Übungen zum Kurs
Funktionalanalysis

2. Übung

1. Zeigen Sie, dass man auf jedem metrischen Raum $(\mathbf{X}, d)$ eine äquivalente (d.h., dieselbe Konvergenz definierende) Metrik $d_0 : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren kann, so dass $(\mathbf{X}, d_0)$ ein beschränkter metrischer Raum ist.

2. Es seien $\mathbf{X}$ ein metrischer Raum und $A \subset \mathbf{X}$. Zeigen Sie: Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz zu A, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ auch ein endliches ε-Netz zu A, welches nur Punkte aus A enthält.

3. Beweisen Sie: In jedem vollständigen metrischen Raum $\mathbf{X}$ ist eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ genau dann präkompakt, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz zu A existiert.

4. Es sei $(\mathbf{X}, d)$ ein metrischer Raum. Für $x \in \mathbf{X}$, nichtleere Mengen $A \subset \mathbf{X}$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir

   $$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\} \quad \text{und} \quad U_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbf{X} : d(x, A) < \varepsilon\} .$$

   Zeigen Sie, dass

   (a) $U_\varepsilon(A)$ eine offene Menge ist,

   (b) $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} U_\varepsilon(A) = \overline{A}$ gilt,

   (c) $U_{\varepsilon_1}(U_{\varepsilon_2}(A)) \subset U_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(A)$ gilt,

   (d) für festes $A \subset \mathbf{X}$ die Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$ eine gleichmäßig stetige Abbildung ist.

   (Z) Auf $\mathcal{H} = \{A \subset \mathbf{X} : A \neq \emptyset, \text{beschränkt}, \text{abgeschlossen}\}$ definieren wir

   $$d_{\mathcal{H}}(A, B) := \inf\{\varepsilon :\ \varepsilon > 0,\ A \subset U_\varepsilon(B),\ B \subset U_\varepsilon(A)\} .$$

   Man zeige, dass $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ ein metrischer Raum ist und dass

   $$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\right\} = \sup_{x\in M} |d(x, A) - d(x, B)|$$

   für jedes $M \subset \mathbf{X}$ mit $A \cup B \subset M$ gilt. (Die Metrik $d_{\mathcal{H}}$ wird **Hausdorff-Abstand** genannt.)

5. Zeigen Sie, dass die Abschließung eines linearen Teilraumes eines normierten Raumes wieder ein linearer Teilraum ist.

6. Wir betrachten die Menge der Äquivalenzklassen $\mathcal{X}$, wie wir sie bei der Vervollständigung eines metrischen Raumes definiert haben, im Fall eines Raumes mit Skalarprodukt. Wie ist das Skalarprodukt zweier solcher Äquivalenzklassen zu definieren, so dass die Vervollständigung wieder ein Raum mit Skalarprodukt, also ein Hilbertraum ist? Zeigen Sie, dass diese Definition korrekt ist und tatsächlich das Skalarprodukt liefert, welches zur gegebenen Metrik passt.