Prüfungskomplexe zur Vorlesung
Vertiefende Kapitel zur Funktionalanalysis

1. (a) Definieren Sie den Begriff des Fredholmoperators und formulieren Sie den Satz zur Fredholm'schen Alternative. (Satz 1.1)

   (b) Definieren Sie die Begriffe des (stetiger) Projektor und direkte Summe von Teilräumen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen beiden Begriffen? (Lemma 1.2 und Folgerung 1.3 mit Beweis) Wann besitzt ein linearer Teilraum ein direktes Komplement? (Lemma 1.4 und Lemma 1.7 mit Beweis)

   (c) Formulieren und beweisen Sie Eigenschaften der Menge $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ der Fredholmoperatoren. (Satz 1.16, Folgerung 1.17, Satz 1.18, Satz 1.19)

2. (a) Definieren Sie die Begriffe Banachalgebra, Spektrum und Resolventenmenge. Beweisen Sie Eigenschaften des Spektrums eines Elementes eines Banachalgebra. (Sätze 2.4, 2.5, 2.6)

   (b) Erläutern Sie die Zusammenhänge zwischen multiplikativen Funktionalen, maximalen Idealen ind Spektren. (Lemma 2.7, Theorem 2.12 und Satz 2.13 mit Beweis)

   (c) Erläutern Sie die Konstruktion und Eigenschaften der Gelfand-Transformation. (Abschnitt 2.3 ohne Beweise)

3. (a) Beweisen Sie die Eigenschaften des Spektrums von Elementen einer C^*-Algebra. (Satz 2.19, Satz 2.22, Folgerung 2.23, Satz 2.24)

   (b) Zeigen Sie, dass eine C^*-Teilalgebra eine C^*-Algebra invers abgeschlossen ist. (Satz 2.25)

4. (a) Definieren Sie den von $a \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{T})$ erzeugten Laurent-, Toeplitz- und Hankeloperator.

   (b) Beweisen Sie die Eigenschaften (TH1), (TH2), (T1), (T2), (H), (TC1) und (TC2) sowie (F1).

5. (a) Erläutern Sie das lokale Prinzip von Gohberg-Krupnik. Beweisen Sie, dass ein Element aus $\mathrm{Com}\,\mathcal{M}$ genau dann invertierbar ist, wenn es lokal invertierbar bezüglich jeder lokalisierenden Klasse einer überdeckenden Familie $\mathcal{M}$ solcher KLassen ist. (Satz 2.29,(1))

   (b) Wie wendet man dieses lokale Prinzip auf die Algebra $\mathrm{alg}\mathcal{T}(\mathbf{C})$ an?

   (c) Beweisen Sie (TF1), (TF2) und (TF3).

6. (a) Zeigen Sie, dass im Fall einer kommutativen C^*-Algebra die Gelfand-Transformation ein isometrischer *-Isomorphismus ist. (Satz 2.32)

   (b) Beweisen Sie, dass jedes abgeschlossene Ideal eine C^*-Algebra ein *-Ideal ist. (Folgerung 2.35)

   (c) Zeigen Sie, dass die Faktoralgebra einer C^*-Algebra bezüglich eines abgeschlosenen Ideals selbst eine C^*-Algebra ist. (Folgerung 2.36)

Bitte wenden!

7. (a) Erläutern Sie die partielle Ordnung in der Menge der selbstadjungierten Elemente einer C^*-Algebra und beweisen Sie deren Eigenschaften. (Folgerung 3.4)
   (b) Beweisen Sie die besonderen Eigenschaften von *-Homomorphismen zwischen C^*-Algebren. (Satz 3.5)
   (c) Zeigen Sie, dass jedes positive lineare Funktional beschränkt und symmetrisch ist. Wie lautet die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung für positive lineare Funktionale? (Sätze 3.7 und 3.8)
   (d) Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, dass ein lineares Funktional positiv ist. (Folgerung 3.9 und Satz 3.10 mit Beweis)

8. (a) Erläutern Sie die Begriffe Darstellung, treue Darstellung und zyklische Darstellung einer C^*-Algebra. Zeigen Sie, dass eine zyklische Darstellung nicht entartet ist. (Lemma 3.11)
   (b) Formulieren und beweisen Sie den Satz von Gelfand/Naimark/Segal. (Satz 3.12)
   (c) Wie ist die direkte Summe einer Familie von Darstellungen definiert. Zeigen Sie, dass jede C^*-Algebra isometrisch *-isomorph zu einer C^*-Algebra linearer und stetiger Operatoren auf einem Hilbertraum ist. (Satz 3.14)