

Skript zur Vorlesung  
Funktionalanalysis

WS 2011/12

Peter Junghanns

**Hinweis:** Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Vorbereitungen</b>	<b>7</b>
0.1	Ungleichungen . . . . .	7
0.2	Metrische Räume . . . . .	8
0.3	Vervollständigung metrischer Räume . . . . .	12
0.4	Normierte Räume . . . . .	13
0.5	Räume mit Skalarprodukt . . . . .	14
0.6	Übungsaufgaben . . . . .	15
<b>1</b>	<b>Lineare Operatoren in normierten Räumen</b>	<b>17</b>
1.1	Stetigkeit und Beschränktheit . . . . .	17
1.2	Das Theorem von Banach-Steinhaus . . . . .	18
1.3	Übungsaufgaben . . . . .	19
1.4	Invertierbare Operatoren . . . . .	20
1.5	Das Theorem vom abgeschlossenen Graphen . . . . .	21
1.6	Faktorräume und das Open Mapping Theorem . . . . .	22
1.7	Das Theorem von Hahn-Banach . . . . .	23
1.8	Schwache und *schwache Konvergenz . . . . .	25
1.9	Übungsaufgaben . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Banachalgebren</b>	<b>27</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	27
2.2	Kommutative Banachalgebren . . . . .	28
2.3	Übungsaufgaben . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Die Fredholmsche Alternative</b>	<b>33</b>
3.1	Der adjungierte Operator . . . . .	33
3.2	Operatoren mit abgeschlossenem Bild . . . . .	34
3.3	Kompakte Operatoren . . . . .	34

3.4	Fredholmoperatoren . . . . .	35
3.5	Über das Spektrum kompakter Operatoren . . . . .	36
3.6	Übungsaufgaben . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Räume messbarer Funktionen</b>	<b>37</b>
4.1	Einiges aus der Integrationstheorie . . . . .	37
4.2	Der Raum $\mathbf{S}$ . . . . .	39
4.3	Die $\mathbf{L}^p$ -Räume . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Anhang B: Ausgewählte Beweise</b>	<b>41</b>
5.1	Zum Abschnitt 0.2 (Metrische Räume) . . . . .	41
5.2	Zum Abschnitt 1.2 (Das Theorem von Banach-Steinhaus) . . . . .	41
5.3	Zum Abschnitt 2.1 (Grundlagen Banachalgebren) . . . . .	42
5.4	Zum Abschnitt 2.2 (Kommutative Banachalgebren) . . . . .	44
5.5	Zum Abschnitt 3.3 (Kompakte Operatoren) . . . . .	45
5.6	Zum Abschnitt 3.4 (Fredholmoperatoren) . . . . .	46
5.7	Zum Abschnitt 3.5 (Das Spektrum kompakter Operatoren) . . . . .	48
5.8	Zum Kapitel 4 (Räume messbarer Funktionen) . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Hinweise und Lösungen</b>	<b>53</b>

# Literaturverzeichnis

- [1] H. W. Alt, Lineare Funktionalanalysis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [2] B. Choudhary, S. Nanda, Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New Delhi.
- [3] M. Dobrowolski, Angewandte Funktionalanalysis- Funktionalanalysis, Sobolev-Räume und elliptische Differentialgleichungen, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [4] A. Göpfert, T. Riedrich, C. Tammer, Angewandte Funktionalanalysis - Motivationen und Methoden für Mathematiker und Wirtschaftswissenschaftler, Vieweg+Teubner, Wiesbaden.
- [5] H. Heuser, Funktionalanalysis, Theorie und Anwendung, Teubner, Stuttgart.
- [6] F. Hirzebruch, W. Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis, Spektrum, Akademie Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford.
- [7] P. Junghanns, Analysis I/II - Skript zur Vorlesung 2009/2010, [http://www-user.tu-chemnitz.de/~peju/skripte/analysis/Analysis\\_V.pdf](http://www-user.tu-chemnitz.de/~peju/skripte/analysis/Analysis_V.pdf)
- [8] L. A. Ljusternik, W. I. Sobolew, Elemente der Funktionalanalysis, Akademie-Verlag, Berlin.
- [9] N. K. Nikol'skij, Functional Analysis I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [10] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- [11] M. Schechter, Principles of Functional Analysis, Academic Press, New York.
- [12] C. Swartz, Measure, Integration and Function Spaces, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.
- [13] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

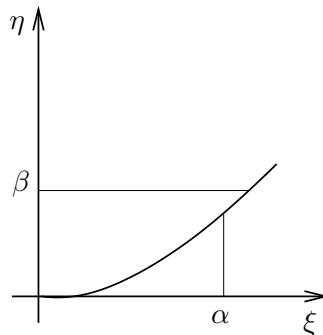


# Kapitel 0

## Vorbereitungen

### 0.1 Ungleichungen

Es seien  $p > 1$  und  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen  $\alpha > 0$  und  $\beta > 0$  ist offenbar nicht größer als die Summe der Inhalte der Flächen, die von der  $\xi$ - bzw. der  $\eta$ -Achse und dem Graphen der Funktion  $\eta = \xi^{p-1}$  begrenzt werden (siehe Abb.). Die Gleichung der Umkehrfunktion lautet  $\xi = \eta^{q-1}$ .



Es folgt

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha \xi^{p-1} d\xi + \int_0^\beta \eta^{q-1} d\eta = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \quad (0.1)$$

Sind wenigstens eine der Zahlen  $\xi_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, \dots, m$ , und eine der Zahlen  $\eta_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 1, \dots, m$ , von Null verschieden, so folgt mit

$$\alpha_j = \frac{\xi_j}{\left(\sum_{k=1}^m |\xi_k|^p\right)^{1/p}} \quad \text{und} \quad \beta_j = \frac{\eta_j}{\left(\sum_{k=1}^m |\eta_k|^q\right)^{1/q}}$$

unter Verwendung von (0.1)

$$\left| \sum_{j=1}^m \alpha_j \beta_j \right| \leq \sum_{j=1}^m |\alpha_j| |\beta_j| \leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^m \frac{|\xi_j|^p}{\left(\sum_{k=1}^m |\xi_k|^p\right)} + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^m \frac{|\eta_j|^q}{\left(\sum_{k=1}^m |\eta_k|^q\right)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Wir erhalten die **Hölder-Ungleichung**

$$\left| \sum_{j=1}^m \xi_j \eta_j \right| \leq \left( \sum_{j=1}^m |\xi_j|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{j=1}^m |\eta_j|^q \right)^{1/q}, \quad (0.2)$$

die für beliebige  $\xi_j, \eta_j \in \mathbb{C}$  und  $p > 1, q > 1$  mit  $p^{-1} + q^{-1} = 1$  gilt. Für  $p = q = 2$  ist diese als **Cauchy-Schwarz-** bzw. **Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung** bekannt. Aus (0.2) folgt auch

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |\xi_j + \eta_j|^p &\leq \sum_{j=1}^m |\xi_j| |\xi_j + \eta_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^m |\eta_j| |\xi_j + \eta_j|^{p-1} \\ &\leq \left[ \left( \sum_{j=1}^m |\xi_j|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{j=1}^m |\eta_j|^p \right)^{1/p} \right] \left( \sum_{j=1}^m |\xi_j + \eta_j|^{q(p-1)} \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

so dass sich wegen  $q(p-1) = p$  und  $1 - q^{-1} = p^{-1}$  die **Minkowski-Ungleichung**

$$\left( \sum_{j=1}^m |\xi_j + \eta_j|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{j=1}^m |\xi_j|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{j=1}^m |\eta_j|^p \right)^{1/p} \quad (0.3)$$

ergibt, die trivialerweise auch für  $p = 1$  gilt.

## 0.2 Metrische Räume

Unter einem **metrischen Raum**  $\mathbf{X}$  versteht man ein geordnetes Paar  $(\mathbf{X}, d)$  aus einer nichtleeren Menge (den Punkten des Raumes) und einer Abbildung  $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow [0, \infty)$  (der Metrik), die folgenden Axiomen genügt:

$$(M1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbf{X},$$

$$(M3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathbf{X} \text{ (Dreiecksungleichung).}$$

Eine Punktfolge  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{X}$  nennt man **konvergent** mit dem **Grenzwert**  $x^* \in \mathbf{X}$  (in Zeichen:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ ), wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) = 0$  gilt. Der Grenzwert einer konvergenten Punktfolge ist offenbar eindeutig bestimmt, und jede Teilfolge einer konvergenten Punktfolge ist ebenfalls konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

Zu gegebenen  $\varepsilon > 0$  und  $x \in \mathbf{X}$  bezeichnen

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbf{X} : d(x, y) < \varepsilon\} \quad \text{und} \quad K_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbf{X} : d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

die **offene Kugel** mit dem Mittelpunkt  $x$  sowie dem Radius  $\varepsilon$  (auch  $\varepsilon$ -**Umgebung** von  $x$  genannt) und die entsprechende **abgeschlossene Kugel**. Für eine Teilmenge  $A \subset \mathbf{X}$  des metrischen Raumes  $\mathbf{X}$  definiert man die Menge

$$\text{int}(A) := \{x \in A : \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \subset A\}$$

der **inneren Punkte** von  $A$  und die Menge

$$\bar{A} := \{x \in \mathbf{X} : \forall \varepsilon > 0 \exists y \in A \text{ mit } y \in U_\varepsilon(x)\}$$

der **Berührungspunkte** von  $A$ . Man nennt  $A \subset \mathbf{X}$

- **offen**, wenn  $\text{int}(A) = A$ ,
- **abgeschlossen**, wenn  $\overline{A} = A$

gilt. Ein Punkt  $x \in A$  heißt **isolierter Punkt** von  $A$ , wenn ein  $\varepsilon > 0$  mit der Eigenschaft  $A \cap U_\varepsilon(x) = \{x\}$  existiert. Einen Berührungspunkt von  $A$ , der kein isolierter Punkt von  $A$  ist, nennt man **Häufungspunkt** von  $A$ . Die Menge der Häufungspunkte von  $A$  bezeichnet man auch mit  $A'$ . Sind  $A$  und  $B$  Teilmengen eines metrischen Raumes  $\mathbf{X}$ , so sagt man, dass  $A$  in  $B$  dicht liegt, wenn  $\overline{A} \supset B$  gilt. Einen metrischen Raum  $\mathbf{X}$  nennt man **separabel**, wenn er eine dichte Punktfolge  $(x_n)$  enthält, d.h.  $\overline{\{x_n : n = 1, 2, \dots\}} = \mathbf{X}$  (oder:  $\forall x \in \mathbf{X}$  und  $\forall \varepsilon > 0$   $\exists N = N(x, \varepsilon) : d(x_N, x) < \varepsilon$ ).

**Satz 0.1 (vgl. [7], Satz 2.24)** Für beliebige Teilmengen  $A \subset \mathbf{X}$  eines metrischen Raumes  $\mathbf{X}$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- $A$  ist abgeschlossen.
- $\mathbf{X} \setminus A$  ist offen.
- Es gilt  $A' \subset A$ .
- Aus  $\{x_n : n = 1, 2, \dots\} \subset A$  und  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  folgt stets  $x^* \in A$ .

Wir erinnern an folgende leicht zu beweisende Aussagen (vgl. auch [7, Satz 2.24]):

- Die Vereinigung und der Durchschnitt endlich vieler offener bzw. abgeschlossener Mengen sind offen bzw. abgeschlossen.
- Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.
- Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Eine Punktfolge  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}$  nennt man **Cauchyfolge** oder **Fundamentalfolge**, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N \in \mathbb{N}$  mit  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$  für alle  $n, m > N$  existiert. Der metrische Raum  $(\mathbf{X}, d)$  heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in  $\mathbf{X}$  konvergent in  $\mathbf{X}$  ist.

**Folgerung 0.2 (vgl. [7], Folg. 3.8)** Ist  $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$  eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes  $(\mathbf{X}, d)$ , so ist  $(\mathbf{X}_0, d)$  ein vollständiger metrischer Raum.

Unter einer **offenen Überdeckung** einer Menge  $A \subset \mathbf{X}$  versteht man eine Familie  $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$  von offenen Mengen  $U_\alpha \subset \mathbf{X}$ , so dass  $A \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha$  gilt. Man nennt eine solche Überdeckung **endlich**, wenn sie nur aus endlich vielen Mengen  $U_\alpha$  besteht. Eine Teilmenge  $A \subset \mathbf{X}$  heißt **kompakt**, wenn aus jeder offenen Überdeckung von  $A$  eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann. Man nennt eine Menge  $B \subset \mathbf{X}$  ein  $\varepsilon$ -**Netz** zu  $A \subset \mathbf{X}$ , wenn für jedes  $x \in A$  ein  $y \in B$  mit  $d(x, y) < \varepsilon$  existiert. Man nennt  $A \subset \mathbf{X}$  **relativ kompakt** oder **präkompakt**, wenn  $\overline{A}$  kompakt ist.

**Satz 0.3 (vgl. [7], Satz 3.3)** Es sei  $A \subset \mathbf{X}$  eine Teilmenge des metrischen Raumes  $\mathbf{X}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a)  $A$  ist kompakt.
- (b) Aus jeder Punktfolge  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$  kann eine konvergente Teilfolge ausgewählt werden, deren Grenzwert zu  $A$  gehört.
- (c) Jede unendliche Teilmenge von  $A$  besitzt einen Häufungspunkt, der zu  $A$  gehört.

Man nennt  $A \subset \mathbf{X}$  **beschränkt**, wenn ein  $R > 0$  und ein  $x \in \mathbf{X}$  mit  $A \subset U_R(x)$  existieren.

**Folgerung 0.4** *Ist  $A$  präkompakt, so existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein endliches  $\varepsilon$ -Netz für  $A$ . Jede kompakte Menge ist abgeschlossen und beschränkt. Jeder kompakte metrische Raum ist separabel und vollständig.*

Eine Abbildung  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ ,  $x \mapsto f(x)$  zwischen zwei metrischen Räumen  $(\mathbf{X}, d_{\mathbf{X}})$  und  $(\mathbf{Y}, d_{\mathbf{Y}})$  nennt man **stetig**, wenn für jedes  $x_0 \in \mathbf{X}$  und jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass aus  $x \in U_{\delta}(x_0)$  stets  $f(x) \in U_{\varepsilon}(f(x_0))$  folgt (d.h., so dass  $f(U_{\delta}(x_0)) \subset U_{\varepsilon}(f(x_0))$  gilt). Man nennt sie **gleichmäßig stetig**, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass  $d_{\mathbf{Y}}(f(y), f(x)) < \varepsilon$  für alle  $x, y \in \mathbf{X}$  mit  $d_{\mathbf{X}}(y, x) < \delta$  gilt.

**Satz 0.5** (vgl. [7], Satz 2.44) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (a) Die Abbildung  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  ist stetig.
- (b) Aus  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{X}$  und  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  folgt  $f(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ .
- (c) Für jede offene Menge  $A \subset \mathbf{Y}$  ist  $f^{-1}(A)$  offen.
- (d) Für jede abgeschlossene Menge  $A \subset \mathbf{Y}$  ist  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen.

**Satz 0.6** (vgl. [7], Satz 3.22) *Es seien  $\mathbf{X}$  ein kompakter,  $\mathbf{Y}$  ein beliebiger metrischer Raum und  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  eine stetige Abbildung. Dann ist  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  gleichmäßig stetig. Im Fall  $\mathbf{Y} = \mathbb{R}$  existieren Punkte  $x_u, x_o \in \mathbf{X}$  mit*

$$f(x_u) \leq f(x) \leq f(x_o) \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

**Beispiel 0.7 (Raum aller Zahlenfolgen)** *Das geordnete Paar  $(\mathbf{s}, d)$  mit*

$$\mathbf{s} = \{\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} : \xi_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

und

$$d(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}$$

*ist ein vollständiger und separabler metrischer Raum. Die Konvergenz in  $\mathbf{s}$  ist äquivalent zur koordinatenweisen Konvergenz.*

**Beispiel 0.8 (weitere Beispiele metrischer Räume)**

1.  $(\ell^{\infty}, d_{\infty})$  mit  $\ell^{\infty} = \left\{ \xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} : \xi_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \dots, \sup_{n=0,1,2,\dots} |\xi_n| < \infty \right\}$  und

$$d_{\infty}(\xi, \eta) = \sup_{n=0,1,2,\dots} |\xi_n - \eta_n|$$

*(Raum der beschränkten Zahlenfolgen)*

2.  $(\mathbf{c}, d_\infty)$  mit  $\mathbf{c} = \left\{ \xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty : \xi_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \dots, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \in \mathbb{C} \right\}$

(Raum der konvergenten Zahlenfolgen)

3.  $(\mathbf{c}_0, d_\infty)$  mit  $\mathbf{c}_0 = \left\{ \xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty : \xi_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0 \right\}$

(Raum der Nullfolgen)

4.  $1 \leq p < \infty, (\ell^p, d_p)$  mit  $\ell^p = \left\{ \xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty : \xi_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \dots, \sum_{n=0}^\infty |\xi_n|^p < \infty \right\}$  und

$$d_p(\xi, \eta) = \left( \sum_{n=0}^\infty |\xi_n - \eta_n|^p \right)^{1/p}$$

(Raum der zur  $p$ -ten Potenz summierbaren Zahlenfolgen)

5.  $(\mathbf{C}[0, 1], d_\infty)$  mit  $\mathbf{C}[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$  und

$$d_\infty(f, g) = \max \{|f(t) - g(t)| : t \in [0, 1]\}$$

(Raum der auf  $[0, 1]$  stetigen komplexwertigen Funktionen)

6.  $(\mathbf{C}^{(m)}[0, 1], d_{\infty, m})$  mit  $m = 0, 1, 2, \dots,$

$$\mathbf{C}^{(m)}[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ist } m \text{ mal stetig differenzierbar}\}$$

und

$$d_{\infty, m}(f, g) = \sum_{k=0}^m d_\infty(f^{(k)}, g^{(k)})$$

(Raum der auf  $[0, 1]$   $m$  mal stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen,

Vereinbarungen:  $f^{(0)} = f, d_{\infty, 0} = d_\infty, \mathbf{C}^{(0)}[0, 1] = \mathbf{C}[0, 1]$ )

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei metrischen Räumen  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  nennt man **kontrahierend**, wenn ein  $q \in (0, 1)$  existiert, so dass

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq q d_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

gilt.

**Satz 0.9 (Fixpunktsatz von Banach, vgl. [7], Satz 4.46)** *Es seien  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine kontrahierende Abbildung mit der Kontraktionskonstanten  $q$ . Dann besitzt  $f$  in  $X$  genau einen **Fixpunkt**  $x^*$ , d.h. genau eine Lösung der Gleichung  $x = f(x)$ . Dabei gilt für jedes  $x_0 \in X$  und*

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (0.4)$$

die Beziehung  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$  mit der a-priori Abschätzung

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(x_1, x_0), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (0.5)$$

Das durch (0.4) beschriebene Verfahren zur näherungsweise Berechnung einer Lösung der Gleichung  $x = f(x)$  nennt man **Methode der sukzessiven Approximation**.

**Satz 0.10 (Durchschnittssatz von Cantor)** *Es sei  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge abgeschlossener und nichtleerer Teilmengen des vollständigen metrischen Raumes  $\mathbf{X}$ , deren Durchmesser*

$$d(A_n) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A_n\}$$

*eine Nullfolge bilden und für die  $A_{n+1} \subset A_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Dann existiert genau ein  $x^* \in \mathbf{X}$  mit  $x^* \in A_n \forall n = 1, 2, \dots$*

Eine Teilmenge  $A \subset \mathbf{X}$  des metrischen Raumes  $\mathbf{X}$  nennt man **nirgends dicht** in  $\mathbf{X}$ , wenn jede offene Kugel in  $\mathbf{X}$  eine zu  $A$  durchschnittsfremde offene Kugel enthält. Die Menge  $A$  heißt von **erster Kategorie**, wenn sie als Vereinigung höchstens abzählbar vieler nirgends dichter Mengen darstellbar ist. Man nennt sie von **zweiter Kategorie**, wenn sie nicht von erster Kategorie ist.

**Satz 0.11 (Baire'scher Satz)** *Jeder vollständige metrische Raum  $\mathbf{X}$  ist eine Menge zweiter Kategorie.*

**Folgerung 0.12** *Jeder vollständige metrische Raum ohne isolierte Punkte ist eine überabzählbare Menge.*

Ein System  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$  offener Teilmengen  $G_\alpha \subset \mathbf{X}$  heißt **Basis** des metrischen Raumes  $\mathbf{X}$ , wenn jede nichtleere offene Teilmenge von  $\mathbf{X}$  als Vereinigung von Mengen aus  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$  darstellbar ist.

**Satz 0.13** *Ein metrischer Raum ist genau dann separabel, wenn er eine höchstens abzählbare Basis besitzt.*

### 0.3 Vervollständigung metrischer Räume

Es seien  $(\mathbf{X}, d)$  ein metrischer Raum und  $\tilde{\mathbf{X}}$  die Menge aller Cauchyfolgen  $(x_n) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$  in  $\mathbf{X}$ . Auf  $\tilde{\mathbf{X}}$  definieren wir die Äquivalenzrelation

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0. \quad (0.6)$$

Mit  $\mathcal{X}$  sei die Menge der Äquivalenzklassen  $[(x_n)]_{\sim}$  mit  $(x_n) \in \tilde{\mathbf{X}}$  bezeichnet. Auf  $\mathcal{X}$  definieren wir

$$d_{\mathcal{X}}([(x_n)]_{\sim}, [(y_n)]_{\sim}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n). \quad (0.7)$$

Ferner sei  $\mathcal{X}_0 = \{[(x)]_{\sim} : x \in \mathbf{X}\}$ .

**Satz 0.14** *Durch (0.7) wird eine Metrik auf  $\mathcal{X}$  definiert. Ferner gilt:*

(a) *Die Abbildung  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$ ,  $x \mapsto [(x)_{n=0}^{\infty}]_{\sim}$  ist eine **Isometrie**, d.h., es gilt*

$$d_{\mathcal{X}}(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbf{X}.$$

(b) *Der Raum  $\mathcal{X}_0$  ist **dicht** in  $\mathcal{X}$ , d.h.  $\overline{\mathcal{X}_0} = \mathcal{X}$ .*

(c) Der metrische Raum  $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$  ist vollständig.

**Definition 0.15** Ein metrischer Raum  $(\mathbf{Y}, d_{\mathbf{Y}})$  heißt **Vervollständigung** eines metrischen Raumes  $(\mathbf{X}, d_{\mathbf{X}})$ , wenn  $(\mathbf{Y}, d_{\mathbf{Y}})$  vollständig ist und einen dichten Teilraum  $\mathbf{Y}_0$  enthält, der zu  $\mathbf{X}$  **isometrisch** ist (d.h., es existiert eine bijektive Abbildung  $f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}_0$  mit  $d_{\mathbf{Y}}(f(x_1), f(x_2)) = d_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) \forall x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ ).

**Bemerkung 0.16** Die Vervollständigung eines metrischen Raumes ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.

## 0.4 Normierte Räume

Einen linearen Raum  $\mathbf{X}$  über dem Körper  $\mathbb{K}$  der reellen oder der komplexen Zahlen (auch  $\mathbb{K}$ -Vektorraum genannt) nennt man **normierten Raum**, wenn eine Abbildung  $\mathbf{X} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $x \mapsto \|x\|$  mit folgenden Eigenschaften gegeben ist:

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \iff x = \Theta,$$

$$(N2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in \mathbf{X}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K},$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbf{X} \text{ (Dreiecksungleichung)}.$$

**Folgerung 0.17** In einem normierten Raum  $\mathbf{X}$  gilt

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbf{X}.$$

**Folgerung 0.18** Ist  $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum, so ist  $(\mathbf{X}, d)$  mit  $d(x, y) = \|x - y\|$  ein metrischer Raum.

Wenn dieser zugeordnete metrische Raum vollständig ist, so nennt man  $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$  einen **vollständigen normierten Raum** oder **Banachraum**.

**Folgerung 0.19** Die Räume  $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ,  $(\mathbf{c}, \|\cdot\|_\infty)$ ,  $(\mathbf{c}_0, \|\cdot\|_\infty)$  und  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , mit

$$\|\xi\|_\infty = \sup_{n=0,1,2,\dots} |\xi_n| \quad \text{und} \quad \|\xi\|_p = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{1/p}$$

sind Banachräume (vgl. Beispiel 0.8).

Zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  auf einem linearen Raum  $\mathbf{X}$  heißen **äquivalent**, wenn positive Konstanten  $c_1, c_2$  existieren, so dass

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbf{X}$$

gilt. Auf dem Kreuzprodukt  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$  zweier normierter Räume  $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$  und  $(\mathbf{Y}, \|\cdot\|_{\mathbf{Y}})$  kann man verschiedene äquivalente Normen definieren, z.B.

$$\|(x, y)\|_p := \left( \|x\|_{\mathbf{X}}^p + \|y\|_{\mathbf{Y}}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1, \quad \text{oder} \quad \|(x, y)\|_\infty := \max \{ \|x\|_{\mathbf{X}}, \|y\|_{\mathbf{Y}} \}.$$

Dabei ist  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$  äquivalent zu  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$ .

**Folgerung 0.20** In einem normierten Raum sind die Abbildungen  $\mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$  und  $\mathbb{K} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ ,  $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$  stetig.

Es seien  $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum und  $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$  die im Abschnitt 0.3 konstruierte Vollständigung des zugeordneten metrischen Raumes. Durch die Definitionen

$$\alpha[(x_n)]_{\sim} + \beta[(y_n)]_{\sim} = [(\alpha x_n + \beta y_n)]_{\sim}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, [(x_n)]_{\sim}, [(y_n)]_{\sim} \in \mathcal{X}, \quad (0.8)$$

und

$$\|[(x_n)]_{\sim}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|, \quad [(x_n)]_{\sim} \in \mathcal{X}, \quad (0.9)$$

wird  $\mathcal{X}$  zu einem normierten Banachraum.

Eine **Reihe**  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ , wobei  $x_n \in \mathbf{X}$ , nennt man **konvergent**, falls die Folge  $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)_{n=1}^{\infty}$  der Partialsummen konvergiert. Unter ihrer **Summe** versteht man den Grenzwert der Folge der Partialsummen,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$ . Man nennt die Reihe **absolut konvergent**, wenn die Zahlenreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  konvergiert.

**Satz 0.21** Ein normierter Raum  $\mathbf{X}$  ist genau dann Banachraum, wenn in ihm jede absolut konvergente Reihe auch konvergent ist.

## 0.5 Räume mit Skalarprodukt

Es sei  $\mathbf{H}$  ein linearer Raum (i.a. über dem Körper der komplexen Zahlen). Eine Abbildung  $\mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  heißt **Skalarprodukt** oder **inneres Produkt** auf  $\mathbf{H}$ , wenn folgende Axiome erfüllt sind:

$$(S1) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{H} \text{ und } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \Theta,$$

$$(S2) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in \mathbf{H},$$

$$(S3) \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbf{H}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Es gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad \forall x, y \in \mathbf{H}. \quad (0.10)$$

Unter Verwendung dieser Ungleichung kann man zeigen, dass durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (0.11)$$

eine Norm auf  $\mathbf{H}$  definiert wird. Ein Raum  $(\mathbf{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit Skalarprodukt heißt **unitärer Raum**, wenn  $(\mathbf{H}, \|\cdot\|)$  mit  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  ein Banachraum ist. Einen unitären Raum  $\mathbf{H}$  nennt man **Hilbertraum**, wenn für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein linear unabhängiges System in  $\mathbf{H}$  mit genau  $n$  Elementen existiert.

**Beispiel 0.22** Wir definieren auf der Menge  $\mathbf{C}[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$  der stetigen komplexwertigen Funktionen über dem Interval  $[0, 1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Dann ist  $(\mathbf{C}[0, 1], \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Raum mit Skalarprodukt, aber **kein** unitärer Raum.

## 0.6 Übungsaufgaben

1. Beweisen Sie die Sätze 0.1 und 0.5.
2. Zeigen Sie, dass die im Beispiel 0.8 aufgelisteten Räume metrische Räume sind. Untersuchen Sie diese Räume auf Vollständigkeit und Separabilität. Wie kann man die Konvergenz in diesen Räumen charakterisieren?
3. Mit  $(c_{00}, d_\infty)$  bezeichnen wir den Raum der “endlichen” Zahlenfolgen, d.h., die Zahlenfolge  $\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in c_{00}$  gehört genau dann zu  $c_{00}$ , wenn ein Index  $N = N(\xi)$  existiert, so dass  $\xi_n = 0 \forall n > N$  gilt.
  - (a) Zeigen Sie, dass  $c_{00}$  nicht vollständig ist.
  - (b) Zeigen Sie, dass  $c_{00}$  separabel ist.
  - (c) Was ist die Abschließung von  $c_{00}$  in  $\ell^\infty$ ?
4. Beweisen Sie: In einem vollständigen metrischen Raum  $\mathbf{X}$  ist eine Teilmenge  $A \subset \mathbf{X}$  genau dann präkompakt, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein endliches  $\varepsilon$ -Netz für  $A$  existiert. (Vgl. Folgerung 0.4.)
5. Bleibt die Aussage des Satzes 0.10 gültig, wenn man die Voraussetzung  $d(A_n) \rightarrow 0$  durch  $d(A_n) < \infty \forall n \geq n_0$  ersetzt?
6. Seien  $(\mathbf{X}, d)$  ein metrischer Raum,  $\emptyset \neq \mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$  und  $A_0 \subset \mathbf{X}_0$ . Zeigen Sie:  $A_0$  ist genau dann im metrischen Raum  $(\mathbf{X}_0, d)$  offen, wenn eine offene Menge  $A \subset \mathbf{X}$  existiert, so dass  $A_0 = A \cap \mathbf{X}_0$  gilt.
7. Zeigen Sie, dass jeder Teilraum eines separablen metrischen Raumes separabel ist.
8. Zeigen Sie, dass die Definitionen (0.8) und (0.9) korrekt sind und durch (0.9) tatsächlich eine Norm auf  $\mathcal{X}$  definiert wird.
9. Beweisen Sie Satz 0.21.
10. Welche der Räume aus Beispiel 0.8 sind Hilberträume?
11. Zeigen Sie, dass die Vervollständigung eines Raumes mit Skalarprodukt ein unitärer Raum ist.



# Kapitel 1

## Lineare Operatoren in normierten Räumen

### 1.1 Stetigkeit und Beschränktheit

Es seien  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  lineare Räume über dem Körper  $\mathbb{K}$  der reellen oder der komplexen Zahlen. Bekanntlich nennen wir eine Abbildung  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ ,  $x \mapsto f(x)$  **linear**, wenn für beliebige  $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$  und  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$  die Beziehung

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

gilt. Oft nennen wir eine solche lineare Abbildung auch **linearen Operator** und schreiben  $f(x)$  in der Form  $Ax$ . Die Menge aller linearen Operatoren zwischen  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  bezeichnen wir mit  $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ . Sie ist mit der Definition

$$(\alpha A + \beta B)x := \alpha(Ax) + \beta(Bx), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad A, B \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),$$

selbst wieder ein linearer Raum über  $\mathbb{K}$ .

**Satz 1.1** *Es seien  $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}})$  und  $(\mathbf{Y}, \|\cdot\|_{\mathbf{Y}})$  zwei normierte Räume über  $\mathbb{K}$  sowie  $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a)  $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  ist eine stetige Abbildung.
- (b)  $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  ist im Punkt  $\Theta$  stetig.
- (c) Es existiert eine Konstante  $M \geq 0$  mit der Eigenschaft

$$\|Ax\|_{\mathbf{Y}} \leq M \|x\|_{\mathbf{X}} \quad \forall x \in \mathbf{X}. \tag{1.1}$$

- (d)  $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  ist gleichmäßig stetig.

Wenn es nicht zu Missverständnissen kommen kann, verzichten wir im Weiteren auf die Indizierung der Normen.

Die Menge der Operatoren  $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , für die eine (und somit jede) der Aussagen (a)-(d) des Satzes 1.1 erfüllt ist, bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ . Definieren wir für  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$

$$\|A\|_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}} := \sup \{ \|Ax\| : x \in \mathbf{X}, \|x\| \leq 1 \}, \quad (1.2)$$

so wird  $(\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \|\cdot\|_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}})$  zu einem normierten Raum, dem Raum der **beschränkten linearen Operatoren**. Die Zahl  $\|A\| = \|A\|_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}}$  ist die kleinste aller Zahlen  $M$ , für die  $\|Ax\| \leq M \|x\| \forall x \in \mathbf{X}$  gilt.

**Satz 1.2** *Ist  $\mathbf{Y}$  ein Banachraum, so ist auch  $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  ein Banachraum.*

**Beispiel 1.3** *Wir betrachten den Operator  $A : (\mathbf{C}[0, 1], \|\cdot\|_j) \rightarrow (\mathbf{C}[0, 1], \|\cdot\|_k)$  mit*

$$(Af)(t) = tf(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

für

$$\|f\|_\infty = \max \{ |f(t)| : t \in [0, 1] \} \quad \text{und} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}.$$

Die Elemente von  $L(\mathbf{X}, \mathbb{K})$  nennt man **lineare Funktionale**. Der Raum  $(\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{K}})$  der linearen stetigen Funktionale heißt **dualer Raum** zu  $\mathbf{X}$  und wird mit  $\mathbf{X}^*$  bezeichnet.

**Theorem 1.4 (Riesz'sches Darstellungstheorem)** *Es seien  $(\mathbf{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein unitärer Raum und  $f \in \mathbf{H}^*$ . Dann existiert genau ein  $x_f \in \mathbf{H}$ , so dass*

$$f(x) = \langle x, x_f \rangle \quad \forall x \in \mathbf{H}.$$

Dabei gilt  $\|f\|_{\mathbf{H}^*} = \|x_f\|_{\mathbf{H}}$ .

Man kann also  $\mathbf{H}^*$  mit  $\mathbf{H}$  identifizieren.

Zwei normierte Räume  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  nennt man zueinander **isometrisch isomorph**, wenn ein linearer isometrischer Operator  $U : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  (d.h.  $\|Ux_1 - Ux_2\| = \|x_1 - x_2\| \forall x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ ) mit  $U(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$  existiert. Zueinander isometrisch isomorphe Räume werden oft miteinander identifiziert.

**Beispiel 1.5** *Es gilt  $c_0^* = \ell^1$ ,  $(\ell^1)^* = \ell^\infty$  und  $(\ell^p)^* = \ell^q$ , wobei  $1 < p < \infty$ ,  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ .*

## 1.2 Das Theorem von Banach-Steinhaus

**Lemma 1.6** *Es seien  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  normierte Räume und  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  eine Familie linearer stetiger Operatoren. Existieren ein  $x^* \in \mathbf{X}$  und ein  $\varepsilon > 0$ , so dass*

$$M(x^*, \varepsilon) := \sup \{ \|Ax\| : A \in \mathcal{F}, x \in \mathbf{X}, \|x - x^*\| \leq \varepsilon \} < \infty$$

*gilt, so ist  $\sup \{ \|A\| : A \in \mathcal{F} \} < \infty$ .*

Das folgende Theorem konstatiert ein fundamentales Resultat der Funktionalanalysis, das **Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit**.

**Theorem 1.7** *Es seien  $\mathbf{X}$  ein Banachraum und  $\mathbf{Y}$  ein normierter Raum. Ist eine Familie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  linearer stetiger Operatoren punktweise beschränkt auf  $\mathbf{X}$ , d.h.*

$$\sup \{\|Ax\| : A \in \mathcal{F}\} < \infty \quad \forall x \in \mathbf{X},$$

*so ist  $\mathcal{F}$  gleichmäßig beschränkt, d.h.  $\sup \{\|A\| : A \in \mathcal{F}\} < \infty$ .*

Für Folgen  $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  linearer beschränkter Operatoren unterscheiden wir drei Konvergenzbegriffe:

- **Normkonvergenz:**  $\exists A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})} = 0$   
(in Zeichen:  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ )
- **starke Konvergenz:**  $\exists A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x - Ax\|_{\mathbf{Y}} = 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}$   
(in Zeichen:  $A_n \rightarrow A$ )
- **schwache Konvergenz:**  $\exists A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n x) = f(Ax) \quad \forall x \in \mathbf{X}, \quad \forall f \in \mathbf{Y}^*$   
(in Zeichen:  $A_n \rightharpoonup A$ )

**Bemerkung 1.8** *Aus der Normkonvergenz folgt die starke Konvergenz, aus der starken Konvergenz die schwache.*

**Satz 1.9 (Banach-Steinhaus)** *Es seien  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  Banachräume,  $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$  eine in  $\mathbf{X}$  dichte Teilmenge und  $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Die Folge  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergiert genau dann stark, wenn  $(A_n x)_{n=1}^{\infty}$  für jedes  $x \in \mathbf{X}_0$  eine Cauchyfolge und die Zahlenfolge  $(\|A_n\|)_{n=1}^{\infty}$  beschränkt sind.*

## 1.3 Übungsaufgaben

1. Man zeige, dass für  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  die Gleichungen

$$\|A\|_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}} = \sup \{\|Ax\| : x \in \mathbf{X}, \|x\| = 1\} = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbf{X} \setminus \{\Theta\} \right\}$$

gelten (vgl. (1.2)).

2. Sind folgende Operatoren linear und stetig? Berechnen Sie gegebenenfalls deren Norm.

(a)  $V : \ell^p \rightarrow \ell^p, (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots)$

(b)  $\mathcal{J} : \mathbf{C}[0, 1] \rightarrow \mathbf{C}[0, 1], f(t) \mapsto \int_0^t f(\tau) d\tau$

(c)  $\mathcal{D}_0 : \mathbf{C}^{(1)}[0, 1] \rightarrow \mathbf{C}[0, 1], f \mapsto f'$

(d)  $\mathcal{D}_1 : (\mathbf{C}^{(1)}[0, 1], \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow \mathbf{C}[0, 1], f \mapsto f'$

(e)  $T : \mathbf{C}[0, 1] \rightarrow \mathbf{C}[0, 1], (Tf)(t) = \int_0^1 k(t, s)f(s) ds,$

wobei  $k : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion sei.

3. Wie kann man den dualen Raum  $c_{00}^*$  beschreiben? (vgl. Aufgabe 3, Abschnitt 0.6)

4. Ist  $f : c_{00} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n$  ein lineares stetiges Funktional?
5. Es seien  $\lambda_{nk}$  und  $t_{nk} \in [0, 1]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , gegebene Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

- $\sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\lambda_{nk}| : n = 1, 2, \dots \right\} < \infty$ ,
- $\sum_{k=1}^n \lambda_{nk} p(t_{nk}) = \int_0^1 p(t) dt$   
für jedes Polynom  $p(t)$ , dessen Grad kleiner  $n$  ist,  $n = 1, 2, \dots$

Man zeige, dass dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_{nk} f(t_{nk}) = \int_0^1 f(t) dt$$

für jede stetige Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  gilt.

- (Z) Unter welchen Voraussetzungen an die Zahlen  $\alpha_{jk}$ ,  $j, k = 0, 1, 2, \dots$ , ist der Operator

$$A : \ell^p \rightarrow \ell^q, \quad \xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \left( \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k \right)_{n=0}^{\infty}$$

stetig?

## 1.4 Invertierbare Operatoren

Es seien  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  normierte Räume über dem Zahlenkörper  $\mathbb{K}$  und  $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ,  $B \in L(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ . Unter dem Produkt  $BA$  der Operatoren  $A$  und  $B$  versteht man die Abbildung  $BA : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}$ ,  $x \mapsto (B \circ A)x = B(Ax)$ , d.h. die Verknüpfung der beiden Abbildungen  $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  und  $B : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$ . Offenbar ist dann auch  $BA \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ . Folgendes ist leicht einzusehen:

- Ist außerdem  $C \in L(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$ , so gilt  $C(BA) = (CB)A$ .
- Sind  $A, A_1, A_2 \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  und  $B, B_1, B_2 \in L(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$  sowie  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ , so gilt

$$B(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \alpha_1 (BA_1) + \alpha_2 (BA_2)$$

und

$$(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)A = \alpha_1 (B_1 A) + \alpha_2 (B_2 A).$$

- Sind  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  und  $B \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ , so gilt auch  $BA \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ , wobei

$$\|BA\|_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}} \leq \|B\|_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}} \|A\|_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}}.$$

- Die Abbildung  $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \times \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ ,  $(A, B) \mapsto BA$  ist stetig.

Beschreibt der Operator  $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  eine bijektive Abbildung, so bezeichnen wir mit  $A^{-1} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$  den Operator, der die entsprechende Umkehrabbildung realisiert. Es gilt dann also  $A^{-1}A = I_{\mathbf{X}}$  und  $AA^{-1} = I_{\mathbf{Y}}$ , wobei  $I_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ ,  $x \mapsto x$  die identische Abbildung in  $\mathbf{X}$  ist. In diesem Fall nennen wir den Operator  $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  **invertierbar** und  $A^{-1} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$  den zu  $A$  **inversen Operator**.

**Lemma 1.10** *Ist  $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  invertierbar, so ist  $A^{-1} \in L(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ .*

Mit  $N(A)$  bezeichnen wir den **Nullraum** des linearen Operators  $A$  (auch **Kern** von  $A$  genannt),

$$N(A) = \{x \in \mathbf{X} : Ax = \Theta_{\mathbf{Y}}\}.$$

**Lemma 1.11** *Ein Operator  $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  realisiert genau dann eine injektive Abbildung  $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ , wenn  $N(A) = \{\Theta_{\mathbf{X}}\}$  gilt.*

Gilt  $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ , so nennen wir den Operator  $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  **stetig invertierbar**. Die Menge der stetig invertierbaren Operatoren  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  bezeichnen wir mit  $GL(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ .

**Satz 1.12** *Ist  $\mathbf{X}$  ein Banachraum, so ist  $I_{\mathbf{X}} - E \in GL(\mathbf{X}, \mathbf{X})$  für alle  $E \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$  mit  $\|E\| < 1$ . Dabei gilt*

$$(I_{\mathbf{X}} - E)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} E^n \quad \text{und} \quad \|(I_{\mathbf{X}} - E)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|E\|}.$$

**Folgerung 1.13** *Sind  $\mathbf{X}$  oder  $\mathbf{Y}$  ein Banachraum, so ist  $GL(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  eine offene Teilmenge von  $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ .*

**Lemma 1.14** *Ein Operator  $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  ist genau dann stetig invertierbar, wenn  $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  eine surjektive Abbildung ist und wenn eine Konstante  $m > 0$  existiert, so dass  $\|Ax\| \geq m\|x\|$  für alle  $x \in \mathbf{X}$  gilt.*

Im nächsten Abschnitt lernen wir den **Satz von Banach** kennen, welcher besagt, dass jeder bijektive lineare und beschränkte Operator zwischen Banachräumen auch stetig invertierbar ist.

## 1.5 Das Theorem vom abgeschlossenen Graphen

**Definition 1.15** *Es seien  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  normierte Räume. Ein Operator  $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  heißt **abgeschlossen**, wenn aus  $x_n \rightarrow x$  und  $Ax_n \rightarrow y$  folgt  $Ax = y$ . Das ist gleichbedeutend damit, dass der Graph  $\{(x, Ax) : x \in \mathbf{X}\}$  des Operators  $A$  eine abgeschlossene Menge in  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$  ist.*

Ein weiteres fundamentales Prinzip der Funktionalanalysis (nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) wird im folgenden **Theorem vom abgeschlossenen Graphen** formuliert.

**Theorem 1.16** *Es seien  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  Banachräume. Ist ein Operator  $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  abgeschlossen, so ist er stetig.*

Der Satz von Banach ist nun eine leichte Folgerung.

**Satz 1.17 (Banach)** *Es seien  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  Banachräume. Realisiert der Operator  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  eine bijektive Abbildung  $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ , so ist er stetig invertierbar.*

Wir erinnern an die Definition der Äquivalenz von Normen: Man nennt zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  auf einem linearen Raum  $\mathbf{X}$  zueinander **äquivalent**, falls positive Konstanten  $c_1, c_2$  existieren, so dass

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbf{X}$$

gilt.

**Folgerung 1.18** *Es seien  $(\mathbf{X}, \|x\|_1)$  und  $(\mathbf{X}, \|x\|_2)$  Banachräume und aus der  $\|\cdot\|_1$ -Konvergenz folge die  $\|\cdot\|_2$ -Konvergenz. Dann sind die zwei Normen zueinander äquivalent.*

## 1.6 Faktorräume und das Open Mapping Theorem

Es sei  $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$  ein abgeschlossener linearer Teilraum des normierten Raumes  $\mathbf{X}$ . Dann wird auf  $\mathbf{X}$  durch “ $x \sim y \iff x - y \in \mathbf{M}$ ” eine Äquivalenzrelation definiert. Die entsprechenden Äquivalenzklassen sind von der Form

$$[x]_{\sim} = x + \mathbf{M} := \{x + z : z \in \mathbf{M}\}, \quad x \in \mathbf{X}.$$

Die Menge aller dieser Äquivalenzklassen heißt **Faktorraum** von  $\mathbf{X}$  bez.  $\mathbf{M}$  und wird mit  $\mathbf{X}/\mathbf{M}$  bezeichnet. Wir definieren

$$\|[x]_{\sim}\| = \|[x]_{\sim}\|_{\mathbf{X}/\mathbf{M}} := \inf \{\|x + z\|_{\mathbf{X}} : z \in \mathbf{M}\}, \quad x \in \mathbf{X},$$

und

$$\alpha[x]_{\sim} + \beta[y]_{\sim} := [\alpha x + \beta y]_{\sim}, \quad x, y \in \mathbf{X}, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Man nennt eine Abbildung zwischen metrischen Räumen eine **offene Abbildung**, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist.

**Satz 1.19** *Für die obige Konstruktion gelten folgende Aussagen:*

- (a)  $(\mathbf{X}/\mathbf{M}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}/\mathbf{M}})$  ist ein normierter Raum.
- (b) Ist  $\mathbf{X}$  ein Banachraum, so auch  $\mathbf{X}/\mathbf{M}$ .
- (c) Die Faktorabbildung  $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}/\mathbf{M}$ ,  $x \mapsto [x]_{\sim}$  ist stetig und offen.

**Beispiel 1.20** *Es seien  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  und  $\mathbf{M} = N(A)$ . Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : \mathbf{X}/\mathbf{M} \longrightarrow A(\mathbf{X}), \quad [x]_{\sim} \mapsto Ax$$

*linear, stetig und bijektiv.*

**Beispiel 1.21** *Wir wählen  $\mathbf{X} = \mathbf{C}[0, 1]$ ,  $t_0 \in [0, 1]$ ,  $\mathbf{M} = \{f \in \mathbf{X} : f(t_0) = 0\}$  und beschreiben  $\mathbf{X}/\mathbf{M}$ .*

**Satz 1.22 (Open Mapping Theorem)** *Es seien  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  Banachräume. Ist die Abbildung  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  surjektiv, so ist sie auch offen.*

Als Folgerung aus diesem Satz ergibt sich unter Verwendung von Satz 0.5,(c) wiederum der Satz von Banach (Satz 1.17).

## 1.7 Das Theorem von Hahn-Banach

Hier lernen wir nun das letzte der drei fundamentalen Prinzipien der Funktionalanalysis kennen, das Theorem von Hahn-Banach, welches sich mit dem Problem der Fortsetzung linearer stetiger Funktionale von linearen Teilräumen auf den gesamten normierten Raum befasst. Zur Vorbereitung auf seinen Beweis beleuchten wir einige Grundlagen der Mathematik, die im Zusammenhang mit dem Auswahlaxiom von Zermelo stehen.

Eine beliebige (nichtleere) Menge  $\mathcal{A}$  heißt **partiell geordnet** (mit der Ordnungsrelation  $\leq$ ), wenn

$$(O1) \quad a \leq a \quad \forall a \in \mathcal{A},$$

$$(O2) \quad \text{aus } a \leq b \text{ und } b \leq a \text{ stets } a = b \text{ folgt,}$$

$$(O3) \quad \text{aus } a \leq b \text{ und } b \leq c \text{ stets } a \leq c \text{ folgt.}$$

Eine Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  nennt man **linear geordnet**, wenn für ein beliebiges Paar  $(a, b) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$  wenigstens eine der Relationen  $a \leq b$  oder  $b \leq a$  gilt. Eine linear geordnete Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  heißt **maximal**, wenn für jede linear geordnete Teilmenge  $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{A}$  mit  $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$  die Gleichheit  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$  folgt.

**Axiom:** *Jede partiell geordnete Menge besitzt eine maximale linear geordnete Teilmenge.*

Ein Element  $b_0 \in \mathcal{A}$  nennt man **obere Schranke** der Teilmenge  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ , wenn  $b \leq b_0$  für alle  $b \in \mathcal{B}$  gilt. Ein Element  $a_0 \in \mathcal{A}$  heißt **maximal**, wenn aus  $a_0 \leq a$  stets  $a_0 = a$  folgt.

**Lemma 1.23 (Kuratowski-Zorn)** *Besitzt jede linear geordnete Teilmenge einer partiell geordneten Menge  $\mathcal{A}$  eine obere Schranke, so existiert in  $\mathcal{A}$  ein maximales Element.*

**Lemma 1.24 (Zermelo)** *Es sei  $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$  ein beliebiges System nichtleerer Mengen. Dann existiert eine Menge  $\mathcal{M}$  mit der Eigenschaft  $\mathcal{M} = \{m_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ , wobei  $m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$  für alle  $\alpha \in \mathcal{I}$ .*

Lemma 1.24 wird auch **Auswahlaxiom** genannt und ist zu obigem Axiom, welches auch **Maximalkettensatz** heißt, äquivalent. Wir verweisen noch auf das Theorem von Zermelo, welches mittels des Zornschen Lemmas bewiesen werden kann. Eine linear geordnete Menge  $\mathcal{N}$  nennt man **wohlgeordnet** oder **vollständig geordnet**, wenn jede nichtleere Teilmenge von  $\mathcal{N}$  ein kleinstes Element enthält.

**Theorem 1.25 (Zermelo)** *Auf jeder nichtleeren Menge  $\mathcal{N}$  kann man eine Ordnung einführen, bezüglich der  $\mathcal{N}$  wohlgeordnet ist.*

Nun zum Theorem von Hahn-Banach. Es sei  $\mathbf{X}$  ein Vektorraum. Eine Abbildung  $p : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  nennt man **sublineares Funktional**, wenn folgende zwei Eigenschaften erfüllt sind:

$$(L1) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{X},$$

$$(L2) \quad p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}, \forall \alpha \geq 0.$$

Die Abbildung  $p : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_{\mathbf{X}}$  ist ein Beispiel für ein sublineares Funktional. Wir beweisen zuerst die reelle Version des Theorems von Hahn-Banach.

**Theorem 1.26 (Hahn-Banach)** *Es seien  $\mathbf{X}$  ein reeller Vektorraum und  $p : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein sublineares Funktional sowie  $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$  ein linearer Teilraum. Ist  $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$  ein lineares Funktional mit der Eigenschaft  $f(x) \leq p(x) \forall x \in \mathbf{M}$ , so existiert ein lineares Funktional  $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , welches den Bedingungen  $F(x) = f(x), x \in \mathbf{M}$ , und  $F(x) \leq p(x), x \in \mathbf{X}$ , genügt.*

Sind nun  $\mathbf{X}$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und  $F = f + \mathbf{i}g \in L(\mathbf{X}, \mathbb{C})$  mit  $f = \operatorname{Re} F, g = \operatorname{Im} F$ , so folgt aus  $F(\mathbf{i}x) = \mathbf{i}F(x)$ , dass  $f(\mathbf{i}x) + \mathbf{i}g(\mathbf{i}x) = \mathbf{i}f(x) - g(x)$  und somit  $f(\mathbf{i}x) = -g(x)$ . Es folgt  $F(x) = f(x) - \mathbf{i}f(\mathbf{i}x)$ . Ist umgekehrt  $F$  von dieser Gestalt mit einem  $\mathbb{R}$ -linearen Funktional  $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist  $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto f(x) - \mathbf{i}f(\mathbf{i}x)$  ein  $\mathbb{C}$ -lineares Funktional auf  $\mathbf{X}$ .

**Theorem 1.27 (Hahn-Banach)** *Es seien  $\mathbf{X}$  ein normierter Raum über  $\mathbb{K}$  und  $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$  ein linearer Teilraum von  $\mathbf{X}$ . Ist  $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{K}$  ein lineares Funktional mit  $|f(x)| \leq \|x\|, x \in \mathbf{M}$ , so existiert ein lineares Funktional  $F : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $F(x) = f(x), x \in \mathbf{M}$ , und  $|F(x)| \leq \|x\|, x \in \mathbf{X}$ .*

Ist ein normierter Raum  $\mathbf{Y}$  stetig in einen normierten Raum  $\mathbf{X}$  eingebettet, so ist leicht zu sehen, dass  $\mathbf{X}^*$  stetig in  $\mathbf{Y}^*$  eingebettet ist. Die erste Folgerung 1.28 aus dem Theorem von Hahn-Banach zeigt, dass für einen linearen Teilraum  $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$  mit der durch  $\mathbf{X}$  induzierten Norm der duale Raum  $\mathbf{X}_0^*$  "nicht größer" als  $\mathbf{X}^*$  ist.

**Folgerung 1.28** *Es seien  $\mathbf{X}$  ein normierter Raum und  $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$  ein linearer Teilraum von  $\mathbf{X}$ , versehen mit der durch  $\mathbf{X}$  induzierten Norm. Ist  $f_0 \in \mathbf{X}_0^*$ , so existiert ein  $f \in \mathbf{X}^*$  mit  $f(x) = f_0(x), x \in \mathbf{X}_0$ , und  $\|f\|_{\mathbf{X}^*} = \|f_0\|_{\mathbf{X}_0^*}$ .*

**Folgerung 1.29** *Es seien  $\mathbf{X}$  ein normierter Raum,  $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$  ein linearer Teilraum von  $\mathbf{X}$  und  $x_0 \in \mathbf{X}$ , wobei  $d := \operatorname{dist}(x_0, \mathbf{X}_0) > 0$ . Dann existiert ein  $f_0 \in \mathbf{X}^*$  mit  $\|f_0\|_{\mathbf{X}^*} = 1, f_0(x) = 0 \forall x \in \mathbf{X}_0$  und  $f_0(x_0) = d$ .*

**Folgerung 1.30** *Sind  $\mathbf{X}$  ein normierter Raum und  $x_0 \in \mathbf{X} \setminus \{\Theta\}$ , so existiert ein Funktional  $f_0 \in \mathbf{X}^*$ , so dass  $\|f_0\|_{\mathbf{X}^*} = 1$  und  $f_0(x_0) = \|x_0\|_{\mathbf{X}}$  gilt. Insbesondere trennen die Funktionale aus  $\mathbf{X}^*$  die Punkte von  $\mathbf{X}$ .*

Folgerung 1.30 nennt man auch den **Satz über die ausreichende Anzahl von Funktionalen**.

**Folgerung 1.31** *Ist  $\mathbf{X}$  ein normierter Raum, so gilt für jedes  $x \in \mathbf{X}$*

$$\|x\|_{\mathbf{X}} = \sup \{|f(x)| : f \in \mathbf{X}^*, \|f\|_{\mathbf{X}^*} \leq 1\}.$$

Wir zeigen nun, dass man die Aussage des Satzes 1.2 umkehren kann.

**Satz 1.32** *Ist  $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  ein Banachraum, so ist auch  $\mathbf{Y}$  ein Banachraum.*

Jedes  $x \in \mathbf{X}$  erzeugt über die Formel  $j_x(f) = f(x)$  ein lineares stetiges Funktional  $j_x : \mathbf{X}^* \rightarrow \mathbb{K}$ . Folgerung 1.31 liefert sogar

$$\|j_x\| = \sup \{|f(x)| : f \in \mathbf{X}^*, \|f\|_{\mathbf{X}^*} \leq 1\} = \|x\|_{\mathbf{X}}. \quad (1.3)$$

$J_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \rightarrow (\mathbf{X}^*)^* =: \mathbf{X}^{**}, x \mapsto j_x$  ist also eine lineare Isometrie. Man nennt den normierten Raum  $\mathbf{X}$  **reflexiv**, wenn  $J_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{**}$  gilt.  $\mathbf{X}^{**}$  nennt man den **bidualen Raum** zu  $\mathbf{X}$ . Aus Satz 1.2 folgt, dass ein reflexiver normierter Raum mit Notwendigkeit ein Banachraum ist.

**Satz 1.33** *Jeder abgeschlossene lineare Teilraum eines reflexiven normierten Raumes ist ebenfalls reflexiv.*

Für Teilmengen  $Y \subset \mathbf{X}$  und  $Y_* \subset \mathbf{X}^*$  definieren wir

$$Y^\perp = \{f \in \mathbf{X}^* : f(y) = 0 \quad \forall y \in Y\} \quad \text{und} \quad {}^\perp Y_* = \{x \in \mathbf{X} : f(x) = 0 \quad \forall f \in Y_*\}.$$

Man nennt nun einen abgeschlossenen linearen Teilraum  $\mathbf{Y}_* \subset \mathbf{X}^*$  **gesättigt**, wenn für jedes  $f \in \mathbf{X}^* \setminus \mathbf{Y}_*$  ein  $x \in {}^\perp \mathbf{Y}_*$  mit der Eigenschaft  $f(x) \neq 0$  existiert. Aus Folgerung 1.29 ergibt sich, dass jeder abgeschlossene Teilraum  $\mathbf{Y}_* \subset \mathbf{X}^*$  im Falle eines reflexiven normierten Raumes  $\mathbf{X}$  gesättigt ist.

**Lemma 1.34** *Ein Teilraum  $\mathbf{Y}_* \subset \mathbf{X}^*$  ist genau dann gesättigt, wenn eine Teilmenge  $Y \subset \mathbf{X}$  existiert, so dass  $\mathbf{Y}_* = Y^\perp$  gilt.*

**Folgerung 1.35** *Ein Teilraum  $\mathbf{Y}_* \subset \mathbf{X}^*$  ist genau dann gesättigt, wenn  $\mathbf{Y}_* = ({}^\perp \mathbf{Y}_*)^\perp$  gilt.*

Eine Teilmenge  $Y_* \subset \mathbf{X}^*$  nennen wir **\*schwach abgeschlossen**, wenn aus  $f \in \mathbf{X}^*$  und aus der Tatsache, dass für jedes  $x \in \mathbf{X}$  eine Folge  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset Y_*$  mit der Eigenschaft  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  existiert, folgt, dass  $f \in Y_*$  gilt.

**Satz 1.36** *Ein linearer Teilraum  $\mathbf{Y}_* \subset \mathbf{X}^*$  ist genau dann gesättigt, wenn er \*schwach abgeschlossen ist.*

**Satz 1.37** *Ein Banachraum  $\mathbf{X}$  ist genau dann reflexiv, wenn jeder abgeschlossene lineare Teilraum von  $\mathbf{X}^*$  gesättigt ist.*

Abschließend beleuchten wir noch die Eigenschaft der Separabilität von  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{X}^*$ .

**Satz 1.38** *Ist  $\mathbf{X}^*$  separabel, so gilt dies auch für  $\mathbf{X}$ .*

**Folgerung 1.39** *Ist  $\mathbf{X}$  reflexiv und separabel, so hat auch  $\mathbf{X}^*$  diese Eigenschaften.*

## 1.8 Schwache und \*schwache Konvergenz

In diesem Abschnitt sei  $\mathbf{X}$  stets ein Banachraum. Eine Folge  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}^*$  heißt **\*schwach konvergent** gegen  $f \in \mathbf{X}^*$ , wenn  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für alle  $x \in \mathbf{X}$  gilt. Satz 1.9 liefert

**Folgerung 1.40** *Eine Folge  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}^*$  konvergiert genau dann \*schwach gegen  $f \in \mathbf{X}^*$ , wenn  $(\|f_n\|)_{n=1}^\infty$  beschränkt ist und  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für alle  $x$  aus einer in  $\mathbf{X}$  dichten Teilmenge gilt.*

**Satz 1.41** *Ist  $\mathbf{X}$  separabel, so besitzt jede beschränkte Folge in  $\mathbf{X}^*$  eine \*schwach konvergente Teilfolge.*

Man nennt eine Folge  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}$  **schwach konvergent** gegen  $x \in \mathbf{X}$ , wenn die Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$  für alle  $f \in \mathbf{X}^*$  gilt (in Zeichen:  $x_n \rightharpoonup x$ ). Unter Beachtung von  $f(x_n) = j_{x_n}(f)$  und  $f(x) = j_x(f)$  sowie Satz 1.9 ergibt sich

**Folgerung 1.42** Eine Folge  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergiert genau dann schwach gegen  $x \in \mathbf{X}$ , wenn  $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$  beschränkt ist und  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  für alle  $f$  aus einer in  $\mathbf{X}^*$  dichten Teilmenge gilt.

**Satz 1.43** In einem reflexiven normierten Raum hat jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.

## 1.9 Übungsaufgaben

- Man zeige, dass der Operator  $\mathcal{D}_1 : (\mathbf{C}^{(1)}[0, 1], \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow \mathbf{C}[0, 1], f \mapsto f'$  abgeschlossen ist.
- Es seien  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  Banachräume und  $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ . Ferner sei  $\mathbf{Y}_0^* \subset \mathbf{Y}^*$  eine Menge von Funktionalen, die die Punkte von  $\mathbf{Y}$  separiert, d.h., für zwei beliebige Punkte  $y_1, y_2 \in \mathbf{Y}$  mit  $y_1 \neq y_2$  existiert ein Funktional  $f \in \mathbf{Y}_0^*$ , so dass  $f(y_1) \neq f(y_2)$ . Man zeige: Ist die Abbildung  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto f(Ax)$  für jedes  $f \in \mathbf{Y}_0^*$  stetig, so ist auch  $A : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  stetig.
- Auf dem Raum  $\mathbf{C}[0, 1]$  der stetigen Funktionen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  sei eine Norm  $\|\cdot\|_0$  gegeben, so dass  $(\mathbf{C}[0, 1], \|\cdot\|_0)$  ein Banachraum ist und dass aus  $\|f_n - f\|_0 \rightarrow 0, f_n, f \in \mathbf{C}[0, 1]$ , folgt  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Man zeige, dass  $\|\cdot\|_0$  zu  $\|\cdot\|_{\infty}$  äquivalent ist.
- Es seien  $\mathbf{X}$  ein Banachraum und  $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$  ein in  $\mathbf{X}$  stetig eingebetteter Banachraum, d.h. der Einbettungsoperator  $\mathcal{E} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}, y \mapsto y$  ist stetig. Ferner seien  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$  und  $Ay \in \mathbf{Y} \forall y \in \mathbf{Y}$ . Man zeige, dass dann  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$  gilt.
- Es sei  $\mathbf{X}$  ein linearer Raum über  $\mathbb{K}$ .
  - Man zeige, dass für jedes  $f \in L(\mathbf{X}, \mathbb{K})$  ein  $x_0 \in \mathbf{X}$  existiert, so dass jedes  $x \in \mathbf{X}$  in der Form  $x = \alpha x_0 + x_1$  mit  $x_1 \in N(f)$  dargestellt werden kann. Ist diese Darstellung bei gewählten  $f$  und  $x_0$  eindeutig?
  - Man zeige: Sind  $f, g \in L(\mathbf{X}, \mathbb{K})$  und  $N(f) \subset N(g)$ , so existiert ein  $\gamma \in \mathbb{K}$  mit  $g(x) = \gamma f(x)$  für alle  $x \in \mathbf{X}$ .
- Es seien  $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum über  $\mathbb{K}, (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{X}$  und  $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ . Man zeige:

$$\exists f \in \mathbf{X}^* : f(x_n) = \alpha_n \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\iff \exists M > 0 : \left| \sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=1}^n \beta_k x_k \right\| \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \beta_k \in \mathbb{K}$$

- Es seien  $\mathbf{X}$  ein linearer Raum über  $\mathbb{R}, p : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein sublineares Funktional und  $x_0 \in \mathbf{X}$ . Zeigen Sie, dass dann ein  $f \in L(\mathbf{X}, \mathbb{R})$  existiert, so dass

$$f(x_0) = p(x_0) \quad \text{und} \quad -p(-x) \leq f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}$$

gilt.

- Man zeige, dass jeder endlichdimensionale Teilraum von  $\mathbf{X}^*$  gesättigt ist.
- Man zeige, dass jeder endlichdimensionale normierte Raum reflexiv ist.

# Kapitel 2

## Banachalgebren

### 2.1 Grundlagen

**Definition 2.1** Ein Banachraum  $\mathcal{A}$  über  $\mathbb{C}$  wird **Banachalgebra** genannt, wenn  $\mathcal{A}$  nicht nur aus dem Nullelement besteht, eine Abbildung  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $(a, b) \mapsto ab$  erklärt ist und ein Element  $e \in \mathcal{A}$  existiert, so dass folgende Axiome erfüllt sind:  $\forall a, b, c \in \mathcal{A}$  und  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  gilt

$$(B1) \quad (\alpha a + \beta b)c = \alpha(ac) + \beta(bc), \quad c(\alpha a + \beta b) = \alpha(ca) + \beta(cb),$$

$$(B2) \quad a(bc) = (ab)c,$$

$$(B3) \quad ea = ae = a,$$

$$(B4) \quad \|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

Man spricht von einer **kommutativen Banachalgebra**  $\mathcal{A}$ , wenn  $ab = ba$  für alle  $a, b \in \mathcal{A}$  gilt.

Das Element  $e$  heißt **Einselement** und ist eindeutig bestimmt. Ein Element  $a \in \mathcal{A}$  nennt man **regulär**, wenn ein Element  $b$  existiert, so dass  $ab = ba = e$  gilt. Das Element  $b$  ist dann eindeutig bestimmt, wird mit  $a^{-1}$  bezeichnet und **Inverses** von  $a$  genannt. Die Menge der regulären Elemente von  $\mathcal{A}$  bezeichnen wir mit  $G\mathcal{A}$ . Unter der **Resolventenmenge**  $\rho(a)$  eines Elementes  $a \in \mathcal{A}$  versteht man die Menge der Skalare  $\lambda \in \mathbb{C}$ , für die  $a - \lambda e$  regulär ist. Das **Spektrum**  $\sigma(a)$  ist definiert als  $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ .

**Beispiel 2.2** Ist  $\mathbf{X}$  ein Banachraum über  $\mathbb{C}$ , so ist  $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$  eine Banachalgebra.

**Beispiel 2.3** Ist  $\mathbf{E}$  ein kompakter metrischer Raum, so ist der Raum  $(\mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$  der komplexwertigen stetigen Funktionen auf  $\mathbf{E}$  mit  $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in \mathbf{E}\}$  eine kommutative Banachalgebra.

**Satz 2.4** Es seien  $\mathcal{A}$  eine Banachalgebra und  $a \in \mathcal{A}$ .

(a) Ist  $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| < \infty$ , so ist  $e - a \in G\mathcal{A}$  und es gilt

$$(e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n. \quad (2.1)$$

(b) Ist  $\|a\| < 1$ , so ist  $e - a \in G\mathcal{A}$  und es gilt (2.1).

(c) Der Grenzwert  $r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$  existiert und ist endlich. Dabei gilt

$$r(a) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} \quad (\text{Spektralradius von } a).$$

(d) Für  $|\zeta| > r(a)$  ist  $\zeta e - a$  regulär, und es gilt

$$(\zeta e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} a^n.$$

(e) Die Resolventenmenge  $\rho(a)$  ist eine offene Menge in  $\mathbb{C}$ .

**Satz 2.5** Ist  $p(\zeta)$  ein Polynom in  $\zeta$ , so gilt für jedes  $a \in \mathcal{A}$

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

**Satz 2.6** Für jedes  $a \in \mathcal{A}$  ist  $\sigma(a)$  nicht leer.

## 2.2 Kommutative Banachalgebren

In diesem Abschnitt sei  $\mathcal{A}$  eine kommutative Banachalgebra.

Ein lineares Funktional  $m \in L(\mathcal{A}, \mathbb{C})$  nennt man **multiplikativ**, wenn  $m \neq \Theta$  und

$$m(ab) = m(a)m(b) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$$

gilt. Die Menge der linearen multiplikativen Funktionale auf  $\mathcal{A}$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{M}_{\mathcal{A}}$ .

**Lemma 2.7** Für jedes  $a \in \mathcal{A}$  gilt  $\{m(a) : m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}\} \subset \sigma(a)$ .

Ein linearer Teilraum  $\mathcal{N}$  von  $\mathcal{A}$  heißt **Ideal**, wenn aus  $a \in \mathcal{N}$  und  $b \in \mathcal{A}$  folgt  $ab \in \mathcal{N}$ . Man nennt das Ideal  $\mathcal{N}$  **maximal**, wenn jedes  $a \in \mathcal{A}$  auf eindeutige Weise in der Form  $a = a_0 + \lambda e$ ,  $a_0 \in \mathcal{N}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , darstellbar ist.

**Beispiel 2.8** Ist  $E_0 \subset \mathbf{E}$  eine Teilmenge des kompakten metrischen Raumes  $\mathbf{E}$ , so ist

$$\mathcal{N}(E_0) = \{f \in \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C}) : f(x) = 0, x \in E_0\}$$

ein Ideal in  $(\mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty})$ . Dieses Ideal ist genau dann maximal, wenn  $E_0$  aus genau einem Punkt  $x_0 \in \mathbf{E}$  besteht.

**Beispiel 2.9** Ist  $m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$ , so ist  $\mathcal{N}(m) = \{a \in \mathcal{A} : m(a) = 0\}$  ein maximales Ideal.

**Satz 2.10** Jedes Ideal  $\mathcal{N} \neq \mathcal{A}$  ist in einem maximalen Ideal enthalten.

Beispiel 2.9 kann man in gewisser Weise umkehren, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 2.11** *Ist  $\mathcal{N} \neq \mathcal{A}$  ein Ideal, so existiert ein  $m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$  mit der Eigenschaft  $\mathcal{N} \subset N(m)$ .*

**Satz 2.12** *Für jedes  $a \in \mathcal{A}$  gilt  $\sigma(a) = \{m(a) : m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}\}$ .*

Wir listen noch einige Eigenschaften maximaler Ideale bzw. linearer multiplikativer Funktionale auf.

**Satz 2.13** *In einer kommutativen Banachalgebra  $\mathcal{A}$  gilt:*

- (a) *Jedes maximale Ideal ist abgeschlossen.*
- (b) *Aus  $m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$  folgt  $m \in \mathcal{A}^*$  und  $\|m\| \leq 1$ .*
- (c) *Das Ideal  $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{N} \neq \mathcal{A}$ , ist genau dann maximal, wenn für jedes Ideal  $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$  mit  $\mathcal{N} \neq \mathcal{M}$  und  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  folgt  $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ .*

**Ergänzende Bemerkungen:**

- Ein geordnetes Paar  $(\mathbf{X}, \mathcal{F})$  aus einer nichtleeren Menge  $\mathbf{X}$  und einem System  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$  von Teilmengen von  $\mathbf{X}$  nennt man **topologischen Raum**, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(T1)  $\emptyset, \mathbf{X} \in \mathcal{F}$ .

(T2) Eine beliebige Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{F}$  gehört zu  $\mathcal{F}$ .

(T3) Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus  $\mathcal{F}$  gehört zu  $\mathcal{F}$ .

Die Elemente von  $\mathcal{F}$  nennt man **offene Mengen** in  $\mathbf{X}$ . Der topologische Raum  $\mathbf{X}$  heißt **kompakt**, wenn aus jeder offenen Überdeckung von  $\mathbf{X}$  eine endliche Teilüberdeckung von  $\mathbf{X}$  ausgewählt werden kann. Man nennt  $\mathbf{X}$  einen **Hausdorff-Raum**, wenn die Topologie  $\mathcal{F}$  die Punkte von  $\mathbf{X}$  trennt, d.h., wenn für beliebige  $x, y \in \mathbf{X}$  mit  $x \neq y$  zwei Mengen  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  existieren, so dass  $x \in F_1, y \in F_2$  und  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  gilt.

- Eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen nennt man **stetig**, wenn das vollständige Urbild jeder offenen Menge bez. dieser Abbildung offen ist. Unter einer **Basis** des Systems der offenen Mengen versteht man ein Teilsystem  $\mathcal{F}_0$  von  $\mathcal{F}$  mit der Eigenschaft, dass jede Menge  $F \in \mathcal{F}$  als Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{F}_0$  geschrieben werden kann (vgl. auch das Ende von Abschnitt 0.2 der Vorlesung). Es gibt noch den Begriff der **Subbasis**, der ein System  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  meint, für welches das System aller Durchschnitte endlich vieler Mengen aus  $\mathcal{G}$  eine Basis von  $\mathcal{F}$  ergibt.
- In der Aufgabe **(Z)**,(c), Abschnitt 2.3 wird die Abbildung  $a \mapsto a(\mathcal{M})$  bei festem  $\mathcal{M} \in \mathbf{M}(\mathcal{A})$  betrachtet. Hält man dagegen  $a \in \mathcal{A}$  fest, so ergibt sich eine Abbildung  $\hat{a} : \mathbf{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}, \mathcal{M} \mapsto a(\mathcal{M})$ . Unter dem **Raum der maximalen Ideale** versteht man die Menge  $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ , versehen mit der schwächsten Topologie, in der alle Funktionen  $\hat{a} : \mathbf{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}, a \in \mathcal{A}$ , stetig sind. Eine geeignete Subbasis

$$\{U(\hat{a}, \mathcal{M}_0, \varepsilon) : a \in \mathcal{A}, \mathcal{M}_0 \in \mathbf{M}(\mathcal{A}), \varepsilon > 0\}$$

für diese Topologie bilden die Mengen

$$U(\hat{a}, \mathcal{M}_0, \varepsilon) = \{\mathcal{M} \in \mathbf{M}(\mathcal{A}) : |\hat{a}(\mathcal{M}) - \hat{a}(\mathcal{M}_0)| < \varepsilon\}.$$

- Es gilt: Der Raum der maximalen Ideale  $\mathbf{M}(\mathcal{A})$  ist ein kompakter Hausdorff-Raum.
- Der Raum der maximalen Ideale  $\mathbf{M}((\ell^1(\mathbb{Z}), *))$  (vgl. Aufgabe 2.3, 2) ist gleich (bis auf Homöomorphie) dem Einheitskreis der komplexen Ebene.

## 2.3 Übungsaufgaben

1. Es sei  $\mathcal{B}$  ein Banachraum über  $\mathbb{C}$ , der die Axiome (B1), (B2) und (B4) erfüllt und kein Einselement besitzt. Man zeige, dass dann die Menge

$$\mathcal{A} = \{(\beta, b) : \beta \in \mathbb{C}, b \in \mathcal{B}\}$$

mit den Verknüpfungen

$$(\beta, b) + (\gamma, c) = (\beta + \gamma, b + c), \quad \alpha(\beta, b) = (\alpha\beta, \alpha b), \quad (\beta, b)(\gamma, c) = (\beta\gamma, bc + \beta c + \gamma b)$$

und der Norm

$$\|(\beta, b)\|_{\mathcal{A}} = |\beta| + \|b\|_{\mathcal{B}}$$

eine Banachalgebra ist.

2. Ist

$$\ell^1(\mathbb{Z}) = \left\{ \xi = (\xi_n)_{n=-\infty}^{\infty} : \xi_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n| < \infty \right\}$$

mit der Norm  $\|\xi\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n|$  und der Multiplikation

$$\xi * \eta = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{n-k} \eta_k \right)_{n=-\infty}^{\infty}$$

eine Banachalgebra?

3. Es sei  $(\Gamma, \cdot)$  mit  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  eine endliche Gruppe. Mit  $L_1(\Gamma)$  bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  und versehen diese mit der linearen Struktur

$$(\alpha f + \beta g)(\gamma) = \alpha f(\gamma) + \beta g(\gamma), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \gamma \in \Gamma,$$

der Multiplikation

$$(f * g)(\gamma_k) = \sum_{j=1}^n f(\gamma_k \gamma_j^{-1}) g(\gamma_j)$$

und der Norm  $\|f\| = \sum_{k=1}^n |f(\gamma_k)|$ . Ist  $L_1(\Gamma)$  eine Banachalgebra?

4. Man zeige, dass die Abschließung jedes Ideals wieder ein Ideal ist.

(Z) Mit  $\mathcal{R}$  bezeichnen wir den Durchschnitt aller maximalen Ideale der kommutativen Banachalgebra  $\mathcal{A}$ , das sogenannte **Radikal** von  $\mathcal{A}$ . Man nennt  $\mathcal{A}$  **halbeinfach**, wenn  $\mathcal{R} = \{\Theta\}$  ist. Man zeige:

- Ist  $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$  ein abgeschlossenes Ideal, so ist die Faktoralgebra  $\mathcal{A}/\mathcal{J}$  eine kommutative Banachalgebra ( $[a][b] := [ab]$ ).
- $\mathcal{A}/\mathcal{R}$  ist halbeinfach.
- $\mathcal{A}/\mathcal{M}$  ist isomorph zu  $\mathbb{C}$ , falls  $\mathcal{M}$  ein maximales Ideal ist. Bezeichnet  $j_{\mathcal{M}} : \mathcal{A}/\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  den entsprechenden Isomorphismus, so hat die Abbildung  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \mapsto [a]_{\mathcal{M}} = a + \mathcal{M} \mapsto j_{\mathcal{M}}([a]_{\mathcal{M}}) =: a(\mathcal{M})$  folgende Eigenschaften:

- i.  $(a + b)(\mathcal{M}) = a(\mathcal{M}) + b(\mathcal{M})$ ,
  - ii.  $(\alpha a)(\mathcal{M}) = \alpha a(\mathcal{M})$ ,
  - iii.  $(ab)(\mathcal{M}) = a(\mathcal{M})b(\mathcal{M})$ ,
  - iv.  $a(\mathcal{M}) = 0 \iff a \in \mathcal{M}$ ,
  - v.  $e(\mathcal{M}) = 1$ ,
  - vi.  $|a(\mathcal{M})| \leq \|a\|$ .
- (d) Mit  $\mathbf{M}(\mathcal{A})$  bezeichnen wir die Menge der maximalen Ideale in  $\mathcal{A}$ . Für  $\mathcal{M} \in \mathbf{M}(\mathcal{A})$  definieren wir  $f_{\mathcal{M}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \mapsto a(\mathcal{M})$ . Man zeige, dass die Abbildung  $\mathbf{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$ ,  $\mathcal{M} \mapsto f_{\mathcal{M}}$  eine bijektive Abbildung ist.



## Kapitel 3

# Die Fredholmsche Alternative

In diesem Kapitel beschreiben wir eine Klasse von linearen beschränkten Operatoren  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$  in einem Banachraum  $\mathbf{X}$  mit der Eigenschaft, dass die Gleichung

$$Ax = y \tag{3.1}$$

genau dann für jedes  $y \in \mathbf{X}$  lösbar ist, wenn die homogene Gleichung

$$Ax = \Theta \tag{3.2}$$

nur die triviale Lösung besitzt.

### 3.1 Der adjungierte Operator

Für  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  definiert man den **adjungierten Operator**  $A^* : \mathbf{Y}^* \rightarrow \mathbf{X}^*$  durch

$$(A^*g)(x) = g(Ax) \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

**Lemma 3.1** *Es gilt  $A^* \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^*)$  und  $\|A^*\|_{\mathbf{Y}^* \rightarrow \mathbf{X}^*} = \|A\|_{\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}}$ .*

Es gilt ferner

- (a)  $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ,  $A, B \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ,
- (b)  $(AB)^* = B^*A^*$ ,  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ .

Sind  $(\mathbf{H}_j, \langle \cdot, \cdot \rangle_j)$ ,  $j = 1, 2$ , zwei unitäre Räume und  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ , so kann wegen Theorem 1.4 der adjungierte Operator  $A^* \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_2^*, \mathbf{H}_1^*)$  identifiziert werden mit dem Operator  $A^+ \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_1)$ , für den gilt

$$\langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, A^+y \rangle_1 \quad \forall x \in \mathbf{H}_1, \forall y \in \mathbf{H}_2.$$

Genauer: Sind  $J_k : \mathbf{H}_k^* \rightarrow \mathbf{H}_k$ ,  $f \mapsto x_f$  mit  $f(x) = \langle x, x_f \rangle_k \forall x \in \mathbf{H}_k$  (vgl. Theorem 1.4) und  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_1)$  mit  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle \forall x, y \in \mathbf{H}$ , so folgt ( $\forall f \in \mathbf{H}_2^*$ ,  $\forall x \in \mathbf{H}_1$ ),

$$\langle x, J_1 A^* f \rangle_1 = (A^* f)(x) = f(Ax) = \langle Ax, J_2 f \rangle_2 = \langle x, B J_2 f \rangle_1,$$

also

$$J_1 A^* = B J_2 \quad \text{bzw.} \quad A^* = J_1^{-1} B J_2.$$

Die Menge  $A(\mathbf{X}) = \{Ax : x \in \mathbf{X}\}$  nennen wir **Bild des Operators**  $A$  und bezeichnen sie mit  $R(A)$ . Die Mengen  $N(A)$  und  $R(A)$  sind lineare Teilräume von  $\mathbf{X}$  bzw.  $\mathbf{Y}$ . Das Element  $x$  ist genau dann Lösung von (3.2), wenn  $x \in N(A)$  gilt, und die Gleichung (3.1) ist genau dann lösbar, wenn  $y \in R(A)$  gilt.

Aus  $y \in R(A)$  folgt  $g(y) = 0$  für alle  $g \in N(A^*)$ , d.h.

$$R(A) \subset {}^\perp N(A^*).$$

Frage. Wann gilt in dieser Beziehung die Gleichheit?

**Satz 3.2** Für  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  gilt stets  $\overline{R(A)} = {}^\perp N(A^*)$ .

**Folgerung 3.3** Es gilt  $R(A) = {}^\perp N(A^*)$  genau dann, wenn  $R(A)$  abgeschlossen (in  $\mathbf{Y}$ ) ist.

Frage: Wann ist  $R(A)$  abgeschlossen?

## 3.2 Operatoren mit abgeschlossenem Bild

**Lemma 3.4** Es seien  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  Banachräume sowie  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  mit  $N(A) = \{\Theta\}$ . Dann ist  $R(A)$  genau dann abgeschlossen, wenn eine Konstante  $c > 0$  existiert, so dass

$$\|x\|_{\mathbf{X}} \leq c \|Ax\|_{\mathbf{Y}} \quad \forall x \in \mathbf{X}. \quad (3.3)$$

**Satz 3.5** Es seien  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  Banachräume sowie  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ . Dann ist  $R(A)$  genau dann abgeschlossen, wenn eine Konstante  $c > 0$  existiert, so dass

$$\text{dist}(x, N(A)) \leq c \|Ax\|_{\mathbf{Y}} \quad \forall x \in \mathbf{X}. \quad (3.4)$$

**Beispiel 3.6** Für  $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{C}[0, 1]$  und den Operator  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$  mit  $(Af)(t) = tf(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  erhalten wir unter Verwendung von Lemma 3.4, dass  $R(A)$  nicht abgeschlossen ist.

## 3.3 Kompakte Operatoren

**Definition 3.7** Einen Operator  $T \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  nennt man **kompakt** oder **vollstetig**, wenn für jede beschränkte Menge  $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$  das Bild  $T(\mathbf{X}_0) \subset \mathbf{Y}$  relativ kompakt ist.

Die Menge der kompakten Operatoren  $T \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , im Fall  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$  mit  $\mathcal{K}(\mathbf{X})$ .

**Lemma 3.8**  $T \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  ist genau dann kompakt, wenn  $T(U_1(\Theta))$  relativ kompakt ist. Ferner gilt  $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ .

Eine Familie  $\mathcal{F}$  von Funktionen  $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem metrischen Raum  $(\mathbf{E}, d)$  nennt man **gleichgradig stetig**, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}, \forall x, y \in \mathbf{E} \quad \text{mit} \quad d(x, y) < \delta$$

gilt.  $\mathcal{F}$  heißt **gleichmäßig beschränkt**, wenn eine Konstante  $M > 0$  existiert, so dass

$$|f(x)| \leq M \quad \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbf{E}.$$

**Theorem 3.9 (Arzela-Ascoli)** *Es seien  $\mathbf{E}$  ein kompakter metrischer Raum und  $\mathcal{F} \subset \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$  eine Teilmenge der komplexwertigen und stetigen Funktionen auf  $\mathbf{E}$ . Dann ist  $\mathcal{F}$  genau dann relativ kompakt in  $(\mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ , wenn die Funktionen aus  $\mathcal{F}$  gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sind.*

**Beispiel 3.10** *Es seien  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion und  $T : \mathbf{C}[0, 1] \rightarrow \mathbf{C}[0, 1]$  mit*

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(t, s)f(s) ds, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.5)$$

*Dann gilt  $T \in \mathcal{K}(\mathbf{C}[0, 1])$ .*

Das folgende Lemma bezieht sich auf Folgerung 0.4 (siehe auch Abschnitt 0.6, Aufgabe 4).

**Lemma 3.11** *Eine Teilmenge  $\mathbf{X}_0$  eines vollständigen metrischen Raumes  $\mathbf{X}$  ist genau dann relativ kompakt, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein endliches  $\varepsilon$ -Netz für  $\mathbf{X}_0$  existiert.*

**Satz 3.12** *Aus  $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  folgt  $T^* \in \mathcal{K}(\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^*)$ .*

## 3.4 Fredholmoperatoren

Einen Operator  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  nennt man **Fredholmoperator**, wenn er ein abgeschlossenes Bild hat und sowohl  $N(A)$  als auch  $N(A^*)$  endlichdimensional sind.

**Lemma 3.13** *Ist  $\mathbf{X}_0 \neq \mathbf{X}$  ein abgeschlossener Teilraum des normierten Raumes  $\mathbf{X}$ , so existiert für jedes  $\theta \in (0, 1)$  ein  $x_\theta \in \mathbf{X}$  mit  $\|x_\theta\| = 1$  und  $\text{dist}(x_\theta, \mathbf{X}_0) \geq \theta$ .*

**Lemma 3.14** *Ist  $S_{\mathbf{X}} = \{x \in \mathbf{X} : \|x\| = 1\}$  kompakt, so ist der normierte Raum  $\mathbf{X}$  endlichdimensional.*

**Lemma 3.15** *Sind  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  Banachräume,  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  und  $R(A)$  abgeschlossen, so gilt  $R(A^*) = N(A)^\perp$ . Insbesondere ist  $R(A^*)$  auch abgeschlossen.*

**Theorem 3.16** Sind  $\mathbf{X}$  ein Banachraum,  $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$  und  $A = I - T$ , so gilt  $R(A) = \overline{R(A)}$ . Außerdem ist  $\dim N(A) = 0$  genau dann, wenn  $\dim N(A^*) = 0$  gilt.

**Folgerung 3.17** Unter den Voraussetzungen von Theorem 3.16 gilt entweder  $R(A) = \mathbf{X}$  und  $N(A) = \{\Theta\}$  oder  $R(A) \neq \mathbf{X}$  und  $N(A) \neq \{\Theta\}$ .

**Bemerkung 3.18** Unter den Voraussetzungen von Theorem 3.16 sind die Nullräume  $N(A)$  und  $N(A^*)$  endlichdimensional und ihre Dimensionen gleich.

### 3.5 Über das Spektrum kompakter Operatoren

Das Spektrum  $\sigma(A)$  eines Operators  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$  (vgl. Abschnitt 2.1) besteht aus allen Zahlen  $\lambda \in \mathbb{C}$ , für die  $A - \lambda I$  nicht invertierbar ist. Man nennt  $\lambda \in \sigma(A)$  einen **Eigenwert** von  $A$ , wenn  $\dim N(A - \lambda I) > 0$  gilt.

**Beispiel 3.19** Für den Verschiebungsoperator  $V : \ell^p \rightarrow \ell^p$ ,  $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$  ist  $\sigma(V) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ , wobei im Fall  $1 \leq p < \infty$  nur die  $\lambda$  mit  $|\lambda| < 1$  Eigenwerte sind, während im Fall  $p = \infty$  alle  $\lambda \in \sigma(V)$  Eigenwerte sind.

**Theorem 3.20** Sind  $\mathbf{X}$  ein Banachraum und  $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ , so besteht  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten, deren einzig möglicher Häufungspunkt die Null ist.

### 3.6 Übungsaufgaben

1. Man zeige, dass ein Operator  $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  schwach konvergente Folgen in konvergente Folgen überführt.
2. Es seien  $\mathbf{X}$  ein reflexiver Banachraum und  $T \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$  überführe schwach konvergente Folgen in konvergente Folgen. Man zeige, dass dann  $T$  kompakt ist.
3. Ist die Menge  $\mathbf{X}_0 = \{\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \ell^\infty : |\xi_n| \leq (n+1)^{-1}, n = 0, 1, 2, \dots\}$  kompakt in  $\ell^\infty$ ?
4. Man zeige, dass  $\mathcal{K}(\mathbf{X})$  ein zweiseitiges Ideal in  $\mathcal{L}(\mathbf{X})$  ist, d.h., dass  $\mathcal{K}(\mathbf{X})$  ein linearer Teilraum von  $\mathcal{L}(\mathbf{X})$  ist und dass aus  $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$  und  $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$  folgt  $TA, AT \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ .
5. Man zeige: Besitzt  $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$  für jedes  $\varepsilon > 0$  ein endliches  $\varepsilon$ -Netz, so besitzt  $\mathbf{X}_0$  für jedes  $\varepsilon > 0$  ein endliches  $\varepsilon$ -Netz  $\mathbf{N}_\varepsilon \subset \mathbf{X}_0$ .
6. Es seien  $A_n, A \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$  und  $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ . Man zeige:  
Aus  $A_n \rightarrow A$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n T - AT\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})} = 0$ .
7. Es seien  $A_n, A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  und  $T \in \mathcal{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ . Man zeige:  
Aus  $A_n \rightarrow A$  folgt  $TA_n \rightarrow TA$ .

# Kapitel 4

## Räume messbarer Funktionen

### 4.1 Einiges aus der Integrationstheorie

Im weiteren verstehen wir unter dem Tripel  $(\Omega, \Sigma, P)$  einen **Maßraum**, d.h.,  $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ist eine  $\sigma$ -Algebra über der nichtleeren Menge  $\Omega$  und  $P : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$  ein ( $\sigma$ -additives und  $\sigma$ -endliches) Maß:

$$(M1) \quad A_n \in \Sigma \quad (n = 1, 2, \dots), \quad A_j \cap A_k = \emptyset \quad (j \neq k) \implies P \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

$$(M2) \quad \exists A_n \in \Sigma : \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad P(A_n) < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

Die Mengen  $A \in \Sigma$  nennt man **messbar**. Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{P_\infty\}$  heißt **messbar**, wenn für jede offene Menge  $B \subset \overline{\mathbb{C}}$  das vollständige Urbild  $f^{-1}(B)$  messbar ist. Wir sagen, dass eine Eigenschaft  $P$ -fast überall ( $P$ -f.ü.) gilt, wenn sie mit eventueller Ausnahme einer Menge vom  $P$ -Maß Null erfüllt ist.

Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  nennt man **Treppenfunktion**, wenn sie nur endlich viele Werte  $z_1, z_2, \dots, z_m$  ( $m = m(f)$ ,  $z_j \neq z_k$  für  $k \neq j$ ) annimmt. Eine solche Treppenfunktion ist genau dann messbar, wenn alle Mengen  $A_k := f^{-1}(\{z_k\})$ ,  $k = 1, \dots, m$ , messbar sind. Man nennt eine solche Treppenfunktion  **$P$ -integrierbar**, wenn die Summe  $\sum_{k=1}^m |z_k| P(A_k)$  endlich ist, und definiert das Integral einer integrierbaren Treppenfunktion als

$$\int_{\Omega} f(\omega) P(d\omega) = \sum_{k=1}^m z_k P(A_k).$$

Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  heißt  **$P$ -integrierbar**, wenn eine Folge  $(f_n)$   $P$ -integrierbarer Treppenfunktionen existiert, so dass  $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$   $P$ -f.ü. auf  $\Omega$  gilt und für jedes  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N$  existiert mit

$$\int_{\Omega} |f_n(\omega) - f_m(\omega)| P(d\omega) < \varepsilon \quad \forall m, n > N.$$

Offenbar existiert dann der (endliche) Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(\omega) P(d\omega).$$

Dieser ist unabhängig von der Wahl der Folge  $(f_n)$  und wird mit

$$\int_{\Omega} f(\omega) P(d\omega) \tag{4.1}$$

bezeichnet. Die Menge der  $P$ -integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit  $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\Omega, \Sigma, P)$ . Für  $A \in \Sigma$  definiert man

$$\int_A f(\omega) P(d\omega) := \int_{\Omega} \chi_A(\omega) f(\omega) P(d\omega),$$

wobei  $\chi_A : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \omega \mapsto \begin{cases} 1 & : \omega \in A, \\ 0 & : \omega \notin A, \end{cases}$  die **charakteristische Funktion** der Menge  $A$  bezeichnet. Das Integral (4.1) hat u.a. folgende Eigenschaften:

1.  $f, g \in \mathbf{L}, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \implies \alpha f + \beta g \in \mathbf{L},$

$$\int_{\Omega} [\alpha f(\omega) + \beta g(\omega)] P(d\omega) = \alpha \int_{\Omega} f(\omega) P(d\omega) + \beta \int_{\Omega} g(\omega) P(d\omega),$$

2.  $f \in \mathbf{L} \iff |f| \in \mathbf{L},$

3.  $f \in \mathbf{L}, f(\omega) \geq 0$   $P$ -f.ü. auf  $\Omega \implies$

$$\int_{\Omega} f(\omega) P(d\omega) \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} f(\omega) P(d\omega) = 0 \iff f(\omega) = 0 \text{ } P\text{-f.ü.}$$

4. Ist  $f \in \mathbf{L}$ , so ist die Mengenfunktion  $Q : \Sigma \rightarrow \mathbb{C},$

$$A \mapsto \int_A f(\omega) P(d\omega)$$

$\sigma$ -additiv und absolut stetig. (Man nennt eine Mengenfunktion  $Q : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  absolut stetig, wenn aus  $P(A) = 0$  stets  $Q(A) = 0$  folgt. Dies ist äquivalent dazu, dass  $\lim_{P(A) \rightarrow 0} Q(A) = 0$  gleichmäßig bzgl.  $A \in \Sigma$  gilt.)

Wir erinnern an einige Sätze aus der Maß- und Integrationstheorie. Es seien  $f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  messbare Funktionen.

**Satz 4.1 (Beppo Levi, Lebesgue)** *Gilt  $0 \leq f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \dots$  f.ü. und  $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$  f.ü., so ist  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar und*

$$\int_{\Omega} f(\omega) P(d\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(\omega) P(d\omega).$$

**Satz 4.2 (Fatou)** Für messbare Funktionen  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  gilt

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) P(d\omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(\omega) P(d\omega).$$

**Satz 4.3 (Lebesgue)** Es seien  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  integrierbar und  $f_n(\omega) \rightarrow f(\omega)$  f.ü. sowie  $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$  f.ü.,  $n = 1, 2, \dots$ . Dann ist  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  integrierbar, und es gilt

$$\int_{\Omega} f(\omega) P(d\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(\omega) P(d\omega).$$

Mit  $\mathcal{S}$  bezeichnen wir die Menge der bez. des Lebesgue-Maßes  $m$  messbaren Funktionen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Satz 4.4 (Lusin)** Es seien  $f \in \mathcal{S}$  beschränkt und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann existiert eine stetige Funktion  $f_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit den Eigenschaften

$$m \{t \in [0, 1] : f(t) \neq f_0(t)\} < \varepsilon \quad \text{und} \quad \sup \{|f_0(t)| : t \in [0, 1]\} \leq \sup \{|f(t)| : t \in [0, 1]\}.$$

**Satz 4.5 (Riesz)** Konvergiert  $f_n$  gegen  $f$  dem Maße nach (vgl. Satz 4.7), so existiert eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ , die gegen  $f$  f.ü. konvergiert.

Sind  $(\Omega_j, \Sigma_j, P_j)$ ,  $j = 1, 2$ , zwei Maßräume, so bezeichnet man mit  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle Mengen der Gestalt  $A_1 \times A_2$  mit  $A_j \in \Sigma_j$  enthält. Auf  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$  existiert ein eindeutig bestimmtes ( $\sigma$ -additives und  $\sigma$ -endliches) Maß  $P_1 \times P_2$  mit der Eigenschaft

$$(P_1 \times P_2)(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2), \quad A_j \in \Sigma_j.$$

Das Integral bzgl. dieses Maßes bezeichnen wir mit

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) (P_1 \times P_2)(d\omega_1 d\omega_2) \quad \text{oder} \quad \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) P_2(d\omega_2). \quad (4.2)$$

**Theorem 4.6 (Fubini-Tonelli)** Eine  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ -messbare Funktion  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  ist genau dann  $P_1 \times P_2$ -integrierbar, wenn eines der iterierten Integrale

$$\int_{\Omega_2} \left[ \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) P(d\omega_1) \right] P(d\omega_2) \quad \text{oder} \quad \int_{\Omega_1} \left[ \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) P(d\omega_2) \right] P(d\omega_1)$$

existiert. Diese beiden Integrale sind dann gleich dem Integral (4.2).

## 4.2 Der Raum $\mathbf{S}$

Auf der Menge  $\mathcal{S}$  betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$f \sim g \quad \iff \quad m \{t \in [0, 1] : f(t) \neq g(t)\} = 0$$

und identifizieren im Weiteren die messbare Funktion  $f$  mit der zugehörigen Äquivalenzklasse  $[f]_{\sim}$ . Mit  $\mathbf{S} = \mathbf{S}[0, 1]$  bezeichnen wir den Raum dieser Äquivalenzklassen versehen mit der Metrik

$$\rho(f, g) = \int_0^1 \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} dt.$$

**Satz 4.7 (Fréchet)** Jede Funktion aus  $\mathbf{S}$  ist Grenzwert einer dem Maße nach (vgl. Satz 4.7) konvergenten Folge von Polynomen.

**Satz 4.8** Die Konvergenz in  $\mathbf{S}$  ist die Konvergenz dem Maße nach, d.h., es gilt  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathbf{S}$  genau dann, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m \{t \in [0, 1] : |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\} = 0$$

gilt.

**Satz 4.9** Der metrische Raum  $\mathbf{S}$  ist vollständig und separabel.

### 4.3 Die $L^p$ -Räume

Sei  $1 \leq p < \infty$ . Unter  $\mathbf{L}^p = \mathbf{L}^p[0, 1]$  verstehen wir den Teilraum von  $\mathbf{S}$  der Funktionen (genauer Äquivalenzklassen von Funktionen)  $f$ , für die  $|f|^p$  integrierbar ist. Auf  $\mathbf{L}^p$  definieren wir

$$\|\cdot\|_p : \mathbf{L}^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \left( \int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Satz 4.10** Die Räume  $(\mathbf{L}^p, \|\cdot\|_p)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , sind separable Banachräume.

Mit  $\mathbf{L}^\infty = \mathbf{L}^\infty[0, 1]$  bezeichnet man die Teilmenge von  $\mathbf{S}$  der wesentlich beschränkten Funktionen. Man definiert  $\|\cdot\|_\infty : \mathbf{L}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f \mapsto \text{ess sup} \{|f(t)| : t \in [0, 1]\} := \inf \{M \in \mathbb{R} : m \{t \in [0, 1] : |f(t)| > M\} = 0\}.$$

**Satz 4.11**  $(\mathbf{L}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  ist ein Banachraum.

# Kapitel 5

## Anhang B: Ausgewählte Beweise

### 5.1 Zum Abschnitt 0.2 (Metrische Räume)

**Beweis von Satz 0.10.** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  wählen wir ein  $x_n \in A_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $d(A_n) > \varepsilon \forall n \geq n_0$ . Da  $x_n, x_m \in A_{n_0} \forall n, m \geq n_0$ , folgt  $d(x_n, x_m) < \varepsilon \forall n, m \geq n_0$ . Also ist  $(x_n)_{n=1}^\infty$  eine Cauchyfolge und somit konvergent,  $x_n \rightarrow x^*$ . Aus der Abgeschlossenheit der  $A_n$  folgt  $x^* \in A_n \forall n \in \mathbb{N}$ . Die Eindeutigkeit ergibt sich aus  $d(A_n) \rightarrow 0$ .  $\square$

**Beweis von Satz 0.11.** Wir nehmen an, dass  $\mathbf{X} = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$  mit nirgends dichten Mengen  $A_n$  gilt. Wir setzen  $\varepsilon_0 = 1$  und wählen  $x_0 \in \mathbf{X}$  beliebig. Die Kugel  $K_{\varepsilon_0}(x_0)$  enthält eine Kugel  $K_{\varepsilon_1}(x_1)$ , die zu  $A_1$  durchschnittsfremd ist, wobei  $\varepsilon_1 \leq 1/2$  gewählt werden kann. Diese Prozedur lässt sich beliebig fortsetzen:

$$K_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset K_{\varepsilon_n}(x_n), \quad K_{\varepsilon_n}(x_n) \cap A_n = \emptyset, \quad \varepsilon_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Nach Satz 0.10 existiert ein  $x^* \in \bigcap_{n=1}^\infty K_{\varepsilon_n}(x_n)$ . Aber  $x^* \notin \bigcup_{n=1}^\infty A_n = \mathbf{X}$ .  $\square$

### 5.2 Zum Abschnitt 1.2 (Das Theorem von Banach-Steinhaus)

**Beweis von Lemma 1.6.** Nach Voraussetzung existiert eine Zahl  $\alpha \in (0, \infty)$ , so dass  $\|Ax\| \leq \alpha \forall A \in \mathcal{F}, \forall x \in K_\varepsilon(x^*)$  gilt. Seien nun  $x \in \mathbf{X}, \|x\| \leq 1$  und  $\tilde{x} := \varepsilon x + x^*$ , so dass  $\tilde{x} \in K_\varepsilon(x^*)$ . Es folgt

$$\|A\tilde{x}\| = \|\varepsilon Ax + Ax^*\| \geq \varepsilon \|Ax\| - \|Ax^*\|,$$

also

$$\|Ax\| \leq \frac{\|A\tilde{x}\| + \|Ax^*\|}{\varepsilon} \leq \frac{\alpha + \|Ax^*\|}{\varepsilon}.$$

$\square$

**Beweis von Theorem 1.7.** Wir nehmen an, dass  $\sup\{\|A\| : A \in \mathcal{F}\} = \infty$  ist, und wählen ein  $\varepsilon_0 > 0$  und ein  $x_0 \in \mathbf{X}$  beliebig. Nach Lemma 1.6 ist

$$M(x_0, \varepsilon_0) = \sup\{\|Ax\| : A \in \mathcal{F}, x \in \mathbf{X}, \|x - x_0\| \leq \varepsilon_0\} = \infty,$$

so dass ein  $x_1 \in K_{\varepsilon_0}(x_0)$  und ein  $A_1 \in \mathcal{F}$  mit  $\|A_1 x_1\| > 1$  existieren. Aus der Stetigkeit von  $A_1$  folgt die Existenz einer Kugel  $K_{\varepsilon_1}(x_1) \subset K_{\varepsilon_0}(x_0)$  mit  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$  und  $\|A_1 x\| > 1 \forall x \in K_{\varepsilon_1}(x_1)$ . Auf diese Weise folgt die Existenz einer Folge  $(K_{\varepsilon_n}(x_n))_{n=1}^{\infty}$  abgeschlossener Kugeln mit  $K_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset K_{\varepsilon_n}(x_n)$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , und einer zugehörigen Folge  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  von Operatoren  $A_n \in \mathcal{F}$  mit  $\|A_n x\| > n \forall x \in K_{\varepsilon_n}(x_n)$ . Nach Satz 0.10 existiert ein  $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{\varepsilon_n}(x_n)$ , woraus  $\|A_n x^*\| > n \forall n = 1, 2, \dots$  im Widerspruch zur punktwisen Beschränktheit der Familie  $\mathcal{F}$  folgt.  $\square$

### 5.3 Zum Abschnitt 2.1 (Grundlagen Banachalgebren)

Zum Beweis des folgenden Satzes brauchen wir folgende Fakten aus der Theorie holomorpher Funktionen: Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  auf einer offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{C}$  nennt man **holomorph**, wenn sie in jedem Punkt  $z \in \mathbb{C}$  differenzierbar ist, d.h., für alle  $z \in \Omega$  existiert der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Die Funktion  $f(z)$  heißt holomorph im unendlich fernen Punkt, wenn die Funktion  $g(z) := f(1/z)$  in einer Umgebung des Punktes 0 holomorph ist. Eine Funktion  $f(z)$  ist genau dann im unendlich fernen Punkt holomorph, wenn eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad \forall z \in \mathbb{C} : |z| > R$$

mit (eindeutig bestimmten)  $a_n \in \mathbb{C}$  existiert. Dabei gilt diese Entwicklung für alle  $R > 0$ , für die  $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist.

#### Beweis von Satz 2.4.

(a) Aus  $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| < \infty$  folgt  $\|a^n\| \rightarrow 0$  und somit

$$(e - a) \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (e - a) \sum_{k=0}^n a^k = \lim_{n \rightarrow \infty} e - a^n = e.$$

(b) Die Aussage (b) folgt aus (a).

(c) Sei  $\zeta \in \mathbb{C}$  mit  $|\zeta| > \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}$ . Dann existieren ein  $\delta \in (0, 1)$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\|a^n\|^{1/n} \leq \delta |\zeta| \quad \forall n \geq n_0. \text{ Für } b := \zeta^{-1} a \text{ gilt } \|b^n\| = \frac{1}{|\zeta|^n} \|a^n\| \leq \delta^n, \text{ d.h. } \sum_{n=0}^{\infty} \|b^n\| < \infty.$$

Aus (a) folgt die Existenz von  $(e - b)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n$  und somit  $\zeta e - a = \zeta(e - b) \in GA$ , d.h.

$\zeta \in \rho(a)$ , wobei

$$(\zeta e - a)^{-1} = \frac{1}{\zeta} (e - b)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} a^n \quad (5.1)$$

gilt. Definieren wir  $r(a) := \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$ , so folgt

$$r(a) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} =: r_0(a) \leq \|a\|. \quad (5.2)$$

Seien nun  $n \in \{2, 3, \dots\}$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda^n \in \rho(a^n)$ . Aus  $a^n - \lambda^n e = b(a - \lambda e) = (a - \lambda e)b$  mit  $b = a^{n-1} + \lambda a^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1}e$  folgt die Existenz von

$$(a - \lambda e)^{-1} = b(a^n - \lambda^n e)^{-1} = (a^n - \lambda^n e)^{-1}b$$

und somit  $\lambda \in \rho(a)$ . Ist also  $\lambda \in \sigma(a)$ , so gilt  $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ . Es folgt  $|\lambda|^n \leq \|a^n\|$ , also  $|\lambda| \leq \|a^n\|^{1/n} \forall \lambda \in \sigma(a), \forall n \in \mathbb{N}$  und somit

$$r(a) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Sind  $\lambda_0 \in \rho(a)$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\varepsilon = |\lambda - \lambda_0| \cdot \|(a - \lambda_0 e)^{-1}\| < 1$ , so ist

$$a - \lambda e = (a - \lambda_0 e) [e - (\lambda - \lambda_0)(a - \lambda_0 e)^{-1}] \in \mathcal{GA},$$

also  $\lambda \in \rho(a)$ . Das bedeutet, dass  $\rho(a)$  offen in  $\mathbb{C}$  ist (womit bereits (e) bewiesen ist). Dabei gilt

$$(a - \lambda e)^{-1} = (a - \lambda_0 e)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)(a - \lambda_0 e)^{-n},$$

also

$$\|(a - \lambda e)^{-1} - (a - \lambda_0 e)^{-1}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n = \frac{1}{1 - \varepsilon} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow +0).$$

Die Abbildung  $\rho(a) \rightarrow \mathcal{A}, \lambda \rightarrow (a - \lambda e)^{-1}$  ist also stetig. Es gilt sogar

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} [f(\lambda) - f(\lambda_0)] &= \frac{1}{\lambda - \lambda_0} (a - \lambda e)^{-1} [(a - \lambda_0 e) - (a - \lambda e)] (a - \lambda_0 e)^{-1} \\ &= (a - \lambda e)^{-1} (a - \lambda_0 e)^{-1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} (a - \lambda_0 e)^{-2}. \end{aligned}$$

Für  $\varphi \in \mathcal{A}^*$  definieren wir  $\psi(\lambda) := \varphi(f(\lambda))$ ,  $\lambda \in \rho(a)$ . Es folgt

$$\frac{\psi(\lambda) - \psi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \varphi \left( \frac{1}{\lambda - \lambda_0} [f(\lambda) - f(\lambda_0)] \right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} \varphi((a - \lambda_0 e)^{-2}), \quad (5.3)$$

so dass  $\psi'(\lambda) = \varphi((a - \lambda e)^{-2})$ ,  $\lambda \in \rho(a)$  gilt. Die Funktion  $\psi : \rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$  ist also holomorph. Die Potenzreihe  $-\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \varphi(a^n) = \psi(\lambda)$  konvergiert also für  $|\lambda| > r(a)$ , woraus

$$\sup \{|\varphi(\lambda^{-n} a^n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(a)$$

folgt. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit liefert damit

$$\|\lambda^{-n} a^n\| = \sup \{|\varphi(\lambda^{-n} a^n)| : \varphi \in \mathbf{S}_{\mathcal{A}^*}\} = \sup \{|\varphi(\lambda^{-n} a^n)| : \varphi \in \mathbf{S}_{\mathcal{A}^*}\} \leq c(\lambda) < \infty$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(a)$ . Wir erhalten  $\|a^n\|^{1/n} \leq |\lambda| [c(\lambda)]^{1/n}$  und somit

$$r_0(a) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq |\lambda| \forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(a),$$

so dass  $r_0(a) \leq r(a)$  gilt. Zusammen mit (5.2) ergibt das  $r(a) = r_0(a)$ .

(e) Die Aussage (e) wurde bereits bei (d) mit bewiesen.

□

**Beweis von Satz 2.5.** Sind  $\lambda \in \sigma(a)$  und  $p(z) - p(\lambda) = (z - \lambda)q(z)$ , so folgt  $p(a) - p(\lambda)e = (a - \lambda e)q(a) = q(a)(a - \lambda e)$ . Wäre also  $p(\lambda) \in \rho(p(a))$ , so würde  $\lambda$  in  $\rho(a)$  liegen, d.h.  $p(\sigma(a)) \subset \sigma(p(a))$ .

Ist  $p(z) - \mu = \alpha_0(z - \mu_1) \dots (z - \mu_n)$ ,  $\alpha_0 \neq 0$ , so haben wir  $p(a) - \mu e = \alpha_0(a - \mu_1 e) \dots (a - \mu_n e)$ . Liegen also alle  $\mu_j$  in  $\rho(a)$ , so folgt  $\mu \in \rho(p(a))$ . Umgekehrt ergibt sich aus  $\mu \in \sigma(p(a))$ , dass wenigstens ein  $\mu_k$  zu  $\sigma(a)$  gehört, also  $\mu = p(\mu_k) \in p(\sigma(a))$  gilt, womit  $\sigma(p(a)) \subset p(\sigma(a))$  gezeigt ist. □

Im folgenden Beweis benötigen wir aus der Funktionentheorie das **Theorem von Liouville**, was besagt, dass eine beschränkte und auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  konstant ist.

**Beweis von Satz 2.6.** Wir nehmen an, es gibt ein  $a \in \mathcal{A} \setminus \{\Theta\}$  mit  $\rho(a) = \mathbb{C}$ . Dann ist die Funktion  $f(\lambda) = (a - \lambda e)^{-1}$  für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  definiert, und wir können für jedes Funktional  $\varphi \in \mathcal{A}^*$  die Funktion  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\lambda \mapsto \varphi(f(\lambda))$  betrachten. Nach (5.1) gilt

$$\psi(\lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \varphi(a^n), \quad |\lambda| > 0$$

und wegen (5.3) ist  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion. Ist  $|\lambda| \geq 2 \|a\|$ , so gilt

$$|\psi(\lambda)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\varphi\|_{\mathcal{A}^*} \|a\|^n}{2^{n+1} \|a\|^{n+1}} = \frac{\|\varphi\|_{\mathcal{A}^*}}{\|a\|} \quad \text{und} \quad |\psi(\lambda)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\varphi\|_{\mathcal{A}^*} \|a\|^n}{|\lambda| 2^n \|a\|^n} = \frac{\|\varphi\|_{\mathcal{A}^*}}{|\lambda|}$$

woraus die Beschränktheit von  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\psi(\infty) = 0$  folgt. Nach dem Theorem von Liouville ist damit  $\psi(\lambda) \equiv 0$ , und das für jedes  $\varphi \in \mathcal{A}^*$ , so dass auch  $f(\lambda) \equiv \Theta$  gilt im Widerspruch dazu, dass  $f(\lambda)$  das Inverse eines (von  $\Theta$  verschiedenen) Elementes ist. □

## 5.4 Zum Abschnitt 2.2 (Kommutative Banachalgebren)

**Beweis von Lemma 2.11.** Nach Satz 2.10 existiert ein maximales Ideal  $\mathcal{M} \supset \mathcal{N}$ . Für  $a = a_1 + \lambda e$  mit  $a_1 \in \mathcal{M}$  definieren wir  $m(a) := \lambda$ . Es folgt  $m \in L(\mathcal{A}, \mathbb{C})$  und

$$m(ab) = m((a_1 + \lambda e)(b_1 + \mu e)) = m(a_1 b_1 + \lambda b - 1 + \mu a_1 + \lambda \mu e) = \lambda \mu = m(a)m(b),$$

d.h.  $m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$ . Nun ist  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} = N(m)$ . □

**Beweis von Satz 2.12.** Nach Lemma 2.7 ist noch zu zeigen, dass  $\sigma(a) \subset \{m(a) : m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}\}$  gilt: Sei  $\lambda \in \sigma(a)$ , woraus  $b(a - \lambda e) \neq e$  für alle  $b \in \mathcal{A}$  folgt. Andererseits ist  $\mathcal{N} := \{b(a - \lambda e) : b \in \mathcal{A}\}$  ein Ideal, so dass wegen Lemma 2.11 ein  $m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$  mit  $m(b(a - \lambda e)) = 0 \forall b \in \mathcal{A}$  existiert. Damit folgt  $0 = m(a - \lambda e) = m(a) - \lambda$ . □

**Beweis von Satz 2.13.**

- (a) Seien  $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$  ein maximales Ideal und  $a_n \in \mathcal{N}$ ,  $a_n \rightarrow a$ . Mit  $a = b + \lambda e$ ,  $b \in \mathcal{N}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  folgt  $a_n - b \rightarrow \lambda e$ . Wäre  $\lambda \neq 0$ , so würde  $a_n - b \in G\mathcal{A}$  für alle hinreichend großen  $n$  und somit  $e \in \mathcal{N}$  folgen, was  $\mathcal{N} \neq \mathcal{A}$  widerspricht. Also ist  $\lambda = 0$  und damit  $a = b \in \mathcal{N}$ .
- (b) Ist  $m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$ , so ist  $\mathcal{N} := N(m)$  ein maximales Ideal (vgl. Beispiel 2.9). Wir nehmen an, es gibt ein  $a \in \mathcal{A}$  mit  $\|a\| < 1$  und  $|m(a)| = 1$ . Es folgt  $|m(a^n)| = 1$  und  $\|a^n\| \leq \|a\|^n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Somit existiert eine Teilfolge  $(a^{n_k})_{k=1}^{\infty}$  mit  $m(a^{n_k}) \rightarrow \lambda$ , wobei  $a^{n_k} \rightarrow \Theta$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Nun haben wir  $a^{n_k} = b_k + \lambda_k e$ ,  $b_k \in \mathcal{N} = N(m)$ , woraus  $m(a^{n_k}) = \lambda_k$  folgt. Das liefert  $b_k = a^{n_k} - \lambda_k e = a^{n_k} - m((a^{n_k})e) \rightarrow -\lambda e$ . Da nach (a) das maximale Ideal  $\mathcal{N}$  abgeschlossen ist, folgt  $\lambda e \in \mathcal{N}$  und somit  $\lambda = 0$  im Widerspruch zu  $|m(a^{n_k})| = 1$ . Würde nun ein  $b \in \mathcal{A}$  mit  $|m(b)| > \|b\|$  existieren, so hätte  $a := \frac{b}{m(b)}$  die Eigenschaften  $\|a\| < 1$  und  $|m(a)| = 1$ , was nach dem bereits Bewiesenen nicht sein kann.
- (c) Es seien  $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$  ein maximales Ideal,  $\mathcal{M} \supset \mathcal{N}$  ein weiteres Ideal und  $a \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ . Dann ist  $a = b + \lambda e$  mit  $b \in \mathcal{N}$  und  $\lambda \neq 0$ , woraus  $a - b \in \mathcal{M}$  und  $e \in \mathcal{M}$  folgen, was  $\mathcal{M} = \mathcal{A}$  impliziert.

Umgekehrt genüge nun  $\mathcal{N}$  den Bedingungen in der Aussage (c). Dann ist  $\mathcal{N}$  abgeschlossen, denn nach Satz 2.10 gibt es ein maximales Ideal  $\mathcal{M} \supset \mathcal{N}$ , und aus  $a_n \in \mathcal{N}$ ,  $a_n \rightarrow a$  folgt mit  $a = b + \lambda e$ ,  $b_n \in \mathcal{M}$  die Beziehung  $a_n - b \rightarrow a - b = \lambda e$ . Wie in (a) sieht man, dass  $\lambda = 0$  sein muss, also  $a = b \in \mathcal{M} \neq \mathcal{A}$  und somit  $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ . Wir setzen nun  $\mathcal{N}_1 := \{ax + y : x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{N}\}$ , wobei  $a \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$  fest gewählt sei. Dann gilt  $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_1$  und  $\mathcal{N} \neq \mathcal{N}_1$ , also  $\mathcal{N}_1 = \mathcal{A}$ . Somit existieren ein  $x_0 \in \mathcal{A}$  und ein  $y_0 \in \mathcal{N}$  so dass  $e = ax_0 + y_0$ . Dies bedeutet  $[e]_{\mathcal{N}} = [a]_{\mathcal{N}}[y_0]_{\mathcal{N}}$ . also ist jedes  $[a]_{\mathcal{N}} \in \mathcal{A}/\mathcal{N} \setminus \{[\Theta]_{\mathcal{N}}\}$  invertierbar. Da  $\sigma([a]_{\mathcal{N}})$  nicht leer ist (Satz 2.6), existiert ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $[a]_{\mathcal{N}} - \lambda[e]_{\mathcal{N}} = [\Theta]_{\mathcal{N}}$  bzw.  $b = a - \lambda e \in \mathcal{N}$ . also kann jedes  $a \in \mathcal{A}$  in der Form  $a = b + \lambda e$  mit  $b \in \mathcal{N}$  dargestellt werden. Da  $e \notin \mathcal{N}$  gilt (wegen  $\mathcal{N} \neq \mathcal{A}$ ), ist diese Darstellung eindeutig.

□

**5.5 Zum Abschnitt 3.3 (Kompakte Operatoren)**

**Beweis von Theorem 3.9.** Es seien  $\mathcal{F}$  präkompakt und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wegen Folgerung 0.4 ist  $\mathcal{F}$  beschränkt, d.h. die Funktionen aus  $\mathcal{F}$  sind gleichmäßig beschränkt, und außerdem existiert ein endliches  $\varepsilon$ -Netz  $\{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$  für  $\mathcal{F}$ . Für jedes  $f \in \mathcal{F}$  existieren somit ein  $k \in \{1, \dots, m\}$  und ein  $\delta > 0$ , so dass  $\|f - f_k\|_{\infty} < \varepsilon/3$  und

$$|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3 \quad \forall x, y \in \mathbf{E} \quad \text{mit} \quad d(x, y) < \delta.$$

Es folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \varepsilon$$

für  $x, y \in \mathbf{E}$ ,  $d(x, y) < \delta$ , womit auch die gleichgradige Stetigkeit der Funktionen aus  $\mathcal{F}$  gezeigt ist.

Es seien nun umgekehrt die Funktionen aus  $\mathcal{F} \subset \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$  gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Nach Folgerung 0.4 ist  $\mathbf{E}$  separabel, d.h., es existiert eine in  $\mathbf{E}$  dichte Punktfolge

$(x_n)_{n=1}^\infty$ . Für eine beliebige Folge  $(f_n)_{n=1}^\infty = (f_n^1)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$  hat die Zahlenfolge  $(f_n^1(x_1))_{n=1}^\infty$  eine konvergente Teilfolge  $(f_n^2(x_1))_{n=1}^\infty$ . Ebenso hat  $(f_n^2(x_2))_{n=1}^\infty$  eine konvergente Teilfolge  $(f_n^3(x_2))_{n=1}^\infty$ . Setzen wir diesen Prozess fort, so erhalten wir eine Folge von Funktionenfolgen  $(f_n^k)_{n=1}^\infty$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , mit der Eigenschaft, dass  $(f_n^{k+1})_{n=1}^\infty$  Teilfolge von  $(f_n^k)_{n=1}^\infty$  ist und die Zahlenfolgen  $(f_n^k(x_{k-1}))_{n=1}^\infty$  konvergieren. Es folgt die Konvergenz jeder Zahlenfolge  $(f_n^n(x_k))_{n=1}^\infty$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Wir zeigen, dass  $(f_n^n)_{n=1}^\infty$  eine Cauchyfolge in  $\mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbf{C})$  ist. Es sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$ , so dass  $|f_n^n(x) - f_n^n(y)| < \varepsilon/3$  für alle  $x, y \in \mathbf{E}$  mit  $d(x, y) < \delta$  und für alle  $n = 1, 2, \dots$ . Da  $\mathbf{E}$  kompakt ist, existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\mathbf{E} = \bigcup_{k=1}^N U_\delta(x_k)$ . Ferner existiert ein  $M \in \mathbb{N}$ , für das

$$|f_n^n(x_k) - f_m^m(x_k)| < \varepsilon/3 \quad \forall k = 1, \dots, N, \quad \forall m, n \geq M$$

gilt. Ist nun  $x \in \mathbf{E}$  beliebig, so existiert ein  $j = j(x) \in \{1, \dots, N\}$ , so dass  $x \in U_\delta(x_j)$ . Es folgt für  $m, n \geq M$

$$|f_n^n(x) - f_m^m(x)| \leq |f_n^n(x) - f_n^n(x_j)| + |f_n^n(x_j) - f_m^m(x_j)| + |f_m^m(x_j) - f_m^m(x)| < \varepsilon.$$

□

**Beweis von Lemma 3.11.** Nach Folgerung 0.4 genügt jede relativ kompakte Menge der angegebenen Bedingung. Wir nehmen umgekehrt an, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  ein endliches  $\varepsilon$ -Netz  $\{y_1^\varepsilon, \dots, y_m^\varepsilon\}$ ,  $m = m(\varepsilon)$ , für  $\mathbf{X}_0$  existiert, und betrachten eine beliebige Punktfolge  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}_0$ . Wir setzen  $x_n^0 = x_n$ . Dann existieren Teilfolgen  $(x_n^k)_{n=1}^\infty \subset (x_n^{k-1})_{n=1}^\infty$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , mit  $(x_n^k)_{n=1}^\infty \subset U_{1/k}(y_j^{1/k})$ ,  $j = j(k)$ . Die Teilfolge  $(x_n^n)_{n=1}^\infty \subset (x_n)_{n=1}^\infty$  ist dann Cauchyfolge. □

**Beweis von Satz 3.12.** Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , existieren  $x_1, \dots, x_m \in U_1^{\mathbf{X}}(\Theta) = \{x \in \mathbf{X} : \|x\|_{\mathbf{X}} < 1\}$ , so dass  $\|Tx - Tx_j\|_{\mathbf{Y}} < \varepsilon/4$  für alle  $x \in U_1^{\mathbf{X}}(\Theta)$  und ein gewisses  $j = j(x) \in \{1, \dots, m\}$ . Für  $g \in \mathbf{Y}^*$  definieren wir  $Bg = [g(Tx_1) \quad \dots \quad g(Tx_m)]^T \in \mathbb{C}^m$ . Dann ist  $B(U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta))$  relativ kompakt, so dass  $g_1, \dots, g_n \in U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta)$  existieren, für die  $\|Bg - Bg_k\| < \varepsilon/4$  für alle  $g \in U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta)$  und für ein gewisses  $k = k(g) \in \{1, \dots, n\}$  gilt. Das bedeutet

$$|g(Tx_i) - g_k(Tx_i)| < \varepsilon/4 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad k = k(g).$$

Wir erhalten für alle  $x \in U_1^{\mathbf{X}}(\Theta)$ ,  $g \in U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta)$ ,  $j = j(x)$  und  $k = k(g)$

$$\begin{aligned} |(T^*g)(x) - (T^*g_k)(x)| &= |g(Tx) - g_k(Tx)| \\ &\leq |g(Tx) - g(Tx_j)| + |g(Tx_j) - g_k(Tx_j)| + |g_k(Tx_j) - g_k(Tx)| \\ &< \|g\| \|Tx - Tx_j\| + \frac{\varepsilon}{4} + \|g_k\| \|Tx_j - Tx\| < \frac{3\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

d.h.,  $\{T^*g_k : k = 1, \dots, n\}$  ist  $\varepsilon$ -Netz für  $T^*(U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta))$ . □

## 5.6 Zum Abschnitt 3.4 (Fredholmoperatoren)

**Beweis von Lemma 3.15.** Es sei  $f \in R(A^*)$ , d.h.  $A^*g = f$  für ein gewisses  $g \in \mathbf{Y}^*$ . Aus  $x \in N(A)$  folgt  $f(x) = (A^*g)(x) = g(Ax) = g(\Theta) = 0$ , d.h.  $R(A^*) \subset N(A)^\perp$ .

Sei umgekehrt  $f \in N(A)^\perp$ . Für  $y = Ax \in R(A)$  setzen wir  $g(y) = f(x)$ . (Diese Definition von  $g \in L(R(A), \mathbb{C})$  ist korrekt.) Für alle  $z \in N(A)$  gilt dann  $|g(y)| = |f(x - z)| \leq \|f\| \|x - z\|$  und somit nach Satz 3.5 mit einer gewissen Konstanten  $c > 0$

$$|g(y)| \leq \|f\| \operatorname{dist}(x, N(A)) \leq c \|f\| \|y\|, \quad y \in R(A).$$

Sei nun  $\tilde{g} \in \mathbf{Y}^*$  eine Fortsetzung von  $g$  auf ganz  $\mathbf{Y}$ , so dass für alle  $x \in \mathbf{X}$  gilt  $\tilde{g}(Ax) = g(Ax) = f(x)$ , d.h.  $f = A^*\tilde{g} \in R(A^*)$ .  $\square$

### Beweis von Theorem 3.16.

1. Wir zeigen, dass eine Konstante  $c > 0$  existiert, so dass

$$\operatorname{dist}(x, N(A)) \leq c \|Ax\| \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad (5.4)$$

gilt. Wir nehmen an, es gebe eine Punktfolge  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}$  mit den Eigenschaften

$$\|Ax_n\| > 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(x_n, N(A)) = c_n \|Ax_n\|, \quad c_n \rightarrow \infty.$$

Wir setzen  $x_n^0 = [c_n \|Ax_n\|]^{-1} x_n$ . Dann gilt

$$\operatorname{dist}(x_n^0, N(A)) = 1 \quad \text{und} \quad \|Ax_n^0\| = c_n^{-1} \rightarrow 0.$$

Nun existieren  $x_n^1 \in N(A)$  mit  $\|x_n^0 - x_n^1\| \leq 2$ . Für  $z_n = x_n^0 - x_n^1$  folgt

$$\operatorname{dist}(z_n, N(A)) = 1, \quad \|z_n\| \leq 2 \quad \text{und} \quad \|Az_n\| \rightarrow 0.$$

Da  $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ , existiert eine Teilfolge  $(z_n^1)_{n=1}^\infty \subset (z_n)_{n=1}^\infty$  mit  $Tz_n^1 \rightarrow z$ . Es folgt

$$z_n^1 = Tz_n^1 + Az_n^1 \rightarrow z \quad \text{und somit} \quad Az_n^1 \rightarrow Az = \Theta,$$

d.h.  $z \in N(A)$ . Andererseits ist aber  $\|z_n^1 - z\| \geq \operatorname{dist}(z_n^1, N(A)) = 1$ . Somit ist (5.4) gezeigt.

2. Ist nun  $\dim N(A^*) = 0$ , so folgt  $R(A) = {}^\perp N(A^*) = \mathbf{X}$ . Ist  $x_1 \neq \Theta$  und  $Ax_1 = \Theta$ , so existieren also  $x_{n+1} \in \mathbf{X}$  mit  $Ax_{n+1} = x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Wegen  $A^n x_n = A^{n-1} x_{n-1} = \dots = Ax_1 = \Theta$  und  $A^{n-1} x_n = \dots = Ax_2 = x_1 \neq \Theta$  steht in dieser Inklusionskette  $N(A) \subset N(A^2) \subset \dots \subset N(A^n) \subset \dots$  nirgends das Gleichheitszeichen. In Anwendung von Lemma 3.13 erhalten wir eine Folge  $(z_n)_{n=1}^\infty$  mit  $z_n \in N(A^n)$ ,  $\|z_n\| = 1$  und  $\operatorname{dist}(z_n, N(A^{n-1})) \geq 1/2$ . Somit hat  $(Tz_n)_{n=1}^\infty$  eine konvergente Teilfolge. Andererseits gilt aber für  $n > m$

$$\|Tz_n - Tz_m\| = \|z_n - (z_m - Az_m + Az_n)\| \geq \frac{1}{2}.$$

Also:  $\dim N(A) = 0$ .

3. Ist umgekehrt  $\dim N(A) = 0$ , so folgt wegen  $R(A^*) = N(A)^\perp = \mathbf{X}^*$  (siehe Lemma 3.15) und  $T^* \in \mathcal{K}(\mathbf{X}^*)$  (siehe Satz 3.12) wie im vorhergehenden Beweisschritt  $\dim N(A^*) = 0$ .

$\square$

## 5.7 Zum Abschnitt 3.5 (Das Spektrum kompakter Operatoren)

**Beweis von Theorem 3.20.** Ist  $\lambda \neq 0$  und  $\dim N(T - \lambda I) = 0$ , so gilt wegen Folgerung 3.17  $R(T - \lambda I) = R(-\lambda(I - \lambda^{-1}T)) = \mathbf{X}$ , so dass  $\lambda \in \rho(T)$ .

Wir nehmen nun an, dass paarweise verschiedene  $\lambda_n \in \sigma(T)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , mit  $|\lambda_n| \geq \varepsilon > 0$  existieren. Dann gibt es  $x_n \in \mathbf{X} \setminus \{\Theta\}$ , so dass  $Tx_n = \lambda_n x_n$ . Dann ist das System  $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$  linear unabhängig. Sonst würde ein Index  $m$  existieren, für den das System  $\{x_1, \dots, x_m\}$  linear unabhängig ist und  $x_{m+1} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m$  gilt. Dann folgt

$$Tx_{m+1} = \lambda_{m+1} x_{m+1} = \lambda_{m+1} \alpha_1 x_1 + \dots + \lambda_{m+1} \alpha_m x_m$$

und

$$Tx_{m+1} = \alpha_1 Tx_1 + \dots + \alpha_m Tx_m = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m x_m,$$

also

$$\alpha_1(\lambda_{m+1} - \lambda_1)x_1 + \dots + \alpha_m(\lambda_{m+1} - \lambda_m)x_m = \Theta.$$

Das bedeutet aber  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$  im Widerspruch zu  $x_{m+1} \neq \Theta$ .

Wir setzen  $\mathbf{X}_n = \text{span} \{x_1, \dots, x_n\}$ . Dann gilt  $\mathbf{X}_1 \subset \mathbf{X}_2 \subset \dots \subset \mathbf{X}_n \subset \mathbf{X}_{n+1} \subset \dots$ , wobei an keiner Stelle Gleichheit auftritt. Aus Lemma 3.13 folgt die Existenz von Elementen  $y_n \in \mathbf{X}_n$  mit  $\text{dist}(y_n, \mathbf{X}_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$  und  $\|y_n\| = 1$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Es gilt  $T(\mathbf{X}_n) \subset \mathbf{X}_n$  und  $(T - \lambda_n I)(\mathbf{X}_n) \subset \mathbf{X}_{n-1}$ . Wegen

$$Ty_n - Ty_m = (T - \lambda_n I)y_n - Ty_m + \lambda_n y_n = \lambda_n [y_n - \lambda_n^{-1}(Ty_m - (T - \lambda_n I)y_n)]$$

folgt für  $n > m$  die Ungleichung  $\|Ty_n - Ty_m\| \geq |\lambda_n|/2 \geq \varepsilon/2$ , so dass  $(Ty_n)_{n=1}^\infty$  keine konvergente Teilfolge besitzt im Widerspruch zur Kompaktheit von  $T$ .

Damit ist  $\sigma(T) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \frac{1}{n}\}$  endlich für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $\sigma(T)$  höchstens abzählbar ist.  $\square$

## 5.8 Zum Kapitel 4 (Räume messbarer Funktionen)

**Beweis von Satz 4.8.** Sind  $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon > 0$  und

$$A_n = A_n(\varepsilon) = \{t \in [0, 1] : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon\},$$

so folgt

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} m(A_n) = \int_{A_n} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} dt \leq \int_{A_n} \frac{|f_n(t) - f(t)| dt}{1 + |f_n(t) - f(t)|} \leq \rho(f_n, f) \rightarrow 0.$$

Sind umgekehrt  $f_n \rightarrow f$  dem Maße nach,  $\varepsilon > 0$  beliebig und  $A_n = A_n(\varepsilon)$  wie oben, so gilt

$$\rho(f_n, f) = \int_{A_n} \frac{|f_n(t) - f(t)| dt}{1 + |f_n(t) - f(t)|} + \int_{[0,1] \setminus A_n} \frac{|f_n(t) - f(t)| dt}{1 + |f_n(t) - f(t)|} \leq m(A_n) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \rightarrow \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Da hierbei  $\varepsilon > 0$  beliebig klein gewählt werden kann, folgt  $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ .  $\square$

**Beweis von Satz 4.9.** Es sei  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{S}$  eine Cauchyfolge. Wir wählen  $n_1 < n_2 < \dots$  so, dass  $\rho(f_n, f_{n_k}) < 2^{-k}$  für alle  $n > n_k$  gilt, und setzen

$$g_k(t) = \sum_{j=1}^k \frac{|f_{n_{j+1}}(t) - f_{n_j}(t)|}{1 + |f_{n_{j+1}}(t) - f_{n_j}(t)|}$$

sowie  $g(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(t)$ . Da

$$\int_0^1 g_k(t) dt = \sum_{j=1}^k \rho(f_{n_{j+1}}, f_{n_j}) < 1,$$

folgt aus Satz 4.1  $\int_0^1 g(t) dt \leq 1$ . Daraus schließen wir, dass für  $G := \{t \in [0, 1] : g(t) = \infty\}$  gilt  $m(G) = 0$ , so dass  $g_k(t)$  für  $k \rightarrow \infty$  für fast alle  $t \in [0, 1]$  gegen eine endliche Zahl konvergiert, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|}{1 + |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|} < \infty, \quad t \in [0, 1] \setminus G. \quad (5.5)$$

Für diese  $t$  konvergiert dann aber auch die Reihe

$$f_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)],$$

denn für alle hinreichend großen  $k$  ist  $|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)| < 1$  wegen (5.5) und somit

$$|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)| \leq \frac{2|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|}{1 + |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|}.$$

Also gibt es eine Funktion  $f \in \mathcal{S}$ , gegen die  $f_{n_k}$  f.ü. und somit auch dem Maße nach konvergiert (beachte: Die Grenzfunktion einer f.ü. konvergenten Folge messbarer Funktionen ist messbar). Nach Satz 4.8 folgt  $f_{n_k} \rightarrow f$  in  $\mathbf{S}$  und, da  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Cauchyfolge in  $\mathbf{S}$  ist,  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathbf{S}$ .

Die Separabilität von  $\mathbf{S}$  folgt aus Satz 4.7 und aus Satz 4.8. Dabei ist zu beachten, dass ein Polynom gleichmäßig über dem Intervall  $[0, 1]$  (d.h. in der  $\|\cdot\|_{\infty}$ -Norm) durch Polynome mit komplex-rationalen Koeffizienten approximiert werden kann und dies wegen  $\rho(f, g) \leq \|f - g\|_{\infty}$  gleichzeitig eine Approximation in der Metrik des Raumes  $\mathbf{S}$  ist.  $\square$

**Beweis von Satz 4.10.** Aus  $|f(t) + g(t)|^p \leq (|f(t)| + |g(t)|)^p \leq 2^{p-1} (|f(t)|^p + |g(t)|^p)$  folgt, dass mit  $f \in \mathbf{L}^p$  und  $g \in \mathbf{L}^p$  auch  $f + g \in \mathbf{L}^p$  gilt.

Sind  $A := \|f\|_p > 0$  und  $B := \|g\|_q > 0$ ,  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ,  $1 < p < \infty$ , so folgt mit  $\alpha(t) = f(t)/A$  und  $\beta(t) = g(t)/B$  aus der Ungleichung (0.1)

$$\int_0^1 |\alpha(t)\beta(t)| dt \leq \frac{1}{p} \int_0^1 |\alpha(t)|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^1 |\beta(t)|^q dt = 1$$

und somit die **Hölder'sche Ungleichung für Integrale**

$$\int_0^1 |f(t)g(t)| dt \leq \left( \int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad (5.6)$$

bzw.

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad f \in \mathbf{L}^p, g \in \mathbf{L}^q.$$

(Offenbar gilt letzteres auch für  $p = 1$  und  $q = \infty$ !) Sind nun  $f, g \in \mathbf{L}^p$ , so folgt aus (5.6),  $q(p-1) = p$  und  $p/q = p-1$

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_0^1 |f(t) + g(t)|^p \\ &\leq \int_0^1 |f(t)| |f(t) + g(t)|^{p-1} dt + \int_0^1 |g(t)| |f(t) + g(t)|^{p-1} dt \\ &\leq \left[ \left( \int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_0^1 |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left( \int_0^1 |f(t) + g(t)|^{q(p-1)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}, \end{aligned}$$

also die Dreiecksungleichung  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .

Es sei nun  $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{L}^p$  eine Cauchyfolge. Mit der Metrik  $\rho$  in  $\mathbf{S}$  und der Hölderschen Ungleichung (für  $g \equiv 1$  angewandt) gilt

$$\rho(f_m, f_n) \leq \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)| dt \leq \left( \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|f_m - f_n\|_p,$$

so dass  $(f_n)_{n=1}^\infty$  auch eine Cauchyfolge in  $\mathbf{S}$  ist. ( $\mathbf{L}^p$  ist also stetig in  $\mathbf{S}$  eingebettet!) Somit existiert wegen der Vollständigkeit von  $\mathbf{S}$  eine Funktion  $f \in \mathbf{S}$ , gegen die  $f_n$  dem Maße nach konvergiert. Nach Satz 4.5 existiert eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ , die f.ü. gegen  $f$  konvergiert. Ist nun  $\varepsilon > 0$  beliebig, so folgt unter Verwendung von Satz 4.2 die Existenz eines  $m_0$ , so dass

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_m(t) - f(t)|^p dt &= \int_0^1 \lim_{k \rightarrow \infty} |f_m(t) - f_{n_k}(t)|^p dt \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_m(t) - f_{n_k}(t)|^p dt \leq \varepsilon^p \quad \forall m \geq m_0. \end{aligned}$$

Also gilt  $f \in \mathbf{L}^p$  und  $f_m \rightarrow f$  in  $\mathbf{L}^p$ .

Die Separabilität von  $\mathbf{L}^p$  kann man wie folgt zeigen: Für  $f \in \mathbf{L}^p$  definiert man

$$f_n(t) = \begin{cases} n & : |f(t)| > n, \\ f(t) & : |f(t)| \leq n. \end{cases}$$

Es folgt  $f_n(t) \rightarrow f(t)$  und  $|f_n(t) - f(t)| \leq 2^p |f(t)|^p$ ,  $t \in [0, 1]$ , so dass nach Satz 4.3 gilt  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ . Aus Satz 4.4 schlussfolgert man nun, dass der Raum  $(\mathbf{C}[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  der stetigen Funktionen dicht in  $\mathbf{L}^p$  ist. Es bleibt nur noch die Separabilität des Raumes  $(\mathbf{C}[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  und seine stetige Einbettung in  $\mathbf{L}^p$  ( $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$ ) anzuwenden.  $\square$

- Ist  $f \in \mathbf{L}^\infty$ , so gilt  $m(A_n) = 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , wobei

$$A_n = \left\{ t \in [0, 1] : |f(t)| < \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \right\}.$$

Somit gilt auch  $m(B) = 0$  für  $B = \{t \in [0, 1] : |f(t)| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ . Also: Zu jedem

$f \in \mathbf{L}^\infty$  existiert eine Menge  $B_f \subset [0, 1]$  mit den Eigenschaften

$$m(B_f) = 0 \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| : t \in [0, 1] \setminus B_f\}.$$

- Umgekehrt folgt aus  $B \subset [0, 1]$ ,  $m(B) = 0$  und  $\sup\{|f(t)| : t \in [0, 1] \setminus B\} =: M < \infty$ , dass  $f \in \mathbf{L}^\infty$  und  $\|f\|_\infty \leq M$ .

**Beweis von Satz 4.11.** Sind  $f, g \in \mathbf{L}^\infty$ , so folgt  $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$  für alle  $t \in [0, 1] \setminus (b_f \cup b_g)$  und somit  $f + g \in \mathbf{L}^\infty$ ,  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ .

Sei nun  $(f_n)_{n=1}^\infty$  eine Cauchyfolge in  $\mathbf{L}^\infty$ . Dann existieren eine Konstante  $M > 0$  und eine Menge  $A \subset [0, 1]$  mit  $m(A) = 0$ , so dass

$$|f_n(t)| \leq \|f_n\|_\infty \leq M \quad \text{und} \quad |f_n(t) - f_k(t)| \leq \|f_n - f_k\|_\infty \quad \forall t \in [0, 1] \setminus A, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(vgl. obige Überlegungen). Damit ist die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(t) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) & : t \in [0, 1] \setminus A, \\ 0 & : t \in A, \end{cases}$$

wohldefiniert, gehört zu  $\mathcal{S}$  und ist beschränkt, also  $f \in \mathbf{L}^\infty$ . Ist nun  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt, so existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$|f(t) - f_k(t)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(t) - f_k(t)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_k\|_\infty < \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1] \setminus A, \quad \forall k \geq k_0.$$

Dies liefert  $\|f - f_k\|_\infty < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$ . □



## Kapitel 6

# Hinweise und Lösungen für ausgewählte Beispiele und Übungsaufgaben

**Beispiel 0.7:** Um zu zeigen, dass  $d$  (in  $\mathbf{s}$ ) die Dreiecksungleichung erfüllt, braucht man nur die Dreiecksungleichung für die Betragsfunktion  $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$  und die Monotonie der Funktion  $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\lambda \mapsto \frac{\lambda}{1 + \lambda}$  zu verwenden.

Wir untersuchen den Raum  $(\mathbf{s}, d)$  auf Vollständigkeit. Dazu seien eine Cauchyfolge  $(\xi^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{s}$ ,  $\xi^{(n)} = (\xi_{nk})_{k=0}^{\infty}$ , und ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  gegeben. Dann existiert ein Index  $N$  mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_{nk} - \xi_{mk}|}{1 + |\xi_{nk} - \xi_{mk}|} < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N, \quad (6.1)$$

also auch

$$\frac{|\xi_{nk} - \xi_{mk}|}{1 + |\xi_{nk} - \xi_{mk}|} < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Hieraus schließt man, dass jede Folge  $(\xi_{nk})_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , eine Cauchyfolge in  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  ist und somit einen Grenzwert  $\xi_k^*$  besitzt. Aus (6.1) folgt für jedes  $K = 0, 1, 2, \dots$  durch den Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=0}^K \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_{nk} - \xi_k^*|}{1 + |\xi_{nk} - \xi_k^*|} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N,$$

und mit  $K \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_{nk} - \xi_k^*|}{1 + |\xi_{nk} - \xi_k^*|} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Also ist  $\xi^* = (\xi_k^*)_{k=0}^{\infty}$  Grenzwert von  $(\xi^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ .

**Beispiel 0.8 und Übungsaufgabe 0.6, 2:** Die Vollständigkeit von  $(\ell^{\infty}, d_{\infty})$  und  $(\ell^p, d_p)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , zeigt man analog, wobei der Nachweis, dass  $(\xi_k^*)_{k=0}^{\infty}$  zu  $\ell^{\infty}$  bzw.  $\ell^p$  gehört, nicht vergessen werden darf.

Man zeigt, dass  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{c}_0$  abgeschlossene Teilräume von  $\ell^\infty$  sind, und erhält somit nach Folgerung 0.2 die Vollständigkeit dieser Räume.

Aus der Tatsache, dass die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen stetig ist, ergibt sich die Vollständigkeit von  $(\mathbf{C}[0, 1], d_\infty)$ . Für den Nachweis der Vollständigkeit von  $(\mathbf{C}^{(m)}[0, 1], d_{\infty, m})$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , benötigt man noch den Fakt, dass man bei gleichmäßiger Konvergenz der Folge der Ableitungen Grenzübergang und Differentiation miteinander vertauschen kann.

Die Menge der Zahlenfolgen  $\{(r_0, r_1, \dots, r_n, 0, 0, \dots) : r_j \in \mathbb{Q}, n = 0, 1, 2, \dots\}$  ist abzählbar und dicht in  $\mathbf{c}_0$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\ell^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , und  $\mathbf{s}$ , so dass diese Räume separabel sind.

Der Raum  $\ell^\infty$  ist nicht separabel, da man zu jeder Folge  $(\xi^{(n)})_{n=1}^\infty \subset \ell^\infty$  eine Folge  $\xi = (\xi_k)_{k=0}^\infty \in \ell^\infty$  finden kann, deren Abstand zu allen  $\xi^{(n)}$  nicht kleiner als 1 ist, nämlich z.B. die Folge mit

$$\xi_k = \begin{cases} \xi_k^{(n)} + 1 & : |\xi_k^{(n)}| \leq 1, \\ 0 & : |\xi_k^{(n)}| > 1. \end{cases}$$

**Beispiel 1.5:** Ausgangspunkt ist die folgende Überlegung: Bezeichnet  $\mathbf{X}$  einen der zu betrachtenden Räume, so lässt sich jedes Element  $x = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \mathbf{X}$  in der Form  $x = \sum_{n=0}^\infty \xi_n e_n$  mit

$e_n = (\delta_{jn})_{j=0}^\infty$  schreiben. Damit folgt für ein  $\varphi \in \mathbf{X}^*$ , dass  $\varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty \xi_n \eta_n$ , wobei  $\eta_n = \varphi(e_n)$ , und  $\varphi$  lässt sich mit der Folge  $y = (\eta_n)_{n=0}^\infty$  identifizieren.

**Beispiel 2.8:**  $\mathcal{N}(E_0)$  ist offenbar ein linearer Teilraum, und aus  $f \in \mathcal{N}(E_0)$ ,  $g \in \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$  folgt  $fg \in \mathcal{N}(E_0)$ .

Seien  $E_0 = \{x_0\}$  und  $f \in \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$ . Dann gilt  $f(x) = g(x) + f(x_0)e(x)$ , wobei  $e(x) \equiv 1$  das Einselement in  $\mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$  bezeichnet und die Funktion  $g(x) := f(x) - f(x_0)$  zu  $\mathcal{N}(E_0)$  gehört. Da  $e \notin \mathcal{N}(E_0)$  gilt, ist diese Darstellung eindeutig, also  $\mathcal{N}(E_0)$  ein maximales Ideal.

Sind dagegen  $x_0$  und  $x_1$  zwei verschiedene Punkte in  $E_0$ , so kann die stetige Funktion  $f(x) = d(x, x_0)$  ( $d$  - Metrik in  $\mathbf{E}$ ) nicht in der Form  $f(x) = g(x) + \lambda e(x)$  mit  $g \in \mathcal{N}(E_0)$  dargestellt werden, da dann  $f(x_0) = f(x_1) = \lambda$  gelten müsste, aber  $f(x_0) = 0 \neq d(x_1, x_0) = f(x_1)$  gilt.

**Beispiel 2.9:** Aus  $a \in \mathcal{N}(m)$  und  $b \in \mathcal{A}$  folgt  $m(ab) = m(a)m(b) = 0$ , d.h.  $ab \in \mathcal{N}(m)$ . Sei weiter  $b \in \mathcal{A}$  beliebig. Wir setzen  $a = b - m(b)e$ . Es folgt  $a \in \mathcal{N}(m)$  und  $b = a + m(b)e$ . Diese Darstellung ist eindeutig, denn aus  $b = a_1 + \lambda_1 e$  mit  $a_1 \in \mathcal{N}(m)$  und  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$  folgt  $a - a_1 = (\lambda_1 - m(b))e \in \mathcal{N}(m)$  und somit  $\lambda_1 = m(b)$  (da  $m(e) = 1$ ).

**Übungsaufgabe 3.6, 3:** Die Menge

$$\mathbf{X}_0 = \{\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \ell^\infty : |\xi_n| \leq (n+1)^{-1}, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

ist offenbar abgeschlossen. Es seien  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wir wählen  $N \in \mathbb{N}$  so, dass  $N^{-1} < \varepsilon$ . Die Menge

$$\tilde{\mathbf{X}}_0^N = \left\{ \left[ \begin{array}{cccc} \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{N-1} \end{array} \right]^T : \xi \in \mathbf{X}_0 \right\} \subset \mathbb{C}^N$$

ist beschränkt in  $(\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_\infty)$  und somit präkompakt. Ist

$$\left\{ \tilde{\xi}^j = \begin{bmatrix} \xi_0^j & \xi_1^j & \dots & \xi_{N-1}^j \end{bmatrix}^T : j = 1, \dots, m \right\}$$

ein  $\varepsilon$ -Netz für  $\tilde{\mathbf{X}}_0^N \subset \mathbb{C}^N$ , so ist

$$\left\{ \xi^j = (\xi_0^j, \xi_1^j, \dots, \xi_{N-1}^j, 0, 0, \dots) : j = 1, \dots, m \right\}$$

ein  $\varepsilon$ -Netz für  $\mathbf{X}_0 \subset \ell^\infty$ .

**Übungsaufgabe 3.6, 5:** Es sei  $\{x_1^\varepsilon, \dots, x_m^\varepsilon\} \subset \mathbf{X}$  ein  $\varepsilon/2$ -Netz für  $\mathbf{X}_0$ . O.E.d.A. können wir voraussetzen, dass  $U_{\varepsilon/2}(x_j^\varepsilon) \cap \mathbf{X}_0 \neq \emptyset$  für alle  $j = 1, \dots, m$  gilt. Sei  $x_j \in U_{\varepsilon/2}(x_j^\varepsilon) \cap \mathbf{X}_0$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Wegen  $d(x, x_j) \leq d(x, x_j^\varepsilon) + d(x_j^\varepsilon, x_j)$  ist  $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbf{X}_0$  ein  $\varepsilon$ -Netz für  $\mathbf{X}_0$ .

# Index

- $GL(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , 21
- $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , 17
- $\mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$ , 27
- $\mathbf{C}[0, 1]$ , 11
- $\mathbf{C}^{(m)}[0, 1]$ , 11
- $\mathbf{X}/\mathbf{M}$ , 22
- $\mathbf{c}$ , 11
- $\mathbf{c}_0$ , 11
- $\mathbf{s}$ , 10
- $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ , 18
- $\ell^\infty$ , 10
- $\ell^p$ , 11
- $\varepsilon$ -Netz, 9
- $\varepsilon$ -Umgebung, 8
- \*schwach abgeschlossene Menge, 25
- \*schwache Konvergenz, 25
- äquivalente Normen, 13, 21
  
- abgeschlossene Kugel, 8
- abgeschlossene Menge, 9
- abgeschlossener Operator, 21
- absolut konvergente Reihe, 14
- adjungierter Operator, 33
- Arzela-Ascoli, Theorem von, 35
- Auswahlaxiom, 23
  
- Bair'scher Satz, 12
- Banach'scher Fixpunktsatz, 11
- Banach, Satz von, 21
- Banach-Steinhaus, Satz von, 19
- Banachalgebra, 27
- Banachraum, 13
- Basis eines metrischen Raumes, 12
- Berührungspunkt, 8
- beschränkte lineare Abbildung, 18
- beschränkte Menge, 10
- bidualer Raum, 24
- Bild eines Operators, 34
  
- Cantor'scher Durchschnittssatz, 12
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 8, 14
- Cauchyfolge, 9
  
- charakteristische Funktion einer Menge, 38
  
- dualer Raum, 18
- Durchschnittssatz, Cantor'scher, 12
  
- Eigenwert, 36
- Einselement, 27
  
- Faktorraum, 22
- Fixpunkt, 11
- Fixpunktsatz, Banach'scher, 11
- Fredholmoperator, 35
- Fubini-Tonelli, Theorem von, 39
- Fundamentalfolge, 9
  
- gesättigter Teilraum, 25
- gleichgradige Stetigkeit, 35
- gleichmäßig stetige Abbildung, 10
- gleichmäßige Beschränktheit, 35
- Grenzwert, 8
  
- Häufungspunkt, 9
- Hölder'sche Ungleichung für Integrale, 48
- Hölder-Ungleichung, 8
- Hahn-Banach, Theorem von, 24
- halbeinfache Banachalgebra, 30
- Hausdorff-Raum, 29
- Hilbertraum, 14
- holomorphe Funktion, 42
  
- Ideal, 28
- innerer Punkt, 8
- inneres Produkt, 14
- integrierbare Funktion, 37
- inverser Operator, 20
- inverses Element, 27
- invertierbarer Operator, 20
- isolierter Punkt, 9
- Isometrie, 12
- isometrisch isomorphe Räume, 18
- isometrische Räume, 13
  
- Kern eines linearen Operators, 21

- kommutative Banachalgebra, 27
- kompakte Menge, 9
- kompakter Operator, 34
- kontrahierende Abbildung, 11
- konvergente Punktfolge, 8
- konvergente Reihe, 14
  
- Lemma von Zermelo, 23
- linear geordnete Menge, 23
- lineare Abbildung, 17
- linearer Operator, 17
- lineares Funktional, 18
- Liouville, Theorem von, 44
  
- maximales Element, 23
- maximales Ideal, 28
- Maximalkettensatz, 23
- Maßraum, 37
- Menge erster Kategorie, 12
- Menge zweiter Kategorie, 12
- messbare Funktion, 37
- messbare Menge, 37
- Methode der sukzessiven Approximation, 12
- metrischer Raum, 8
- Minkowski-Ungleichung, 8
- multiplikatives lineares Funktional, 28
  
- nirgends dichte Menge, 12
- normierter Raum, 13
- Normkonvergenz, 19
- Nullraum eines linearen Operators, 21
  
- obere Schranke, 23
- offene Überdeckung, 9
- offene Abbildung, 22
- offene Kugel, 8
- offene Menge, 9
- Open Mapping Theorem, 22
  
- partiell geordnete Menge, 23
- präkompakte Menge, 9
- Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, 18
  
- Radikal, 30
- Raum der maximalen Ideale, 29
- reflexiver Raum, 24
- Reihe, 14
- relativ kompakte Menge, 9
- Resolventenmenge, 27
- Riesz'sches Darstellungstheorem, 18
- Riesz'sches Lemma, 18
  
- Satz über die ausreichende Anzahl von Funktionalen, 24
- schwach konvergente Punktfolge, 25
- schwache Konvergenz, 19
- Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung, 8
- separabler metrischer Raum, 9
- Skalarprodukt, 14
- Spektralradius, 28
- Spektrum, 27
- starke Konvergenz, 19
- stetig invertierbarer Operator, 21
- stetige Abbildung, 10
- stetige Einbettung, 26
- sublineares Funktional, 23
- Summe einer Reihe, 14
  
- Theorem vom abgeschlossenen Graphen, 21
- Theorem von Hahn-Banach, 24
- theorem von Liouville, 44
- Theorem von Zermelo, 23
- topologischer Raum, 29
- Treppenfunktion, 37
  
- unitärer Raum, 14
  
- Verschiebungsoperator, 36
- Vervollständigung, 13
- vollständiger metrischer Raum, 9
- vollstetiger Operator, 34
  
- Zermelo, Lemma von, 23
- Zermelo, Theorem von, 23
- Zorn'sches Lemma, 23