Übungen zum Kurs
Funktionalanalysis

3. Übung

1. Sind folgende Operatoren linear und stetig? Berechnen Sie gegebenenfalls deren Norm.
   (a) $V : \ell^p \longrightarrow \ell^p, \quad (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$
   (b) $\mathcal{J} : \mathbf{C}[0,1] \longrightarrow \mathbf{C}[0,1], \quad f(t) \mapsto \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau$
   (c) $\mathcal{D}_0 : \mathbf{C}^{(1)}[0,1] \longrightarrow \mathbf{C}[0,1], \quad f \mapsto f'$
   (d) $\mathcal{D}_1 : \left(\mathbf{C}^{(1)}[0,1], \|.\|_\infty\right) \longrightarrow \mathbf{C}[0,1], \quad f \mapsto f'$
   (e) $T : \mathbf{C}[0,1] \longrightarrow \mathbf{C}[0,1], \quad (Tf)(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s)\, ds, \quad k : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig.
2. Ist $f : c_{00} \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ \xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \mapsto \sum\limits_{n=0}^\infty \xi_n$ ein lineares stetiges Funktional?
3. Kann beim Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit auf die Vollständigkeit des Raumes $\mathbf{X}$ verzichtet werden?
4. Die Zahlen $\lambda_{n,k} \in \mathbb{C}$ und $t_{n,k} \in [0,1]$ mit $k = 1, 2, \ldots, n$ und $n \in \mathbb{N}$ mögen folgende Eigenschaften erfüllen:
   (i) $\sup \left\{ \sum\limits_{k=1}^n |\lambda_{n,k}| : n = 1, 2, \ldots \right\} < \infty\,,$
   (ii) $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_{n,k}\, p(t_{n,k}) = \int_0^1 p(t)\, dt$ für jedes Polynom $p(t)$, dessen Grad kleiner n.

   Man zeige, dass dann
   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} f(t_{n,k}) = \int_0^1 f(t)\, dt$$
   für jede stetige Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt.

(**Z**) Unter welchen Voraussetzungen an die Zahlen $\alpha_{jk}\,,\ j,k = 0,1,2,\ldots\,,$ ist der Operator

$$A : \ell^p \longrightarrow \ell^q\,, \quad \xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \mapsto \left(\sum_{k=0}^\infty \alpha_{nk} \xi_k \right)_{n=0}^\infty \quad \text{mit} \quad 1 \le p, q \le \infty$$

stetig?

(**Z**) Zeigen Sie, dass die normierten Räume $(c_{00})^*$ und ℓ^1 zueinander isometrisch isomorph sind.