5. Übung, Funktionalanalysis

1. Man zeige, dass ein Operator $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ schwach konvergente Folgen in konvergente Folgen überführt.

2. Es seien $\mathbf{X}$ ein reflexiver Banachraum und $T \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ überführe schwach konvergente Folgen in konvergente Folgen. Man zeige, dass dann T kompakt ist.

3. Ist die Menge $\mathbf{X}_0 = \left\{ \xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell^\infty : |\xi_n| \le (n+1)^{-1},\ n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$ kompakt in ℓ^∞ ?

4. Man zeige, dass $\mathcal{K}(\mathbf{X})$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ ist, d.h., dass $\mathcal{K}(\mathbf{X})$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ ist und dass aus $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ und $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ folgt $TA, AT \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$.

5. Man zeige: Besitzt $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz, so besitzt $\mathbf{X}_0$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz $\mathbf{N}_\varepsilon \subset \mathbf{X}_0$.

6. Es seien $A_n, A \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ und $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Man zeige:

   Aus $A_n \longrightarrow A$ folgt $\lim_{n\to\infty} \|A_n T - AT\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Z})} = 0$.

7. Es seien $A_n, A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ und $T \in \mathcal{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$. Man zeige:

   Aus $A_n \rightharpoonup A$ folgt $TA_n \longrightarrow TA$.