Prüfungsfragen
zur Vorlesung Funktionalanalysis, WS 2011/2012

- Was besagt der Baire'sche Kategoriensatz? Geben Sie eine Beweisskizze (Satz 0.11 mit Satz 0.10).

- Beschreiben Sie die Vervollständigung eines metrischen Raumes (Satz 0.14 mit Beweis und Definition 0.15). Wie kann man die gewonnenen Aussagen zur Vervollständigung normierter Räume und von Räumen mit Skalarprodukt verwenden?

- Erläutern Sie die Begriffe des normierten Raumes und des Banachraumes. Formulieren Sie eine äquivalente Bedingung für die Vollständigkeit eines normierten Raumes und beweisen Sie die Äquivalenz (Satz 0.21).

- Was versteht man unter einem linearen und beschränkten Operator zwischen zwei normierten Räumen? Geben Sie äquivalente Definitionen an und beweisen Sie die Äquivalenz (Satz 1.1).

- Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ein Banachraum ist, falls $\mathbf{Y}$ ein Banachraum ist (Satz 1.2).

- Welche Konvergenzbegriffe für Operatorfolgen kennen Sie? Beweisen Sie mit Hilfe des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit (Theorem 1.7) den Satz von Banach-Steinhaus (Satz 1.9).

- Erläutern Sie den Begriff der stetigen Invertierbarkeit eines linearen Operators. Warum ist die Teilmenge $G\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ der stetig invertierbaren Operatoren eine offene Menge in $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ (Satz 1.12 und Folgerung 1.13)?

- Schließen Sie aus dem Theorem vom abgeschlossenen Graphen (Theorem 1.16) den Satz von Banach (Satz 1.17).

- Erläutern Sie die Konstruktion des Faktorraumes $\mathbf{X}/\mathbf{M}$ eines normierten Raumes $\mathbf{X}$ bezüglich eines abgeschlossenen Teilraumes $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ und zeigen Sie, dass die Faktorabbildung stetig und offen ist und dass der Faktorraum ein Banachraum ist, falls $\mathbf{X}$ ein Banachraum ist (Satz 1.19).

- Was besagt das Zornsche Axiom? Beweisen Sie das Zornsche Lemma (Lemma 1.23).

- Was besagt das Theorem von Hahn-Banach (Theoreme 1.26 und 1.27)? Beweisen Sie, dass jedes lineare stetige Funktional über einem linearen Teilraum eines normierten Raumes $\mathbf{X}$ unter Beibehaltung der Norm zu einem linearen stetigen Funktional über $\mathbf{X}$ fortgesetzt werden kann (Folgerung 1.28).

- Was besagt der Satz über die ausreichende Anzahl von Funktionalen (Folgerung 1.30)? Zeigen Sie, dass

  $$\|x\|_{\mathbf{X}} = \sup \{|f(x)| : f \in \mathbf{X}^*, \, \|f\|_{\mathbf{X}^*} \leq 1\}$$

  für alle $x \in \mathbf{X}$ gilt (Folgerung 1.31).

- Was versteht man unter einem reflexiven normierten Raum? Nennen Sie zwei Beispiele für reflexive normierte Räume und ein Beispiel für einen nicht reflexiven normierten Raum. Begründen Sie Ihre Aussagen (vgl. Beispiel 1.5).

- Zeigen Sie, dass im Falle eines separablen Banachraumes $\mathbf{X}$ jede beschränkte Folge von Funktionalen aus $\mathbf{X}^*$ eine *schwach konvergente Teilfolge besitzt (Satz 1.41).

- Zeigen Sie, dass jede beschränkte Folge eines reflexiven normierten Raumes eine schwach konvergente Teilfolge besitzt (Satz 1.43).
- Erläutern Sie die Begriffe Banachalgebra und kommutative Banachalgebra sowie Resolventenmenge und Spektrum eines Elementes einer Banachalgebra. Warum ist das Spektrum eines Elementes einer Banachalgebra stets nichtleer (Satz 2.6) und abgeschlossen (Satz 2.4, (e))?
- Erläutern Sie die Begriffe des maximalen Ideals und des multiplikativen Funktionals in kommutativen Banachalgebren. Welche Zusammenhänge zwischen beiden Begriffen kennen Sie (Beispiel 2.9, Lemma 2.11)? Begründen Sie wenigstens einen dieser Zusammenhänge.
- Zeigen Sie, dass das Spektrum eines Elementes einer kommutativen Banachalgebra mit der Menge der Werte aller multiplikativen Funktionale auf diesem Element zusammenfällt (Satz 2.12).
- Zeigen Sie, dass jedes maximale Ideal abgeschlossen ist und dass jedes multiplikative Funktional stetig mit Norm ≤ 1 ist (Satz 2.13,(a),(b)).
- Wie definiert man den adjungierten Operator A^* zu $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$? Zeigen Sie, dass A^* linear und stetig ist und dass die Normen von A und A^* gleich sind (Lemma 3.1).
- Zeigen Sie, dass stets $R(A) \subset {}^{\perp}N(A^*)$ gilt und dass im Fall $N(A) = \{\Theta\}$ das Bild $R(A)$ genau dann abgschlossen ist, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert mit
$$\|x\|_{\mathbf{X}} \le c \, \|Ax\|_{\mathbf{Y}} \quad \forall \, x \in \mathbf{X}$$
(Lemma 3.5).
- Zeigen Sie, dass der adjungierte Operator eines kompakten Operators stets kompakt ist (Satz 3.12).
- Zeigen Sie, dass der Bildraum $R(A)$ für $A = I - T$, $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$, stets abgeschlossen ist (Theorem 3.16).
- Zeigen Sie, dass das Spektrum eines kompakten Operators in einem Banachraum höchstens aus der Null und abzählbar vielen Eigenwerten, die sich nur in der Null häufen können, besteht (Theorem 3.20).
- Definieren Sie den metrischen Raum $(\mathbf{S}[0,1], \rho)$ der Lebesque-messbaren Funktionen und zeigen Sie, dass die Konvergenz in $\mathbf{S}$ die Konvergenz dem Maße nach ist (Satz 4.2).
- Beweisen Sie die Vollständigkeit von $(\mathbf{S}[0,1], \rho)$ (Satz 4.3).

Folgende **Übungsaufgaben** und **Beispiele** gehen in die Prüfung ein:

- Übungsaufgaben:

  Abschnitt 0.6 (1. Übung), Aufgaben 2 ($\ell^p, \mathbf{c}, \mathbf{c}_0, \mathbf{C}[0,1]$), 3, 5 , 8, 11
  Abschnitt 1.3 (2. Übung), Aufgaben 1, 2 (a)–(d), 3, 4, 5
  Abschnitt 1.9 (3. Übung), Aufgaben 1 – 7
  Abschnitt 2.3 (4. Übung), Aufgaben 1 – 4
  Abschnitt 3.6 (5. Übung), Aufgaben 1 – 7

- Beispiele: 1.3, 1.5, 1.20, 1.21, 2.2, 2.3, 2.8, 2.9, 3.10, 3.19