Übungen zum Kurs
Funktionalanalysis

4. Übung

1. Zeigen Sie, dass der Operator

$$\mathcal{D}_1 : \left(\mathbf{C}^{(1)}[0,1], \|.\|_\infty\right) \longrightarrow \left(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_\infty\right), \quad f \mapsto f'$$

abgeschlossen ist.

2. Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume und $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Ferner sei $\mathbf{Y}_0^* \subset \mathbf{Y}^*$ eine Menge von Funktionalen, die die Punkte von $\mathbf{Y}$ separiert, d.h., für zwei beliebige Punkte $y_1, y_2 \in \mathbf{Y}$ mit $y_1 \neq y_2$ existiert ein Funktional $f \in \mathbf{Y}_0^*$, so dass $f(y_1) \neq f(y_2)$. Zeigen Sie, dass $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ gilt, falls die Abbildung $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(Ax)$ für jedes $f \in \mathbf{Y}_0^*$ stetig ist.

3. Auf dem Raum $\mathbf{C}[0,1]$ der stetigen Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ sei eine Norm $\|.\|_0$ gegeben, so dass $(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_0)$ ein Banachraum ist und dass aus $\|f_n - f\|_0 \longrightarrow 0$, $f_n, f \in \mathbf{C}[0,1]$, folgt $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass $\|.\|_0$ zu $\|.\|_\infty$ äquivalent ist.

4. Es seien $\mathbf{X}$ ein Banachraum und $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ ein in $\mathbf{X}$ **stetig eingebetteter** Banachraum, d.h. der Einbettungsoperator $\mathcal{E} : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$, $y \mapsto y$ ist stetig. Ferner seien $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ und $Ay \in \mathbf{Y}\ \forall\, y \in \mathbf{Y}$. Zeigen Sie, dass dann $A \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ gilt.

5. Es sei $\mathbf{X}$ ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

   (a) Zeigen Sie, dass für jedes $f \in L(\mathbf{X}, \mathbb{K})$ ein $x_0 \in \mathbf{X}$ existiert, so dass jedes $x \in \mathbf{X}$ in der Form $x = \alpha x_0 + x_1$ mit $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x_1 \in N(f)$ dargestellt werden kann. Ist diese Darstellung bei gewählten f und x_0 eindeutig?

   (b) Seien $f, g \in L(\mathbf{X}, \mathbb{K})$ und $N(f) \subset N(g)$. Zeigen Sie, dass dann ein $\gamma \in \mathbb{K}$ existiert mit $g(x) = \gamma f(x)$ für alle $x \in \mathbf{X}$.