; \forall\, x \in \mathbf{X}$
  (in Zeichen: $A_n \longrightarrow A$)
- **schwache Konvergenz**: $\exists\, A \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) : \lim_{n\to\infty} f(A_n x) = f(Ax) \;\; \forall\, x \in \mathbf{X}\,, \;\; \forall\, f \in \mathbf{Y}^*$
  (in Zeichen: $A_n \rightharpoonup A$)

Bemerkung 1.8 *Aus der Normkonvergenz folgt die starke Konvergenz, aus der starken Konvergenz die schwache.*

Satz 1.9 (Banach-Steinhaus, 1. Variante) *Es seien* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *Banachräume,* $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ *eine in* $\mathbf{X}$ *dichte Teilmenge und* $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, $n \in \mathbb{N}$. *Die Folge* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert genau dann stark, wenn* $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$ *für jedes* $x \in \mathbf{X}_0$ *eine Cauchyfolge und die Zahlenfolge* $(\|A_n\|)_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt sind.*

Satz 1.9a (Banach-Steinhaus, 2. Variante) *Es seien* $\mathbf{X}$ *ein Banachraum,* $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ *eine in* $\mathbf{X}$ *dichte Teilmenge und* $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, $n \in \mathbb{N}$. *Die Folge* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert genau dann stark gegen* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, *wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0$ *für jedes* $x \in \mathbf{X}_0$ *gilt und die Zahlenfolge* $(\|A_n\|)_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt ist.*

1.3 Übungsaufgaben

1. Sind folgende Operatoren linear und stetig? Berechnen Sie gegebenenfalls deren Norm.
   (a) $V : \ell^p \longrightarrow \ell^p\,,\ (\xi_0,\xi_1,\xi_2,\ldots) \mapsto (0,\xi_0,\xi_1,\xi_2,\ldots)$
   (b) $\mathcal{J} : \mathbf{C}[0,1] \longrightarrow \mathbf{C}[0,1]\,,\ f(t) \mapsto \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$
   (c) $\mathcal{D}_0 : \mathbf{C}^{(1)}[0,1] \longrightarrow \mathbf{C}[0,1]\,,\ f \mapsto f'$
   (d) $\mathcal{D}_1 : \big(\mathbf{C}^{(1)}[0,1], \|.\|_\infty\big) \longrightarrow \mathbf{C}[0,1]\,,\ f \mapsto f'$
   (e) $T : \mathbf{C}[0,1] \longrightarrow \mathbf{C}[0,1]\,,\ \ (Tf)(t) = \displaystyle\int_0^1 k(t,s)f(s)\,ds\,,\ \ k : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig
2. Ist $f : c_{00} \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ \xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n$ ein lineares stetiges Funktional?

3. Kann beim Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit auf die Vollständigkeit des Raumes $\mathbf{X}$ verzichtet werden?

4. Die Zahlen $\lambda_{n,k}$ und $t_{n,k} \in [0,1]$ mit $k = 1, 2, \ldots, n$ und $n \in \mathbb{N}$ mögen folgende Eigenschaften erfüllen:

   - $\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\lambda_{n,k}| : n = 1, 2, \ldots \right\} < \infty$,
   - $\sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} p(t_{n,k}) = \int_0^1 p(t)\, dt$ für jedes Polynom $p(t)$, dessen Grad kleiner n ist.

   Man zeige, dass dann
   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(t_{n,k}) = \int_0^1 f(t)\, dt$$
   für jede stetige Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt.

(**Z1**) Unter welchen Voraussetzungen an die Zahlen $\alpha_{j,k}$, $j, k = 0, 1, 2, \ldots$, ist der Operator
$$A : \ell^p \longrightarrow \ell^q , \quad \xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k} \xi_k \right)_{n=0}^{\infty}$$
stetig?

(**Z2**) Zeigen Sie, dass die normierten Räume $(c_{00})^*$ und ℓ^1 zueinander isometrisch isomorph sind.

Zur Wiederholung

(W1) Unter welchen Voraussetzungen an die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird durch die Vorschrift $d(x, y) := |f(x) - f(y)|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ erklärt?

(W2) Seien X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine dichte Teilmenge. Man zeige, dass dann A alle isolierten Punkte von X enthält.

(W3) Man beweise, dass in einem separablen metrischen Raum die Menge der isolierten Punkte abzählbar ist.

(W4) Es seien $(X_1, \|\cdot\|_1)$ und $(X_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. Zeigen Sie, dass durch $u(x, y) := \|x\|_1 + \|y\|_2$ sowie $v(x, y) := \max\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$ Normen auf $X_1 \times X_2$ erklärt werden.

(W5) Es seien $(m_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in l^\infty$ und $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass der durch
$$M((x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) := (m_n x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in l^p$$
gegebene Operator $M : l^p \to l^p$ wohldefiniert, linear und beschränkt ist. Bestimmen Sie $\|M\|$.

1.4 Invertierbare Operatoren

Es seien $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ normierte Räume über dem Zahlenkörper $\mathbb{K}$ und $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $B \in L(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$. Unter dem Produkt BA der Operatoren A und B versteht man die Abbildung $BA : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Z}$, $x \mapsto (B \circ A)x = B(Ax)$, d.h., die Verknüpfung der beiden Abbildungen $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ und $B : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$. Offenbar ist dann auch $BA \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$. Folgendes ist leicht einzusehen:

- Ist außerdem $C \in L(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$, so gilt $C(BA) = (CB)A$.

- Sind $A, A_1, A_2 \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ und $B, B_1, B_2 \in L(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ sowie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, so gilt
$$B(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \alpha_1(BA_1) + \alpha_2(BA_2)$$
und
$$(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)A = \alpha_1(B_1 A) + \alpha_2(B_2 A).$$

- Sind $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ und $B \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, so gilt auch $BA \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$, wobei
$$\|BA\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Z}} \le \|B\|_{\mathbf{Y}\to\mathbf{Z}} \, \|A\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}} .$$
Hieraus folgt insbesondere, dass die Abbildung $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \times \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$, $(A, B) \mapsto BA$ stetig ist.

- Beschreibt der Operator $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ eine bijektive Abbildung, so bezeichnen wir mit $A^{-1} : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ den Operator, der die entsprechende Umkehrabbildung realisiert. Es gilt dann also $A^{-1}A = I_{\mathbf{X}}$ und $AA^{-1} = I_{\mathbf{Y}}$, wobei $I_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, $x \mapsto x$ die identische Abbildung in $\mathbf{X}$ ist. In diesem Fall nennen wir den Operator $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ **invertierbar** und $A^{-1} : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ den zu A **inversen Operator**. Ist $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ invertierbar, so ist $A^{-1} \in L(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$.

- Mit $N(A)$ bezeichnen wir den **Nullraum** des linearen Operators A (auch **Kern** von A genannt),
$$N(A) = \{x \in \mathbf{X} : Ax = \Theta_{\mathbf{Y}}\} .$$
Ein Operator $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ realisiert genau dann eine injektive Abbildung $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, wenn $N(A) = \{\Theta_{\mathbf{X}}\}$ gilt, denn aus $Ax_1 = Ax_2$ folgt $A(x_1 - x_2) = \Theta_{\mathbf{Y}}$, also $x_1 - x_2 \in N(A)$.

- Gilt $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$, so nennen wir den Operator $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ **stetig** bzw. **beschränkt invertierbar**. Die Menge der stetig invertierbaren Operatoren $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ bezeichnen wir mit $G\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Satz 1.10 *Ist $\mathbf{X}$ ein Banachraum, so ist $I_{\mathbf{X}} - E \in G\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ für alle $E \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ mit $\|E\| < 1$. Dabei gilt*
$$(I_{\mathbf{X}} - E)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} E^n \quad \textit{und} \quad \left\|(I_{\mathbf{X}} - E)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|E\|} .$$

Folgerung 1.11 *Sind $\mathbf{X}$ oder $\mathbf{Y}$ ein Banachraum, so ist $G\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.*

Lemma 1.12 *Ein Operator $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ist genau dann stetig invertierbar, wenn $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ eine surjektive Abbildung ist und wenn eine Konstante $m > 0$ existiert, so dass $\|Ax\| \ge m \|x\|$ für alle $x \in \mathbf{X}$ gilt.*

Im nächsten Abschnitt lernen wir den **Satz von Banach** kennen, welcher besagt, dass jeder bijektive lineare und beschränkte Operator zwischen Banachräumen auch stetig invertierbar ist.

1.5 Das Theorem vom abgeschlossenen Graphen

Definition 1.13 *Es seien* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *normierte Räume. Ein Operator* $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *heißt* **abgeschlossen**, *wenn aus* $x_n \longrightarrow x$ *und* $Ax_n \longrightarrow y$ *folgt* $Ax = y$. *Das ist gleichbedeutend damit, dass der Graph* $\{(x, Ax) : x \in \mathbf{X}\}$ *des Operators* A *eine abgeschlossene Menge in* $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ *ist.*

Ein weiteres fundamentales Prinzip der Funktionalanalysis (nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränkheit) wird im folgenden **Theorem vom abgeschlossenen Graphen** formuliert.

Theorem 1.14 *Es seien* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *Banachräume. Ist ein Operator* $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *abgeschlossen, so ist er stetig.*

Der Satz von Banach ist nun eine leichte Folgerung.

Satz 1.15 (Banach) *Es seien* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *Banachräume. Realisiert der Operator* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *eine bijektive Abbildung* $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, *so ist er stetig invertierbar.*

Wir erinnern an die Definition der Äquivalenz von Normen: Man nennt zwei Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ auf einem linearen Raum $\mathbf{X}$ zueinander **äquivalent**, falls positive Konstanten c_1, c_2 existieren, so dass

$$c_1 \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2 \|x\|_1 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}$$

gilt.

Folgerung 1.16 *Es seien* $(\mathbf{X}, \|x\|_1)$ *und* $(\mathbf{X}, \|x\|_2)$ *Banachräume und aus der* $\|.\|_1$*-Konvergenz folge die* $\|.\|_2$*-Konvergenz. Dann sind die zwei Normen zueinander äquivalent.*

1.6 Faktorräume und das Open Mapping Theorem

Es sei $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum des normierten Raumes $\mathbf{X}$. Dann wird auf $\mathbf{X}$ durch "$x \sim y \iff x - y \in \mathbf{M}$" eine Äquivalenzrelation definiert. Die entsprechenden Äquivalenzklassen sind von der Form

$$[x]_\sim = x + \mathbf{M} := \{x + z : z \in \mathbf{M}\}\,, \quad x \in \mathbf{X}\,.$$

Die Menge aller dieser Äquivalenzklassen heißt **Faktorraum** von $\mathbf{X}$ bez. $\mathbf{M}$ und wird mit $\mathbf{X}/\mathbf{M}$ bezeichnet. Wir definieren

$$\|[x]_\sim\| = \|[x]_\sim\|_{\mathbf{X}/\mathbf{M}} := \inf\{\|x + z\|_{\mathbf{X}} : z \in \mathbf{M}\}\,, \quad x \in \mathbf{X}\,,$$

und

$$\alpha[x]_\sim + \beta[y]_\sim := [\alpha x + \beta y]_\sim\,, \quad x, y \in \mathbf{X},\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}\,.$$

Man nennt eine Abbildung zwischen metrischen Räumen eine **offene Abbildung**, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist.

Satz 1.17 *Ist* $\mathbf{M}$ *ein abgeschlossener linearer Teilraum des normierten raumes* $\mathbf{X}$, *so gilt:*

(a) $\left(\mathbf{X}/\mathbf{M}, \|.\|_{\mathbf{X}/\mathbf{M}}\right)$ *ist ein normierter Raum.*

(b) *Die Faktorabbildung* $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}/\mathbf{M}$, $x \mapsto [x]_\sim$ *ist linear, stetig und offen.*

(c) *Ist* $\mathbf{X}$ *ein Banachraum, so auch* $\mathbf{X}/\mathbf{M}$.

Beispiel 1.18 *Es seien $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ und $\mathbf{M} = N(A)$. Dann ist die Abbildung*

$$\widetilde{A} : \mathbf{X}/\mathbf{M} \longrightarrow A(\mathbf{X}) =: R(A)\,, \ [x]_\sim \mapsto Ax$$

linear, stetig und bijektiv. Es gilt nämlich für alle $z \in \mathbf{M}$

$$\left\| \widetilde{A}[x]_\sim \right\| = \|A\,x\| = \|A(x+z)\| \le \|A\| \cdot \|x+z\|$$

und somit $\left\| \widetilde{A}[x]_\sim \right\| \le \|A\| \cdot \|[x]_\sim\|$, und aus $\widetilde{A}[x]_\sim = \Theta$ folgt $A\,x = \Theta$, also $x \in \mathbf{M}$ und somit $[x]_\sim = [\Theta]_\sim$.

Beispiel 1.19 *Wir wählen $\mathbf{X} = \mathbf{C}[0,1]$, $t_0 \in [0,1]$, $\mathbf{M} = \{f \in \mathbf{X} : f(t_0) = 0\}$ und beschreiben $\mathbf{X}/\mathbf{M}$: Der Raum $\mathbf{M}$ ist der Nullraum $N(f)$ des linearen stetigen Funktionals $\varphi \in \mathbf{X}^*$ mit $\varphi(f) = f(t_0)$ mit $\|\varphi\|_{\mathbf{X}^*} = 1$. Nach Beispiel 1.18 ist die Abbildung*

$$\mathbf{X}/\mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad [f]_\sim \mapsto f(t_0) \tag{1.3}$$

linear, stetig und bijektiv mit $|f(t_0)| \le \|\varphi\|_{\mathbf{X}^*} \|[f]_\sim\| = \|[f]_\sim\|$. Die konstante Funktion $f_0(t) \equiv f(t_0)$ gehört zu $[f]_\sim$, so dass $\|[f]_\sim\| \le \|f_0\|_\infty = |f(t_0)|$ gilt. Also ist die Abbildung (1.3) ein isometrischer Isomorphismus, d.h., $\mathbf{X}/\mathbf{M}$ ist isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}$.

Satz 1.20 (Open Mapping Theorem) *Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume. Ist die Abbildung $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ surjektiv, so ist sie auch offen.*

Als Folgerung aus diesem Satz ergibt sich unter Verwendung von Satz 0.11,(c) wiederum der Satz von Banach (Satz 1.15).

1.7 Übungsaufgaben

1. Man zeige, dass der Operator $\mathcal{D}_1 : \left(\mathbf{C}^{(1)}[0,1], \|.\|_\infty\right) \longrightarrow \mathbf{C}[0,1]$, $f \mapsto f'$ abgeschlossen ist.

2. Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume und $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Ferner sei $\mathbf{Y}_0^* \subset \mathbf{Y}^*$ eine Menge von Funktionalen, die die Punkte von $\mathbf{Y}$ separiert, d.h., für zwei beliebige Punkte $y_1, y_2 \in \mathbf{Y}$ mit $y_1 \ne y_2$ existiert ein Funktional $f \in \mathbf{Y}_0^*$, so dass $f(y_1) \ne f(y_2)$. Man zeige: Ist die Abbildung $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(Ax)$ für jedes $f \in \mathbf{Y}_0^*$ stetig, so ist auch $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ stetig.

3. Auf dem Raum $\mathbf{C}[0,1]$ der stetigen Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ sei eine Norm $\|.\|_0$ gegeben, so dass $(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_0)$ ein Banachraum ist und dass aus $\|f_n - f\|_0 \longrightarrow 0$, $f_n, f \in \mathbf{C}[0,1]$, folgt $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Man zeige, dass $\|.\|_0$ zu $\|.\|_\infty$ äquivalent ist.

4. Es seien $\mathbf{X}$ ein Banachraum und $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ ein in $\mathbf{X}$ **stetig eingebetteter** Banachraum, d.h. der Einbettungsoperator $\mathcal{E} : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$, $y \mapsto y$ ist stetig. Ferner seien $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ und $Ay \in \mathbf{Y}\ \forall\, y \in \mathbf{Y}$. Man zeige, dass dann $A \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ gilt.

5. Es sei $\mathbf{X}$ ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

   (a) Man zeige, dass für jedes $f \in L(\mathbf{X}, \mathbb{K})$ ein $x_0 \in \mathbf{X}$ existiert, so dass jedes $x \in \mathbf{X}$ in der Form $x = \alpha x_0 + x_1$ mit $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x_1 \in N(f)$ dargestellt werden kann. Ist diese Darstellung bei gewählten f und x_0 eindeutig?

   (b) Man zeige: Sind $f, g \in L(\mathbf{X}, \mathbb{K})$ und $N(f) \subset N(g)$, so existiert ein $\gamma \in \mathbb{K}$ mit $g(x) = \gamma f(x)$ für alle $x \in \mathbf{X}$.

1.8 Das Theorem von Hahn-Banach

Hier lernen wir nun das letzte der drei fundamentalen Prinzipien der Funktionalanalysis kennen, das Theorem von Hahn-Banach, welches sich mit dem Problem der Fortsetzung linearer stetiger Funktionale von linearen Teilräumen auf den gesamten normierten Raum befasst. Zur Vorbereitung auf seinen Beweis beleuchten wir einige Grundlagen der Mathematik, die im Zusammenhang mit dem Auswahlaxiom von Zermelo stehen.

Eine beliebige (nichtleere) Menge $\mathcal{A}$ heißt **partiell geordnet** (mit der Ordnungsrelation $\le$), wenn

(O1) $a \le a \; \forall\, a \in \mathcal{A}$,

(O2) aus $a \le b$ und $b \le a$ stets $a = b$ folgt,

(O3) aus $a \le b$ und $b \le c$ stets $a \le c$ folgt.

Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ nennt man **linear geordnet**, wenn für ein beliebiges Paar $(a, b) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ wenigstens eine der Relationen $a \le b$ oder $b \le a$ gilt. Eine linear geordnete Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ heißt **maximal**, wenn für jede linear geordnete Teilmenge $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{A}$ mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$ die Gleichheit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ folgt.

Axiom: *Jede partiell geordnete Menge besitzt eine maximale linear geordnete Teilmenge.*

Ein Element $b_0 \in \mathcal{A}$ nennt man **obere Schranke** der Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, wenn $b \le b_0$ für alle $b \in \mathcal{B}$ gilt. Ein Element $a_0 \in \mathcal{A}$ heißt **maximal**, wenn aus $a_0 \le a \in \mathcal{A}$ stets $a_0 = a$ folgt.

Lemma 1.21 (Kuratowski-Zorn) *Besitzt jede linear geordnete Teilmenge einer partiell geordneten Menge $\mathcal{A}$ eine obere Schranke, so existiert in $\mathcal{A}$ ein maximales Element.*

Lemma 1.22 (Zermelo) *Es sei $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ ein beliebiges System nichtleerer Mengen. Dann existiert eine Menge $\mathcal{M}$ mit der Eigenschaft $\mathcal{M} = \{m_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$, wobei $m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{I}$.*

Lemma 1.24 wird auch **Auswahlaxiom** genannt und ist zu obigem Axiom, welches auch **Maximalkettensatz** heißt, äquivalent. Wir verweisen noch auf das Theorem von Zermelo, welches mittels des Zornschen Lemmas bewiesen werden kann. Eine linear geordnete Menge $\mathcal{N}$ nennt man **wohlgeordnet** oder **vollständig geordnet**, wenn jede nichtleere Teilmenge von $\mathcal{N}$ ein kleinstes Element enthält.

Theorem 1.23 (Zermelo) *Auf jeder nichtleeren Menge $\mathcal{N}$ kann man eine Ordnung einführen, bezüglich der $\mathcal{N}$ wohlgeordnet ist.*

Nun zum Theorem von Hahn-Banach. Es sei $\mathbf{X}$ ein Vektorraum. Eine Abbildung $p : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ nennt man **sublineares Funktional**, wenn folgende zwei Eigenschaften erfüllt sind:

(L1) $p(x + y) \le p(x) + p(y) \;\; \forall\, x, y \in \mathbf{X}$,

(L2) $p(\alpha x) = \alpha\, p(x) \;\; \forall\, x \in \mathbf{X} , \forall\, \alpha \ge 0$.

Die Abbildung $p : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_{\mathbf{X}}$ ist ein Beispiel für ein sublineares Funktional. Wir beweisen zuerst die reelle Version des Theorems von Hahn-Banach.

Theorem 1.24 (Hahn-Banach) *Es seien $\mathbf{X}$ ein reeller Vektorraum und $p : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional sowie $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ ein linearer Teilraum. Ist $f : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit der Eigenschaft $f(x) \le p(x)\ \forall\, x \in \mathbf{M}$, so existiert ein lineares Funktional $F : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, welches den Bedingungen $F(x) = f(x)$, $x \in \mathbf{M}$, und $F(x) \le p(x)$, $x \in \mathbf{X}$, genügt.*

Sind nun $\mathbf{X}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $F = f + \mathbf{i}g \in L(\mathbf{X}, \mathbb{C})$ mit $f = \operatorname{Re} F$, $g = \operatorname{Im} F$, so folgt aus $F(\mathbf{i}x) = \mathbf{i}F(x)$, dass $f(\mathbf{i}x) + \mathbf{i}g(\mathbf{i}x) = \mathbf{i}f(x) - g(x)$ und somit $f(\mathbf{i}x) = -g(x)$. Es folgt $F(x) = f(x) - \mathbf{i}f(\mathbf{i}x)$. Ist umgekehrt F von dieser Gestalt mit einem $\mathbb{R}$-linearen Funktional $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, so ist $F : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x) - \mathbf{i}f(\mathbf{i}x)$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional auf $\mathbf{X}$.

Theorem 1.25 (Hahn-Banach) *Es seien $\mathbf{X}$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$ und $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ ein linearer Teilraum von $\mathbf{X}$. Ist $f : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{K}$ ein lineares Funktional mit $|f(x)| \le \|x\|$, $x \in \mathbf{M}$, so existiert ein lineares Funktional $F : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $F(x) = f(x)$, $x \in \mathbf{M}$, und $|F(x)| \le \|x\|$, $x \in \mathbf{X}$.*

Ist ein normierter Raum $\mathbf{Y}$ stetig in einen normierten Raum $\mathbf{X}$ eingebettet, so ist leicht zu sehen, dass $\mathbf{X}^*$ stetig in $\mathbf{Y}^*$ eingebettet ist. Die erste Folgerung 1.26 aus dem Theorem von Hahn-Banach zeigt, dass für einen linearen Teilraum $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ mit der durch $\mathbf{X}$ induzierten Norm der duale Raum $\mathbf{X}_0^*$ "nicht größer" als $\mathbf{X}^*$ ist.

Folgerung 1.26 *Es seien $\mathbf{X}$ ein normierter Raum und $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ ein linearer Teilraum von $\mathbf{X}$, versehen mit der durch $\mathbf{X}$ induzierten Norm. Ist $f_0 \in \mathbf{X}_0^*$, so existiert ein $f \in \mathbf{X}^*$ mit $f(x) = f_0(x)$, $x \in \mathbf{X}_0$, und $\|f\|_{\mathbf{X}^*} = \|f_0\|_{\mathbf{X}_0^*}$.*

Folgerung 1.27 *Es seien $\mathbf{X}$ ein normierter Raum, $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ ein linearer Teilraum von $\mathbf{X}$ und $x_0 \in \mathbf{X}$, wobei $d := \operatorname{dist}(x_0, \mathbf{X}_0) > 0$. Dann existiert ein $f_0 \in \mathbf{X}^*$ mit $\|f_0\|_{\mathbf{X}^*} = 1$, $f_0(x) = 0$ $\forall\, x \in \mathbf{X}_0$ und $f_0(x_0) = d$.*

Folgerung 1.28 *Sind $\mathbf{X}$ ein normierter Raum und $x_0 \in \mathbf{X} \setminus \{\Theta\}$, so existiert ein Funktional $f_0 \in \mathbf{X}^*$, so dass $\|f_0\|_{\mathbf{X}^*} = 1$ und $f_0(x_0) = \|x_0\|_{\mathbf{X}}$ gilt. Insbesondere trennen die Funktionale aus $\mathbf{X}^*$ die Punkte von $\mathbf{X}$.*

Folgerung 1.28 nennt man auch den **Satz über die ausreichende Anzahl von Funktionalen**.

Folgerung 1.29 *Ist $\mathbf{X}$ ein normierter Raum, so gilt für jedes $x \in \mathbf{X}$*

$$\|x\|_{\mathbf{X}} = \sup\left\{|f(x)| : f \in \mathbf{X}^*,\ \|f\|_{\mathbf{X}^*} \le 1\right\} .$$

Wir zeigen nun, dass man die Aussage des Satzes 1.2 umkehren kann.

Satz 1.30 *Ist $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ein Banachraum, so ist auch $\mathbf{Y}$ ein Banachraum.*

Jedes $x \in \mathbf{X}$ erzeugt über die Formel $j_x(f) = f(x)$ ein lineares stetiges Funktional $j_x : \mathbf{X}^* \longrightarrow \mathbb{K}$. Folgerung 1.29 liefert sogar

$$\|j_x\| = \sup\left\{|f(x)| : f \in \mathbf{X}^*,\ \|f\|_{\mathbf{X}^*} \le 1\right\} = \|x\|_{\mathbf{X}} . \tag{1.4}$$

$J_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \longrightarrow (\mathbf{X}^*)^* =: \mathbf{X}^{**}$, $x \mapsto j_x$ ist also eine lineare Isometrie. Man nennt den normierten Raum $\mathbf{X}$ **reflexiv**, wenn $J_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{**}$ gilt. $\mathbf{X}^{**}$ nennt man den **bidualen Raum** zu $\mathbf{X}$. Aus Satz 1.2 folgt, dass ein reflexiver normierter Raum mit Notwendigkeit ein Banachraum ist.

Satz 1.31 *Jeder abgeschlossene lineare Teilraum eines reflexiven normierten Raumes ist ebenfalls reflexiv.*

Es seien $x = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \mathbf{c}_0$ und $f \in \mathbf{c}_0^*$. Es folgt (vgl. Beispiel 1.5) $j_x(f) = f(x) = \sum_{n=0}^\infty \xi_n f(e_n)$, wobei $e_j = (\delta_{j,n})_{n=0}^\infty$ und $y := (f(e_n))_{n=0}^\infty \in \ell^1$ sowie $\|y\|_{\ell^1} = \|f\|_{\mathbf{c}_0^*}$ gilt. Aber auch für $z = (\zeta_n)_{n=0}^\infty \in \ell^\infty$ ist $g : \mathbf{c}_0^* \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(f) = \sum_{n=0}^\infty \zeta_n f(e_n)$ wegen $|g(f)| \le \|z\|_{\ell^\infty} \|y\|_{\ell^1} = \|z\|_{\ell^\infty} \|f\|_{\mathbf{c}_0^*}$ ein Element von $\mathbf{c}_0^{**}$. Somit ist $\mathbf{c}_0$ **nicht** reflexiv, und da $\mathbf{c}_0$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{c}$ ist, gilt dies nach Satz 1.31 auch für $\mathbf{c}$.

Abschließend beleuchten wir noch die Eigenschaft der Separabilität von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{X}^*$.

Satz 1.32 *Ist $\mathbf{X}^*$ separabel, so gilt dies auch für $\mathbf{X}$.*

Folgerung 1.33 *Ist $\mathbf{X}$ reflexiv, so auch $\mathbf{X}^*$. Ist $\mathbf{X}$ reflexiv und separabel, so ist auch $\mathbf{X}^*$ separabel.*

1.9 Schwache und *schwache Konvergenz

In diesem Abschnitt sei $\mathbf{X}$ stets ein Banachraum. Eine Folge $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}^*$ heißt ***schwach konvergent** gegen $f \in \mathbf{X}^*$, wenn $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ für alle $x \in \mathbf{X}$ gilt. Satz 1.9 liefert

Folgerung 1.34 *Eine Folge $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}^*$ konvergiert genau dann *schwach, wenn $(\|f_n\|)_{n=1}^\infty$ beschränkt ist und $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ für alle x aus einer in $\mathbf{X}$ dichten Teilmenge Cauchy-Folge ist.*

Satz 1.35 *Ist $\mathbf{X}$ separabel, so besitzt jede beschränkte Folge in $\mathbf{X}^*$ eine *schwach konvergente Teilfolge.*

Man nennt eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}$ **schwach konvergent** gegen $x \in \mathbf{X}$, wenn die Bedingung $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ für alle $f \in \mathbf{X}^*$ gilt (in Zeichen: $x_n \rightharpoonup x$). Unter Beachtung von $f(x_n) = j_{x_n}(f)$ und $f(x) = j_x(f)$ sowie Satz 1.9a ergibt sich

Folgerung 1.36 *Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ konvergiert genau dann schwach gegen $x \in \mathbf{X}$, wenn $(\|x_n\|)_{n=1}^\infty$ beschränkt ist und $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ für alle f aus einer in $\mathbf{X}^*$ dichten Teilmenge gilt.*

Satz 1.37 *In einem reflexiven normierten Raum hat jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

1.10 Übungsaufgaben

1. Es seien $(\mathbf{X}, \|.\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}$ und $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K}$. Man zeige:

$$\exists\, f \in \mathbf{X}^* : f(x_n) = \alpha_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$
$$\iff \quad \exists\, M > 0 : \left|\sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_k\right| \le M \left\|\sum_{k=1}^n \beta_k x_k\right\| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall \beta_k \in \mathbb{K}$$

2. Es seien $\mathbf{X}$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$, $p : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional und $x_0 \in \mathbf{X}$. Zeigen Sie, dass dann ein $f \in L(\mathbf{X}, \mathbb{R})$ existiert, so dass

$$f(x_0) = p(x_0) \quad \text{und} \quad -p(-x) \le f(x) \le p(x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}$$

gilt.

3. Man zeige, dass jeder endlichdimensionale normierte Raum reflexiv ist.

4. Zeigen Sie, dass

   (a) die Abbildung

$$T : \ell^1 \longrightarrow (\ell^\infty)^*, \quad x = (s_n)_{n=0}^\infty \mapsto T_x \quad \text{mit} \quad T_x\,(t_n)_{n=0}^\infty = \sum_{n=0}^\infty s_n t_n$$

   einen linearen isometrischen Operator definiert, welcher nicht surjektiv ist,

   (b) es keinen Isomorphismus zwischen ℓ^1 und $(\ell^\infty)^*$ gibt.

Kapitel 2

Die Fredholm'sche Alternative

In diesem Kapitel beschreiben wir eine Klasse von linearen beschränkten Operatoren $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ in einem Banachraum $\mathbf{X}$ mit der Eigenschaft, dass die Gleichung

$$Ax = y \tag{2.1}$$

genau dann für jedes $y \in \mathbf{X}$ lösbar ist, wenn die homogene Gleichung

$$Ax = \Theta \tag{2.2}$$

nur die triviale Lösung besitzt.

2.1 Der adjungierte Operator

Für $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ definiert man den **adjungierten Operator** $A^* : \mathbf{Y}^* \longrightarrow \mathbf{X}^*$ durch

$$(A^*g)(x) = g(Ax) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,.$$

Lemma 2.1 *Für alle* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *gilt* $A^* \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^*)$ *und* $\|A^*\|_{\mathbf{Y}^* \to \mathbf{X}^*} = \|A\|_{\mathbf{X} \to \mathbf{Y}}$.

Es gilt ferner

(a) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $A, B \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$,

(b) $(AB)^* = B^* A^*$, $A \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, $B \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Sind $(\mathbf{H}_k, \langle .,. \rangle_k)$, $k = 1, 2$, zwei Hilberträume und $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$, so kann wegen Theorem 1.4 der adjungierte Operator $A^* \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_2^*, \mathbf{H}_1^*)$ identifiziert werden mit dem Operator $A^+ \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_1)$, für den gilt

$$\langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, A^+ y \rangle_1 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}_1\,,\ \forall\, y \in \mathbf{H}_2\,. \tag{2.3}$$

Genauer: Sind $J_k : \mathbf{H}_k^* \longrightarrow \mathbf{H}_k$, $f \mapsto x_f$ mit $f(x) = \langle x, x_f \rangle_k\ \forall\, x \in \mathbf{H}_k$ (vgl. Theorem 1.4) und $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$, $A^+ \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_1)$ mit (2.3), so folgt $(\forall\, f \in \mathbf{H}_2^*\,,\ \forall\, x \in \mathbf{H}_1)$

$$\langle x, J_1 A^* f \rangle_1 = (A^* f)(x) = f(Ax) = \langle Ax, J_2 f \rangle_2 = \langle x, A^+ J_2 f \rangle_1\,,$$

also

$$J_1 A^* = A^+ J_2 \quad \text{bzw.} \quad A^* = J_1^{-1} A^+ J_2\,.$$

Die Menge $A(\mathbf{X}) = \{Ax : x \in \mathbf{X}\}$ nennen wir **Bild des Operators** A und bezeichnen sie mit $R(A)$. Die Mengen $N(A)$ und $R(A)$ sind lineare Teilräume von $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{Y}$. Das Element x ist genau dann Lösung von (2.2), wenn $x \in N(A)$ gilt, und die Gleichung (2.1) ist genau dann lösbar, wenn $y \in R(A)$ gilt.

Für Teilmengen $M \subset \mathbf{X}$ und $M_* \subset \mathbf{X}^*$ definieren wir

$$M^\perp = \{f \in \mathbf{X}^* : f(x) = 0 \quad \forall\, x \in M\} \quad \text{und} \quad {}^\perp M_* = \{x \in \mathbf{X} : f(x) = 0 \quad \forall\, f \in M_*\}\,.$$

Aus $y \in R(A)$ folgt $g(y) = 0$ für alle $g \in N(A^*)$, d.h.

$$R(A) \subset {}^\perp N(A^*)\,.$$

Frage. Wann gilt in dieser Beziehung die Gleichheit?

Satz 2.2 *Für $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ gilt stets $\overline{R(A)} = {}^\perp N(A^*)$.*

Folgerung 2.3 *Es gilt $R(A) = {}^\perp N(A^*)$ genau dann, wenn $R(A)$ abgeschlossen (in $\mathbf{Y}$) ist.*

Frage: Wann ist $R(A)$ abgeschlossen?

2.2 Operatoren mit abgeschlossenem Bild

Lemma 2.4 *Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume sowie $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ mit $N(A) = \{\Theta\}$. Dann ist $R(A)$ genau dann abgeschlossen, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass*

$$\|x\|_{\mathbf{X}} \le c\, \|Ax\|_{\mathbf{Y}} \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,. \tag{2.4}$$

Satz 2.5 *Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume sowie $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Dann ist $R(A)$ genau dann abgeschlossen, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass*

$$\operatorname{dist}(x, N(A)) \le c\, \|Ax\|_{\mathbf{Y}} \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,. \tag{2.5}$$

Beispiel 2.6 *Für $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{C}[0,1]$ und den Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ mit $(Af)(t) = tf(t)$, $t \in [0,1]$ erhalten wir unter Verwendung von Lemma 2.4, dass $R(A)$ nicht abgeschlossen ist.*

2.3 Kompakte Operatoren

Definition 2.7 *Einen Operator $T \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ nennt man* **kompakt** *oder* **vollstetig**, *wenn für jede beschränkte Menge $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ das Bild $T(\mathbf{X}_0) = \{Tx : x \in \mathbf{X}_0\} \subset \mathbf{Y}$ relativ kompakt ist.*

Satz 2.8 *Aus $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ folgt $T^* \in \mathcal{K}(\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^*)$.*

2.4 Fredholmoperatoren

Einen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ nennt man **Fredholmoperator**, wenn er ein abgeschlossenes Bild hat und sowohl $N(A)$ als auch $N(A^*)$ endlichdimensional sind.

Lemma 2.9 *Ist* $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{X}$ *ein abgeschlossener Teilraum des normierten Raumes* $\mathbf{X}$, *so existiert für jedes* $\theta \in (0,1)$ *ein* $x_\theta \in \mathbf{X}$ *mit* $\|x_\theta\| = 1$ *und* $\operatorname{dist}(x_\theta, \mathbf{X}_0) \geq \theta$.

Lemma 2.10 *Ist* $S_{\mathbf{X}} = \{x \in \mathbf{X} : \|x\| = 1\}$ *kompakt, so ist der normierte Raum* $\mathbf{X}$ *endlichdimensional.*

Lemma 2.11 *Sind* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *Banachräume,* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *und* $R(A)$ *abgeschlossen, so gilt* $R(A^*) = N(A)^\perp$. *Insbesondere ist* $R(A^*)$ *auch abgeschlossen.*

Theorem 2.12 *Sind* $\mathbf{X}$ *ein Banachraum,* $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ *und* $A = I - T$, *so gilt* $R(A) = \overline{R(A)}$. *Außerdem ist* $\dim N(A) = 0$ *genau dann, wenn* $\dim N(A^*) = 0$ *gilt.*

Folgerung 2.13 (Fredholm'sche Alternative) *Unter den Annahmen des Theorems 2.12 gilt entweder* $R(A) = \mathbf{X}$ *und* $N(A) = \{\Theta\}$ *oder* $R(A) \neq \mathbf{X}$ *und* $N(A) \neq \{\Theta\}$.

Bemerkung 2.14 *Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.12 sind die Nullräume* $N(A)$ *und* $N(A^*)$ *endlichdimensional und ihre Dimensionen gleich.*

2.5 Über das Spektrum kompakter Operatoren

Sei $\mathbf{X}$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$. Das Spektrum $\sigma(A)$ eines Operators $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ besteht aus allen Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $A - \lambda I$ nicht invertierbar ist. Die Menge $\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ heißt **Resolventenmenge** von A. Nach Folgerung 1.11 sind $\rho(A)$ offen und somit $\sigma(A)$ abgeschlossen. Man nennt $\lambda \in \sigma(A)$ einen **Eigenwert** von A, wenn $\dim N(A - \lambda I) > 0$ gilt.

Beispiel 2.15 *Für den Verschiebungsoperator* $V : \ell^p \longrightarrow \ell^p$, $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ *ist* $\sigma(V) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$, *wobei im Fall* $1 \leq p < \infty$ *nur die* λ *mit* $|\lambda| < 1$ *Eigenwerte sind, während im Fall* $p = \infty$ *alle* $\lambda \in \sigma(V)$ *Eigenwerte sind.*

Satz 2.16 *Sind* $\mathbf{X}$ *ein Banachraum und* $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$, *so besteht* $\sigma(T)\setminus\{0\}$ *aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten, deren einzig möglicher Häufungspunkt die Null ist.*

2.6 Übungsaufgaben

1. Sei $1 \leq p < \infty$. Wir betrachten den Verschiebungsoperator

$$V : \ell^p \longrightarrow \ell^p, \quad (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (\xi_1, \xi_2, \ldots).$$

   Beschreiben Sie V^*.

2. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume. Dann ist $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

   (b) Sei $\mathbf{Z}$ ein weiterer Banachraum. Sind $T \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ und $S \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ und sind T oder S kompakt, so ist auch $S\,T$ kompakt.

3. Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume, $T \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ und $T_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ eine Folge linearer beschränkter Operatoren mit $\dim R(T_n) < \infty$ und $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} \longrightarrow 0$. Zeigen Sie, dass dann $T : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ kompakt ist.

4. Wir betrachten den Integraloperator

$$T : \mathbf{C}[0,1] \longrightarrow \mathbf{C}[0,1]\,, \quad (Tx)(s) = \int_0^s k(s,t)x(t)\,dt$$

mit $k \in \mathbf{C}([0,1]^2)$. Zeigen Sie, dass die Operatorgleichung

$$\lambda x - Tx = y \quad \text{mit} \quad \lambda \neq 0$$

für alle $y \in \mathbf{C}[0,1]$ eindeutig lösbar ist.

5. Zeigen Sie, dass der Operator

$$T : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty\,, \quad (\xi_n)_{n=0}^\infty \mapsto \big((n+1)^{-1}\xi_n\big)_{n=0}^\infty$$

kompakt ist.

(Z) Es seien $A_n, A \in \mathcal{L}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ und $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Man zeige: Aus $A_n \longrightarrow A$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|A_nT - AT\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Z})} = 0\,.$$

Kapitel 3

Räume messbarer Funktionen

3.1 Einiges aus der Integrationstheorie

Im Weiteren verstehen wir unter dem Tripel (Ω, Σ, P) einen **Maßraum**, d.h., $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra über der nichtleeren Menge Ω und $P : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ ein (σ-additives und σ-endliches) Maß:

(M1) $A_n \in \Sigma \ (n = 1, 2, \ldots)\,,\ A_j \cap A_k = \emptyset \ (j \neq k) \Longrightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\,,$

(M2) $\exists\, A_n \in \Sigma : \ \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,,\ P(A_n) < \infty\,,\ n = 1, 2, \ldots$

Die Mengen $A \in \Sigma$ nennt man **messbar**. Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{P_\infty\}$ heißt **messbar**, wenn für jede offene Menge $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ das vollständige Urbild $f^{-1}(B)$ messbar ist. Wir sagen, dass eine Eigenschaft P-fast überall (P-f.ü.) gilt, wenn sie mit eventueller Ausnahme einer Menge vom P-Maß Null erfüllt ist.

Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ nennt man **Treppenfunktion**, wenn sie nur endlich viele Werte $z_1\,, z_2\,, \ldots\,, z_m$ ($m = m(f)\,,\ z_j \neq z_k$ für $k \neq j$) annimmt. Eine solche Treppenfunktion ist genau dann messbar, wenn alle Mengen $A_k := f^{-1}(\{z_k\})\,,\ k = 1, \ldots, m\,,$ messbar sind. Man nennt eine solche Treppenfunktion P-**integrierbar**, wenn die Summe $\sum_{k=1}^{m} |z_k| P(A_k)$ endlich ist, und definiert das Integral einer integrierbaren Treppenfunktion als

$$\int_\Omega f(\omega) P(d\omega) = \sum_{k=1}^{m} z_k P(A_k)\,.$$

Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ heißt P-**integrierbar**, wenn eine Folge (f_n) P-integrierbarer Treppenfunktionen existiert, so dass $f_n(\omega) \longrightarrow f(\omega)$ P-f.ü. auf Ω gilt und für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index N existiert mit

$$\int_\Omega |f_n(\omega) - f_m(\omega)| P(d\omega) < \varepsilon \quad \forall\, m, n > N\,.$$

Offenbar existiert dann der (endliche) Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega) P(d\omega)\,.$$

Dieser ist unabhängig von der Wahl der Folge (f_n) und wird mit

$$\int_\Omega f(\omega)P(d\omega) \tag{3.1}$$

bezeichnet. Die Menge der P-integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\Omega, \Sigma, P)$. Für $A \in \Sigma$ definiert man

$$\int_A f(\omega)P(d\omega) := \int_\Omega \chi_A(\omega)f(\omega)P(d\omega)\,,$$

wobei $\chi_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ \omega \mapsto \left\{ \begin{array}{lcl} 1 & : & \omega \in A\,, \\ 0 & : & \omega \notin A\,, \end{array} \right\}$ die **charakteristische Funktion** der Menge A bezeichnet. Das Integral (3.1) hat u.a. folgende Eigenschaften:

1. $f, g \in \mathbf{L}\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \Longrightarrow \alpha f + \beta g \in \mathbf{L}\,,$
$$\int_\Omega [\alpha f(\omega) + \beta g(\omega)]P(d\omega) = \alpha \int_\Omega f(\omega)P(d\omega) + \beta \int_\Omega g(\omega)P(d\omega)\,,$$
2. $f \in \mathbf{L} \iff |f| \in \mathbf{L}\,,$
3. $f \in \mathbf{L}\,,\ f(\omega) \geq 0$ P-f.ü. auf $\Omega \Longrightarrow$
$$\int_\Omega f(\omega)P(d\omega) \geq 0 \quad \text{und} \quad = 0 \iff f(\omega) = 0 \ P\text{-f.ü.}$$
4. Ist $f \in \mathbf{L}$, so ist die Mengenfunktion $Q : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$,
$$A \mapsto \int_A f(\omega)P(d\omega)$$
σ-additiv und absolut stetig. (Man nennt eine Mengenfunktion $Q : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ absolut stetig, wenn aus $P(A) = 0$ stets $Q(A) = 0$ folgt. Dies ist äquivalent dazu, dass $\lim_{P(A)\to 0} Q(A) = 0$ gleichmäßig bzgl. $A \in \Sigma$ gilt.)

Wir erinnern an einige Sätze aus der Maß- und Integrationstheorie. Es seien $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ messbare Funktionen.

Satz 3.1 (Beppo Levi) *Gilt $0 \leq f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \ldots$ f.ü. und $f_n(\omega) \longrightarrow f(\omega)$ f.ü., so ist $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ messbar und*

$$\int_\Omega f(\omega)\,P(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\,P(d\omega)\,.$$

Satz 3.2 (Fatou) *Für messbare Funktionen $f_n : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ gilt*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega)\,P(d\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)P(d\omega)\,.$$

Satz 3.3 (Lebesgue) *Es seien* $g : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ *integrierbar und* $f_n(\omega) \longrightarrow f(\omega)$ *f.ü. sowie* $|f_n(\omega)| \le g(\omega)$ *f.ü.,* $n = 1,2,\ldots$ *Dann ist* $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ *integrierbar, und es gilt*

$$\int_\Omega f(\omega)\, P(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\, P(d\omega)\,.$$

Mit $\mathcal{S}$ bezeichnen wir die Menge der bez. des Lebesgue-Maßes m messbaren Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$.

Satz 3.4 (Lusin) *Es seien* $f \in \mathcal{S}$ *beschränkt und* $\varepsilon > 0$ *beliebig. Dann existiert eine stetige Funktion* $f_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit den Eigenschaften*

$$m\,\{t \in [0,1] : f(t) \ne f_0(t)\} < \varepsilon \quad \textit{und} \quad \sup\{|f_0(t)| : t \in [0,1]\} \le \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}\ .$$

Man sagt, dass eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{S}$ gegen $f \in \mathcal{S}$ dem **Maße nach konvergiert**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} m\,\{t \in [0,1] : |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\} = 0$$

gilt.

Satz 3.5 (Riesz) *Konvergiert* f_n *gegen* f *dem Maße nach, so existiert eine Teilfolge* $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ *, die gegen* f *f.ü. konvergiert.*

Satz 3.6 (Fréchet) *Jede Funktion aus* $\mathcal{S}$ *ist Grenzwert einer dem Maße nach konvergenten Folge von Polynomen.*

Sind $(\Omega_j, \Sigma_j, P_j)$, $j = 1,2$, zwei Maßräume, so bezeichnet man mit $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ die kleinste σ-Algebra, die alle Mengen der Gestalt $A_1 \times A_2$ mit $A_j \in \Sigma_j$ enthält. Auf $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ existiert ein eindeutig bestimmtes (σ-additives und σ-endliches) Maß $P_1 \times P_2$ mit der Eigenschaft

$$(P_1 \times P_2)(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2)\,, \quad A_j \in \Sigma_j\,.$$

Das Integral bzgl. dieses Maßes bezeichnen wir mit

$$\iint\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)(P_1 \times P_2)(d\omega_1 d\omega_2) \quad \text{oder} \quad \iint\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)P_1(d\omega_1)P_2(\omega_2)\,. \tag{3.2}$$

Theorem 3.7 (Fubini-Tonelli) *Eine* $\Sigma_1 \times \Sigma_2$*-messbare Funktion* $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ *ist genau dann* $P_1 \times P_2$*-integrierbar, wenn eines der iterierten Integrale*

$$\int\limits_{\Omega_2} \left[\int\limits_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)P_1(d\omega_1) \right] P_2(d\omega_2) \quad \textit{oder} \quad \int\limits_{\Omega_1} \left[\int\limits_{\Omega_2} f(\omega_1,\omega_2)P_2(d\omega_2) \right] P_1(d\omega_1)$$

existiert. Diese beiden Integrale sind dann gleich dem Integral (3.2).

3.2 Der Raum S

Auf der Menge $\mathcal{S}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad m\,\{t \in [0,1] : f(t) \ne g(t)\} = 0$$

und identifizieren im Weiteren die messbare Funktion f mit der zugehörigen Äquivalenzklasse $[f]_\sim$. Mit $\mathbf{S} = \mathbf{S}[0,1]$ bezeichnen wir den Raum dieser Äquivalenzklassen versehen mit der Metrik

$$\rho(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\, dt\,.$$

Satz 3.8 *Die Konvergenz in* $\mathbf{S}$ *ist die Konvergenz dem Maße nach.*

Satz 3.9 *Der metrische Raum* $\mathbf{S}$ *ist vollständig und separabel.*

3.3 Die $\mathbf{L}^p$-Räume

Sei $1 \le p < \infty$. Unter $\mathbf{L}^p = \mathbf{L}^p[0,1]$ verstehen wir den Teilraum von $\mathbf{S}$ der Funktionen (genauer Äquivalenzklassen von Funktionen) f, für die $|f|^p$ integrierbar ist. Auf $\mathbf{L}^p$ definieren wir

$$\|.\|_p : \mathbf{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f \mapsto \left(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Satz 3.10 *Die Räume* $(\mathbf{L}^p, \|.\|_p)$, $1 \le p < \infty$, *sind separable Banachräume.*

Mit $\mathbf{L}^\infty = \mathbf{L}^\infty[0,1]$ bezeichnet man die Teilmenge von $\mathbf{S}$ der wesentlich beschränkten Funktionen. Das sind die $f \in \mathcal{S}$, für die ein $M \in \mathbb{R}$ mit $m\{t \in [0,1] : |f(t)| > M\} = 0$ existiert. Man definiert $\|.\|_\infty : \mathbf{L}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f \mapsto \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in [0,1]\} := \inf\{M \in \mathbb{R} : m\{t \in [0,1] : |f(t)| > M\} = 0\}\,.$$

Satz 3.11 $(\mathbf{L}^\infty, \|.\|_\infty)$ *ist ein Banachraum.*

Kapitel 4

Anhang: Ausgewählte Beweise

4.1 Zum Abschnitt 0.2 (Metrische Räume)

Beweis von Theorem 0.16. Es seien $\mathcal{F}$ präkompakt und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen Folgerung 0.10 ist $\mathcal{F}$ beschränkt, d.h. die Funktionen aus $\mathcal{F}$ sind gleichmäßig beschränkt, und außerdem existiert eine endliches ε-Netz $\{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$ für $\mathcal{F}$. Für jedes $f \in \mathcal{F}$ existieren somit ein $k \in \{1, \dots, m\}$ und ein $\delta > 0$, so dass $\|f - f_k\|_\infty < \varepsilon/3$ und

$$|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3 \quad \forall\, x, y \in \mathbf{E} \quad \text{mit} \quad d(x, y) < \delta\,.$$

Es folgt

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \varepsilon$$

für $x, y \in \mathbf{E}$, $d(x, y) < \delta$, womit auch die gleichgradige Stetigkeit der Funktionen aus $\mathcal{F}$ gezeigt ist.

Es seien nun umgekehrt die Funktionen aus $\mathcal{F} \subset \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Nach Folgerung 0.10 ist $\mathbf{E}$ separabel, d.h., es existiert eine in $\mathbf{E}$ dichte Punktfolge $(x_n)_{n=1}^\infty$. Für eine beliebige Folge $(f_n)_{n=1}^\infty = \left(f_n^1\right)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ hat die Zahlenfolge $\left(f_n^1(x_1)\right)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge $\left(f_n^2(x_1)\right)_{n=1}^\infty$. Ebenso hat $\left(f_n^2(x_2)\right)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge $\left(f_n^3(x_2)\right)_{n=1}^\infty$. Setzen wir diesen Prozess fort, so erhalten wir eine Folge von Funktionenfolgen $\left(f_n^k\right)_{n=1}^\infty$, $k = 1, 2, \dots$, mit der Eigenschaft, dass $\left(f_n^{k+1}\right)_{n=1}^\infty$ Teilfolge von $\left(f_n^k\right)_{n=1}^\infty$ ist und die Zahlenfolgen $\left(f_n^k(x_{k-1})\right)_{n=1}^\infty$ konvergieren. Es folgt die Konvergenz jeder Zahlenfolge $(f_n^n(x_k))_{n=1}^\infty$, $k = 1, 2, \dots$ Wir zeigen, dass $(f_n^n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$ ist. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f_n^n(x) - f_n^n(y)| < \varepsilon/3$ für alle $x, y \in \mathbf{E}$ mit $d(x, y) < \delta$ und für alle $n = 1, 2, \dots$ Da $\mathbf{E}$ kompakt ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\mathbf{E} = \bigcup\limits_{k=1}^N U_\delta(x_k)$. Ferner existiert ein $M \in \mathbb{N}$, für das

$$|f_n^n(x_k) - f_m^m(x_k)| < \varepsilon/3 \quad \forall\, k = 1, \dots, N\,,\ \forall\, m, n \ge M$$

gilt. Ist nun $x \in \mathbf{E}$ beliebig, so existiert ein $j = j(x) \in \{1, \dots, N\}$, so dass $x \in U_\delta(x_j)$. Es folgt für $m, n \ge M$

$$|f_n^n(x) - f_m^m(x)| \le |f_n^n(x) - f_n^n(x_j)| + |f_n^n(x_j) - f_m^m(x_j)| + |f_m^m(x_j) - f_m^m(x)| < \varepsilon\,.$$

$\square$

Beweis von Satz 0.18. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $x_n \in A_n$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(A_n) < \varepsilon \; \forall\, n \geq n_0$. Da $x_n, x_m \in A_{n_0} \; \forall\, n, m \geq n_0$, folgt $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\forall\, n, m \geq n_0$. Also ist $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge und somit konvergent, $x_n \longrightarrow x^*$. Aus der Abgeschlossenheit der A_n folgt $x^* \in A_n \; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus $d(A_n) \longrightarrow 0$.

$\square$

Beweis von Satz 0.19. Wir nehmen an, dass $\mathbf{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit nirgends dichten Mengen A_n gilt. Wir setzen $\varepsilon_0 = 1$ und wählen $x_0 \in \mathbf{X}$ beliebig. Die Kugel $K_{\varepsilon_0}(x_0)$ enthält eine Kugel $K_{\varepsilon_1}(x_1)$, die zu A_1 durchschnittsfremd ist, wobei $\varepsilon_1 \leq 1/2$ gewählt werden kann. Diese Prozedur lässt sich beliebig fortsetzen:

$$K_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset K_{\varepsilon_n}(x_n)\,, \quad K_{\varepsilon_n}(x_n) \cap A_n = \emptyset\,, \quad \varepsilon_n \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

Nach Satz 0.18 existiert ein $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{\varepsilon_n}(x_n)$. Aber $x^* \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{X}$. $\square$

4.2 Zum Abschnitt 1.2 (Das Theorem von Banach-Steinhaus)

Beweis von Lemma 1.6. Nach Voraussetzung existiert eine Zahl $\alpha \in (0, \infty)$, so dass $\|Ax\| \leq \alpha$ $\forall\, A \in \mathcal{F}$, $\forall\, x \in K_\varepsilon(x^*)$ gilt. Seien nun $x \in \mathbf{X}$, $\|x\| \leq 1$ und $\widetilde{x} := \varepsilon x + x^*$, so dass $\widetilde{x} \in K_\varepsilon(x^*)$. Es folgt

$$\|A\widetilde{x}\| = \|\varepsilon Ax + Ax^*\| \geq \varepsilon \, \|Ax\| - \|Ax^*\| \,,$$

also

$$\|Ax\| \leq \frac{\|A\widetilde{x}\| + \|Ax^*\|}{\varepsilon} \leq \frac{\alpha + \|Ax^*\|}{\varepsilon}\,.$$

$\square$

Beweis von Theorem 1.7. Wir nehmen an, dass $\sup\{\|A\| : A \in \mathcal{F}\} = \infty$ ist, und wählen ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $x_0 \in \mathbf{X}$ beliebig. Nach Lemma 1.6 ist

$$M(x_0, \varepsilon_0) = \sup\{\|Ax\| : A \in \mathcal{F}, x \in \mathbf{X}, \|x - x_0\| \leq \varepsilon_0\} = \infty\,,$$

so dass ein $x_1 \in K_{\varepsilon_0}(x_0)$ und ein $A_1 \in \mathcal{F}$ mit $\|A_1 x_1\| > 1$ existieren. Aus der Stetigkeit von A_1 folgt die Existenz einer Kugel $K_{\varepsilon_1}(x_1) \subset K_{\varepsilon_0}(x_0)$ mit $\varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$ und $\|A_1 x\| > 1 \; \forall\, x \in K_{\varepsilon_1}(x_1)$. Auf diese Weise folgt die Existenz einer Folge $(K_{\varepsilon_n}(x_n))_{n=1}^{\infty}$ abgeschlossener Kugeln mit $K_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset K_{\varepsilon_n}(x_n)$, $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, und einer zugehörigen Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ von Operatoren $A_n \in \mathcal{F}$ mit $\|A_n x\| > n \; \forall\, x \in K_{\varepsilon_n}(x_n)$. Nach Satz 0.18 existiert ein $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{\varepsilon_n}(x_n)$, woraus $\|A_n x^*\| > n \; \forall\, n = 1, 2, \ldots$ im Widerspruch zur punktweisen Beschränkheit der Familie $\mathcal{F}$ folgt.

$\square$

4.3 Zum Abschnitt 2.3 (Kompakte Operatoren)

Beweis von Satz 2.8. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, existieren $x_1, \ldots, x_m \in U_1^{\mathbf{X}}(\Theta) = \{x \in \mathbf{X} : \|x\|_{\mathbf{X}} < 1\}$, so dass $\|Tx - Tx_j\|_{\mathbf{Y}} < \varepsilon/4$ für alle $x \in U_1^{\mathbf{X}}(\Theta)$ und ein gewisses $j =$

$j(x) \in \{1, \ldots, m\}$. Für $g \in \mathbf{Y}^*$ definieren wir $Bg = \begin{bmatrix} g(Tx_1) & \cdots & g(Tx_m) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^m$. Dann ist $B\left(U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta)\right)$ relativ kompakt, so dass $g_1, \ldots, g_n \in U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta)$ existieren, für die $\|Bg - Bg_k\| < \varepsilon/4$ für alle $g \in U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta)$ und für ein gewisses $k = k(g) \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Das bedeutet

$$|g(Tx_i) - g_k(Tx_i)| < \varepsilon/4 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}\ ,\ k = k(g)\,.$$

Wir erhalten für alle $x \in U_1^{\mathbf{X}}(\Theta)$, $g \in U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta)$, $j = j(x)$ und $k = k(g)$

$$\begin{aligned} |(T^*g)(x) - (T^*g_k)(x)| &= |g(Tx) - g_k(Tx)| \\ &\le |g(Tx) - g(Tx_j)| + |g(Tx_j) - g_k(Tx_j)| + |g_k(Tx_j) - g_k(Tx)| \\ &< \|g\|\,\|Tx - Tx_j\| + \frac{\varepsilon}{4} + \|g_k\|\,\|Tx_j - Tx\| < \frac{3\varepsilon}{4}\,, \end{aligned}$$

d.h., $\{T^*g_k : k = 1, \ldots, n\}$ ist ε-Netz für $T^*\left(U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta)\right)$. □

4.4 Zum Abschnitt 2.4 (Fredholmoperatoren)

Beweis von Lemma 2.11. Es sei $f \in R(A^*)$, d.h. $A^*g = f$ für ein gewisses $g \in \mathbf{Y}^*$. Aus $x \in N(A)$ folgt $f(x) = (A^*g)(x) = g(Ax) = g(\Theta) = 0$, d.h. $R(A^*) \subset N(A)^\perp$.

Sei umgekehrt $f \in N(A)^\perp$. Für $y = Ax \in R(A)$ setzen wir $g(y) = f(x)$. (Diese Definition von $g \in L(R(A), \mathbb{C})$ ist korrekt.) Für alle $z \in N(A)$ gilt dann $|g(y)| = |f(x - z)| \le \|f\|\,\|x - z\|$ und somit nach Satz 2.5 mit einer gewissen Konstanten $c > 0$

$$|g(y)| \le \|f\| \operatorname{dist}(x, N(A)) \le c\,\|f\|\,\|y\|\ , \quad y \in R(A)\,.$$

Sei nun $\widetilde{g} \in \mathbf{Y}^*$ eine Fortsetzung von g auf ganz $\mathbf{Y}$, so dass für alle $x \in \mathbf{X}$ gilt $\widetilde{g}(Ax) = g(Ax) = f(x)$, d.h. $f = A^*\widetilde{g} \in R(A^*)$. □

Beweis von Theorem 2.12. Wir zeigen, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass

$$\operatorname{dist}(x, N(A)) \le c\,\|Ax\| \quad \forall\, x \in \mathbf{X} \tag{4.1}$$

gilt. Wir nehmen an, es gebe eine Punktfolge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}$ mit den Eigenschaften

$$\|Ax_n\| > 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(x, N(A)) = c_n\,\|Ax_n\|\ ,\ c_n \longrightarrow \infty\,.$$

Wir setzen $x_n^0 = \Big[c_n\,\|Ax_n\|\Big]^{-1} x_n$. Dann gilt

$$\operatorname{dist}(x_n^0, N(A)) = 1 \quad \text{und} \quad \left\|Ax_n^0\right\| = c_n^{-1} \longrightarrow 0\,.$$

Nun existieren $x_n^1 \in N(A)$ mit $\left\|x_n^0 - x_n^1\right\| \le 2$. Für $z_n = x_n^0 - x_n^1$ folgt

$$\operatorname{dist}(z_n, N(A)) = 1\,,\ \|z_n\| \le 2 \quad \text{und} \quad \|Az_n\| \longrightarrow 0\,.$$

Da $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$, existiert eine Teilfolge $\left(z_n^1\right)_{n=1}^\infty \subset (z_n)_{n=1}^\infty$ mit $Tz_n^1 \longrightarrow z$. Es folgt

$$z_n^1 = Tz_n^1 + Az_n^1 \longrightarrow z \quad \text{und somit} \quad Az_n^1 \longrightarrow Az = \Theta\,,$$

d.h. $z \in N(A)$. Andererseits ist aber $\left\|z_n^1 - z\right\| \ge \operatorname{dist}(z_n^1, N(A)) = 1$. Somit ist (4.1) gezeigt.

Ist nun $\dim N(A^*) = 0$, so folgt $R(A) = {}^{\perp}N(A^*) = \mathbf{X}$. Ist $x_1 \neq \Theta$ und $Ax_1 = \Theta$, so existieren also $x_{n+1} \in \mathbf{X}$ mit $Ax_{n+1} = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Wegen $A^n x_n = A^{n-1}x_{n-1} = \ldots = Ax_1 = \Theta$ und $A^{n-1}x_n = \ldots = Ax_2 = x_1 \neq \Theta$ steht in dieser Inklusionskette $N(A) \subset N(A^2) \subset \ldots \subset N(A^n) \subset \ldots$ nirgends das Gleichheitszeichen. In Anwendung von Lemma 2.9 erhalten wir eine Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $z_n \in N(A^n)$, $\|z_n\| = 1$ und $\operatorname{dist}(z_n, N(A^{n-1})) \geq 1/2$. Somit hat $(Tz_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge. Andererseits gilt aber für $n > m$

$$\|Tz_n - Tz_m\| = \|z_n - (z_m - Az_m + Az_n)\| \geq \frac{1}{2}.$$

Also: $\dim N(A) = 0$.

Ist umgekehrt $\dim N(A) = 0$, so folgt wegen $R(A^*) = N(A)^{\perp} = \mathbf{X}^*$ (siehe Lemma 2.11) und $T^* \in \mathcal{K}(\mathbf{X}^*)$ (siehe Satz 2.8) wie im vorhergehenden Beweisschritt $\dim N(A^*) = 0$. $\square$

4.5 Zum Abschnitt 2.5 (Das Spektrum kompakter Operatoren)

Beweis von Satz 2.16. Ist $\lambda \neq 0$ und $\dim N(T - \lambda I) = 0$, so gilt wegen Folgerung 2.13 $R(T - \lambda I) = R\left(-\lambda(I - \lambda^{-1}T)\right) = \mathbf{X}$, so dass $\lambda \in \rho(T)$.

Wir nehmen nun an, dass paarweise verschiedene $\lambda_n \in \sigma(T)$, $n = 1, 2, \ldots$, mit $|\lambda_n| \geq \varepsilon > 0$ existieren. Dann gibt es $x_n \in \mathbf{X} \setminus \{\Theta\}$, so dass $Tx_n = \lambda_n x_n$. Dann ist das System $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ linear unabhängig. Sonst würde ein Index m existieren, für den das System $\{x_1, \ldots, x_m\}$ linear unabhängig ist und $x_{m+1} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$ gilt. Dann folgt

$$Tx_{m+1} = \lambda_{m+1}x_{m+1} = \lambda_{m+1}\alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda_{m+1}\alpha_m x_m$$

und

$$Tx_{m+1} = \alpha_1 Tx_1 + \cdots + \alpha_m Tx_m = \alpha_1\lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_m\lambda_m x_m,$$

also

$$\alpha_1(\lambda_{m+1} - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_m(\lambda_{m+1} - \lambda_m)x_m = \Theta.$$

Das bedeutet aber $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$ im Widerspruch zu $x_{m+1} \neq \Theta$.

Wir setzen $\mathbf{X}_n = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Dann gilt $\mathbf{X}_1 \subset \mathbf{X}_2 \subset \cdots \subset \mathbf{X}_n \subset \mathbf{X}_{n+1} \subset \cdots$, wobei an keiner Stelle Gleichheit auftritt. Aus Lemma 2.9 folgt die Existenz von Elementen $y_n \in \mathbf{X}_n$ mit $\operatorname{dist}(y_n, \mathbf{X}_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ und $\|y_n\| = 1$, $n = 2, 3, \ldots$ Es gilt $T(\mathbf{X}_n) \subset \mathbf{X}_n$ und $(T - \lambda_n I)(\mathbf{X}_n) \subset \mathbf{X}_{n-1}$. Wegen

$$Ty_n - Ty_m = (T - \lambda_n I)y_n - Ty_m + \lambda_n y_n = \lambda_n\left[y_n - \lambda_n^{-1}(Ty_m - (T - \lambda_n I)y_n)\right]$$

folgt für $n > m$ die Ungleichung $\|Ty_n - Ty_m\| \geq |\lambda_n|/2 \geq \varepsilon/2$, so dass $(Ty_n)_{n=1}^{\infty}$ keine konvergente Teilfolge besitzt im Widerspruch zur Kompaktheit von T.

Damit ist $\sigma(T) \cap \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \frac{1}{n}\right\}$ endlich für jedes $n \in \mathbb{N}$, so dass $\sigma(T)$ höchstens abzählbar ist. $\square$

4.6 Zum Kapitel 3 (Räume messbarer Funktionen)

Beweis von Satz 3.8. Sind $\rho(f_n, f) \longrightarrow 0$, $\varepsilon > 0$ und

$$A_n = A_n(\varepsilon) = \{t \in [0,1] : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon\},$$

so folgt

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, m(A_n) = \int_{A_n} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, dt \le \int_{A_n} \frac{|f_n(t)-f(t)|\, dt}{1+|f_n(t)-f(t)|} \le \rho(f_n, f) \longrightarrow 0\,.$$

Sind umgekehrt $f_n \longrightarrow f$ dem Maße nach, $\varepsilon > 0$ beliebig und $A_n = A_n(\varepsilon)$ wie oben, so gilt

$$\rho(f_n, f) = \int_{A_n} \frac{|f_n(t)-f(t)|\, dt}{1+|f_n(t)-f(t)|} + \int_{[0,1]\setminus A_n} \frac{|f_n(t)-f(t)|\, dt}{1+|f_n(t)-f(t)|} \le m(A_n) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \longrightarrow \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,.$$

Da hierbei $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt $\rho(f_n, f) \longrightarrow 0$. □

Beweis von Satz 3.9. Es sei $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{S}$ eine Cauchyfolge. Wir wählen $n_1 < n_2 < \ldots$ so, dass $\rho(f_n, f_{n_k}) < 2^{-k}$ für alle $n > n_k$ gilt, und setzen

$$g_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{|f_{n_{j+1}}(t) - f_{n_j}(t)|}{1+|f_{n_{j+1}}(t) - f_{n_j}(t)|}$$

sowie $g(t) = \lim\limits_{k\to\infty} g_k(t)$. Da

$$\int_0^1 g_k(t)\, dt = \sum_{j=1}^{k} \rho(f_{n_{j+1}}, f_{n_j}) < 1\,,$$

folgt aus Satz 3.1 $\displaystyle\int_0^1 g(t)\, dt \le 1$. Daraus schließen wir, dass für $G := \{t \in [0,1] : g(t) = \infty\}$ gilt $m(G) = 0$, so dass $g_k(t)$ für $k \longrightarrow \infty$ für fast alle $t \in [0,1]$ gegen eine endliche Zahl konvergiert, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|}{1+|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|} < \infty\,, \quad t \in [0,1]\setminus G\,. \tag{4.2}$$

Für diese t konvergiert dann aber auch die Reihe

$$f_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t) \right]\,,$$

denn für alle hinreichend großen k ist $|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}| < 1$ wegen (4.2) und somit

$$|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)| \le \frac{2|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|}{1+|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|}\,.$$

Also gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{S}$, gegen die f_{n_k} f.ü. und somit auch dem Maße nach konvergiert (beachte: Die Grenzfunktion einer f.ü. konvergenten Folge messbarer Funktionen ist messbar). Nach Satz 3.8 folgt $f_{n_k} \longrightarrow f$ in $\mathbf{S}$ und, da $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{S}$ ist, $f_n \longrightarrow f$ in $\mathbf{S}$.

Die Separabilität von $\mathbf{S}$ folgt aus Satz 3.6 und aus Satz 3.8. Dabei ist zu beachten, dass ein Polynom gleichmäßig über dem Intervall $[0,1]$ (d.h. in der $\|.\|_\infty$-Norm) durch Polynome mit komplex-rationalen Koeffizienten approximiert werden kann und dies wegen $\rho(f,g) \le \|f-g\|_\infty$ gleichzeitig eine Approximation in der Metrik des Raumes $\mathbf{S}$ ist. □

Beweis von Satz 3.10. Aus $|f(t)+g(t)|^p \le (|f(t)|+|g(t)|)^p \le 2^{p-1}\left(|f(t)|^p + |g(t)|^p\right)$ folgt, dass mit $f \in \mathbf{L}^p$ und $g \in \mathbf{L}^p$ auch $f+g \in \mathbf{L}^p$ gilt.

Sind $A := \|f\|_p > 0$ und $B := \|g\|_q > 0$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p < \infty$, so folgt mit $\alpha(t) = f(t)/A$ und $\beta(t) = g(t)/B$ aus der Ungleichung (0.1)

$$\int_0^1 |\alpha(t)\beta(t)|\,dt \le \frac{1}{p}\int_0^1 |\alpha(t)|^p\,dt + \frac{1}{q}\int_0^1 |\beta(t)|^q\,dt = 1$$

und somit die **Hölder'sche Ungleichung für Integrale**

$$\int_0^1 |f(t)g(t)|\,dt \le \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.3}$$

bzw.

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q\,, \quad f \in \mathbf{L}^p,\, g \in \mathbf{L}^q\,.$$

Sind nun $f, g \in \mathbf{L}^p$, so folgt aus (4.3), $q(p-1) = p$ und $p/q = p-1$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_0^1 |f(t)+g(t)|^p \\
&\le \int_0^1 |f(t)|\,|f(t)+g(t)|^{p-1}\,dt + \int_0^1 |g(t)|\,|f(t)+g(t)|^{p-1}\,dt \\
&\le \left[\left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\int_0^1 |f(t)+g(t)|^{q(p-1)}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)\|f+g\|_p^{p-1}\,,
\end{aligned}$$

also die Dreiecksungleichung $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

Es sei nun $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{L}^p$ eine Cauchyfolge. Mit der Metrik ρ in $\mathbf{S}$ und der Hölderschen Ungleichung (für $g \equiv 1$ angewandt) gilt

$$\rho(f_m, f_n) \le \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\,dt \le \left(\int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|f_m - f_n\|_p\,,$$

so dass $(f_n)_{n=1}^\infty$ auch eine Cauchyfolge in $\mathbf{S}$ ist. ($\mathbf{L}^p$ ist also stetig in $\mathbf{S}$ eingebettet!) Somit existiert wegen der Vollständigkeit von $\mathbf{S}$ eine Funktion $f \in \mathbf{S}$, gegen die f_n dem Maße nach konvergiert. Nach Satz 3.5 existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$, die f.ü. gegen f konvergiert. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so folgt unter Verwendung von Satz 3.2 die Existenz eines m_0, so dass

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_m(t) - f(t)|^p\,dt &= \int_0^1 \lim_{k\to\infty} |f_m(t) - f_{n_k}(t)|^p\,dt \\
&\le \liminf_{k\to\infty} \int_0^1 |f_m(t) - f_{n_k}(t)|^p\,dt \le \varepsilon^p \quad \forall\, m \ge m_0\,.
\end{aligned}$$

Also gilt $f \in \mathbf{L}^p$ und $f_m \longrightarrow f$ in $\mathbf{L}^p$.

Die Separabilität von $\mathbf{L}^p$ kann man wie folgt zeigen: Für $f \in \mathbf{L}^p$ definiert man

$$f_n(t) = \begin{cases} n & : \ |f(t)| > n\,, \\ f(t) & : \ |f(t)| \le n\,. \end{cases}$$

Es folgt $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ und $|f_n(t) - f(t)| \le 2^p |f(t)|^p$, $t \in [0,1]$, so dass nach Satz 3.3 gilt $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$. Aus Satz 3.4 schlussfolgert man nun, dass der Raum $(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_\infty)$ der stetigen Funktionen dicht in $\mathbf{L}^p$ ist. Es bleibt nur noch die Separabilität des Raumes $(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_\infty)$ und seine stetige Einbettung in $\mathbf{L}^p$ ($\|f\|_p \le \|f\|_\infty$) anzuwenden. □

- Ist $f \in \mathbf{L}^\infty$, so gilt $m(A_n) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, wobei
$$A_n = \left\{ t \in [0,1] : |f(t)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \right\} .$$
Somit gilt auch $m(B) = 0$ für $B = \{t \in [0,1] : |f(t)| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Also: Zu jedem $f \in \mathbf{L}^\infty$ existiert eine Menge $B_f \subset [0,1]$ mit den Eigenschaften
$$m(B_f) = 0 \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| : t \in [0,1] \setminus B_f\} .$$
- Umgekehrt folgt aus $B \subset [0,1]$, $m(B) = 0$ und $\sup\{|f(t)| : t \in [0,1] \setminus B\} =: M < \infty$, dass $f \in \mathbf{L}^\infty$ und $\|f\|_\infty \le M$.

Beweis von Satz 3.11. Sind $f, g \in \mathbf{L}^\infty$, so folgt $|f(t) + g(t)| \le |f(t)| + |g(t)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ für alle $t \in [0,1] \setminus (B_f \cup B_g)$ und somit $f + g \in \mathbf{L}^\infty$, $\|f + g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Sei nun $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{L}^\infty$. Dann existieren eine Konstante $M > 0$ und eine Menge $A \subset [0,1]$ mit $m(A) = 0$, so dass
$$|f_n(t)| \le \|f_n\|_\infty \le M \quad \text{und} \quad |f_n(t) - f_k(t)| \le \|f_n - f_k\|_\infty \quad \forall\, t \in [0,1] \setminus A ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$
(vgl. obige Überlegungen). Damit ist die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ mit
$$f(t) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f(t) & : \quad t \in [0,1] \setminus A , \\ \qquad 0 & : \qquad t \in A , \end{cases}$$
wohldefiniert, gehört zu $\mathcal{S}$ und ist beschränkt, also $f \in \mathbf{L}^\infty$. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, so existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$|f(t) - f_k(t)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(t) - f_k(t)| \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n - f_k\|_\infty < \varepsilon \quad \forall\, t \in [0,1] \setminus A ,\ \forall\, k \ge k_0 .$$
Dies liefert $\|f - f_k\|_\infty < \varepsilon\ \forall\, k \ge k_0$. □

Index