Übungen zum Kurs
Funktionalanalysis

1. Übung

1. Zeigen Sie, dass jeder Teilraum eines separabel metrischen Raumes separabel ist.

2. Sei $\mathbf{X}$ ein normierter Raum über dem Skalarkörper $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

   (i) $\mathbf{X}$ ist separabel

   (ii) es existiert eine abzählbare Menge A mit $\mathbf{X} = \overline{\operatorname{span} A}$.

3. Wir betrachten den Raum

$$\mathbf{c}_{00} := \left\{\xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \, : \, \xi_n \in \mathbb{C}, \exists\, N = N(\xi) \text{ mit } \xi_n = 0 \ \forall n > N\right\}$$

   mit der Metrik

$$d_\infty(\xi, \eta) = \sup_{n=0,1,2,\cdots} |\xi_n - \eta_n|.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{c}_{00}$ nicht vollständig ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{c}_{00}$ separabel ist.

   (c) Was ist die Abschließung von $\mathbf{c}_{00}$ in ℓ^∞?

4. Zeigen Sie, dass die im Beispiel 0.5 aufgelisteten Räume separable Banachräume sind.

5. Zeigen Sie, dass in einem normierten Raum $\mathbf{X}$ die Norm genau dann durch ein Skalarprodukt induziert wird, wenn die Parallelogrammgleichung

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbf{X}$$

   gilt.

6. Gilt in den Räumen aus Beispiel 0.5 die Parallelogrammgleichung?

7. Welche Inklusionen gelten zwischen den ℓ^p-Räumen $(1 \leq p \leq \infty)$?

8. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty \quad \forall x \in \ell^1$$

   gilt.