Übungen zum Kurs
Funktionalanalysis

5. Übung

---

1. Es seien $(\mathbf{X}, \|.\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{X}$ und $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$. Zeigen Sie :

$$\exists\, f \in \mathbf{X}^* : f(x_n) = \alpha_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\iff \quad \exists\, M > 0 : \left|\sum_{k=1}^{n} \beta_k \alpha_k\right| \leq M \left\|\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k\right\| \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall \beta_k \in \mathbb{K}.$$

2. Es seien $\mathbf{X}$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$, $p : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional und $x_0 \in \mathbf{X}$. Zeigen Sie, dass dann ein $f \in L(\mathbf{X}, \mathbb{R})$ existiert, so dass

$$f(x_0) = p(x_0) \quad \text{und} \quad -p(-x) \leq f(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}$$

   gilt.

3. Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale normierte Raum reflexiv ist.

4. Zeigen Sie, dass

   (a) die Abbildung

$$T : \ell^1 \to (\ell^\infty)^*, \quad x = (s_n) \mapsto T_x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n, \quad y = (t_n)$$

   einen linearen isometrischen Operator definiert, welcher nicht surjektiv ist.

   (b) es keinen Isomorphismus zwischen ℓ^1 und $(\ell^\infty)^*$ gibt.