6. Übung

1. Sei $1 \le p < \infty$. Wir betrachten den Verschiebungsoperator

$$V : \ell^p \to \ell^p, \quad (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots) \mapsto (\xi_1, \xi_2, \cdots).$$

Beschreiben Sie V^*.

2. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Seien X und Y Banachräume. Dann ist $\mathcal{K}(X,Y)$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{L}(X,Y)$.

   (b) Sei Z ein weiterer Banachraum. Sind $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ und ist T oder S kompakt, so ist ST kompakt.

3. Seien X und Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ eine Folge linearer Operatoren mit $\dim R(T_n) < \infty$ und $\|T_n - T\| \to 0$. Zeigen Sie, dass dann T kompakt ist.

4. Wir betrachten den Integraloperator

$$T : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{C}[0,1], \quad (Tx)(s) = \int_0^s k(s,t)x(t)\,dt$$

mit $k \in \mathbf{C}\left([0,1]^2\right)$. Zeigen Sie, dass die Operatorgleichung

$$\lambda x - Tx = y \quad \text{mit} \quad \lambda \neq 0$$

für alle $y \in \mathbf{C}[0,1]$ eindeutig lösbar ist.

5. Zeigen Sie, dass der Operator

$$T : \ell^\infty \to \ell^\infty, \quad (\xi_n) \mapsto \left((n+1)^{-1}\xi_n\right)$$

kompakt ist.

(**Z**) Es seien X, Y, Z Banachräume und $A_n, A \in \mathcal{L}(Y,Z)$ sowie $T \in \mathcal{K}(X,Y)$. Zeigen Sie die Implikation

$$A_n \to A \quad \Rightarrow \quad \|A_nT - AT\| \to 0.$$