

Skript zur Vorlesung
Randintegralmethoden

WS 2008/09

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

1	Einiges aus der Funktionentheorie	5
1.1	Holomorphe und harmonische Funktionen	5
1.2	Cauchyscher Integralsatz	6
1.3	Identitätssatz, Gebietstreue, Maximumprinzip	8
1.4	Laurentreihenentwicklung, Residuensatz, Argumentprinzip	9
1.5	Konforme Abbildungen	10
2	Randwerte Cauchyscher Integrale	11
3	Randwertprobleme der Funktionentheorie	17
3.1	Das Hilbertsche Randwertproblem	17
3.2	Das Riemann-Hilbertsche Randwertproblem	20
3.3	Ein Sickerproblem	21
3.4	Das Doppelschichtpotential	26
3.5	Die Tangentialableitung des Einfachschichtpotentials	34
4	Die Integralgleichungsmethode	35
4.1	Singularitätenfunktionen	35
4.2	Das Einfachschichtpotential	36
4.3	Die Dirichlet-RWA und das Einfachschichtpotential	38
4.4	Ein Integraloperator mit logarithmischer Singularität	40
4.5	Die Neumann-RWA und das Einfachschichtpotential	43
4.6	Das Doppelschichtpotential	44
4.7	Die Dirichlet-RWA und das Doppelschichtpotential	48
4.8	Die Neumann-RWA und das Doppelschichtpotential	49
4.9	Hypersinguläre Integrale	49

Kapitel 1

Einiges aus der Funktionentheorie

1.1 Holomorphe und harmonische Funktionen

Mit \mathbb{C} bezeichnen wir die Menge der komplexen Zahlen und mit $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge.

Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt im Punkt $z_0 \in G$ **komplex differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert und endlich ist. Die Funktion f nennt man in G **holomorph** (bzw. analytisch), wenn sie in jedem Punkt $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist. Sie heißt im Punkt $z_0 \in G$ holomorph (bzw. analytisch), wenn sie in einer Umgebung $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\} \subset G$ (für ein $\varepsilon > 0$) des Punktes z_0 holomorph ist.

Satz 1.1 *Hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit gegebenen $a_n \in \mathbb{C}$ den Konvergenzradius*

$r > 0$, so ist die Funktion $f : U_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ holomorph, und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad \forall z \in U_r(z_0).$$

Satz 1.2 *Ist die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ im Punkt $z_0 \in G$ holomorph, so lässt sie sich in diesem Punkt in eine Potenzreihe entwickeln, d.h. es existiert ein $r > 0$, so dass*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in U_r(z_0) \tag{1.1}$$

mit eindeutig bestimmten $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, nämlich $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, gilt.

Jede Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ können wir als Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ betrachten und außerdem in der Form

$$f(z) = u(x, y) + \mathbf{i}v(x, y) \quad \text{mit} \quad z = x + \mathbf{i}y \in G$$

schreiben, wobei $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen auf $G \subset \mathbb{R}^2$ sind und wir die komplexe Zahlenebene \mathbb{C} mit dem zweidimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^2 identifizieren.

Satz 1.3 *Die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ (reell) differenzierbar ist und Real- sowie Imaginärteil von f auf G den Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2)$$

genügen.

Es zeigt sich, dass jede holomorphe Funktion automatisch unendlich oft differenzierbar ist. Aus den Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen (1.2) folgt dann, dass sowohl Real- als auch Imaginärteil von f **harmonische** Funktionen sind, d.h. es gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{und} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{auf} \quad G. \quad (1.3)$$

Ist umgekehrt $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, d.h. sie ist mindestens zweimal stetig differenzierbar und genügt auf G der ersten der beiden Gleichungen (1.3), so existiert eine bis auf eine (reelle) Konstante eindeutig bestimmte (harmonische) Funktion $v : G \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f = u + \mathbf{i}v : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. Die Funktion v heißt zu u **konjugiert harmonisch**.

Beispiel 1.4 *Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $(x, y) \mapsto \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ist harmonisch. Da die Funktion $f(z) = \ln |z| + \mathbf{i}\varphi$ (mit $z = |z|e^{\mathbf{i}\varphi}$, $-\pi < \varphi < \pi$) in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ bekanntlich holomorph ist (mit $f'(z) = z^{-1}$), müsste die zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x, y)$ bis auf eine additive reelle Konstante gleich $v(x, y) = v(z) = \varphi$ sein. Diese Funktion lässt sich aber nicht auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig fortsetzen, so dass u auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ keine konjugiert harmonische Funktion besitzt.*

1.2 Cauchyscher Integralsatz

Auch hier sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge der komplexen Zahlen.

Unter einem **Weg** γ in G verstehen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ des Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Der Weg γ heißt stückweise glatt, wenn die Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ stückweise stetig differenzierbar ist und mit eventueller Ausnahme höchstens endlich vieler Punkte $|\gamma'(t)| \neq 0$, $t \in [a, b]$, gilt. Für einen stückweise glatten Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ nennt man $\Gamma := \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ eine **stückweise glatte Kurve**. Diese Kurve heißt **doppelpunktfrei**, wenn $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ injektiv ist, und **geschlossen**, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.

Es seien nun $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Kurve und $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist das Kurvenintegral von f entlang des Weges γ bzw. entlang der Kurve Γ definiert durch

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Wir formulieren den Cauchyschen Integralsatz für die folgende Situation: Es seien Γ_j , $j = 0, 1, \dots, m$, stückweise glatte, doppelpunktfreie und geschlossene Kurven ($m = 0$ ist zugelassen), wobei die Kurve Γ_0 so orientiert ist, dass das von ihr begrenzte und beschränkte Gebiet links liegt, bei den restlichen Kurven dagegen rechts. Die einzelnen Kurven mögen sich nicht überschneiden und die Kurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ mögen innerhalb von Γ_0 liegen, aber kein Γ_j innerhalb einer anderen Kurve Γ_k , $k = 1, \dots, m$. Die Abbildung 1.1 zeigt eine mögliche Situation im Fall $m = 2$.

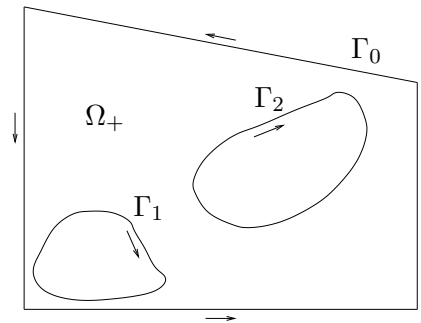


Abbildung 1.1

Das Gebiet, welches links von allen Kurven Γ_j , $j = 0, 1, \dots, m$, liegt, bezeichnen wir mit Ω_+ , die Vereinigung $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$ aller Kurven mit Γ und $\mathbb{C} \setminus (\Omega_+ \cup \Gamma)$ mit Ω_- . Ferner sei

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \sum_{j=0}^m \int_{\Gamma_j} f(z) dz.$$

Satz 1.5 (Cauchyscher Integralsatz, Cauchysche Integralformel) *Wir nehmen an, dass $f : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f : \Omega_+ \cup \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ stetig sind. Dann gilt*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \begin{cases} f(a) & , a \in \Omega_+ , \\ 0 & , a \in \Omega_- . \end{cases}$$

Für die Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung (1.1) einer in z_0 analytischen Funktion ergibt sich die **Cauchysche Koeffizientenformel**

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{\rho}(z_0)} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei $0 < \rho < r$. Der Kreis $\partial U_{\rho}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ ist dabei als mathematisch positiv orientiert zu betrachten.

Eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion nennt man **ganze Funktion**.

Satz 1.6 (Liouville) *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Der folgende Satz stellt eine Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes dar.

Satz 1.7 (Morera) *Ist die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und gilt für jede in G liegende Dreiecksfläche mit dem Rand $\Gamma \subset G$*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

so ist f holomorph in G .

Satz 1.8 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) *Es seien $G \subset \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $[a, b] = \overline{G} \cap \mathbb{R}$ (siehe Abbildung 1.2), $f : G \cup (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f(x) \in \mathbb{R} \forall x \in (a, b)$. Dann ist*

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & : \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \overline{f(\bar{z})} & : \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

auf $\tilde{G} := G \cup (a, b) \cup \{z : \bar{z} \in G\}$ holomorph.

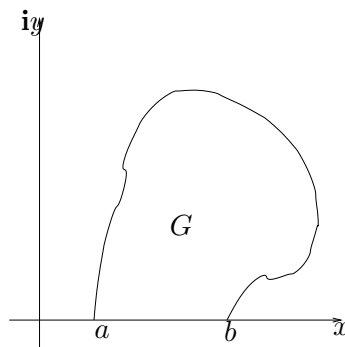


Abbildung 1.2

1.3 Identitätssatz, Gebietstreue, Maximumprinzip

Unter einem **Gebiet** verstehen wir eine offene und zusammenhängende Menge $G \subset \mathbb{C}$.

Satz 1.9 (Identitätssatz) *Sind f und g zwei auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, die auf einer Teilmenge von G , die wenigstens einen Häufungspunkt in G besitzt, übereinstimmen, so sind f und g auf dem gesamten Gebiet G identisch.*

Satz 1.10 (Gebietstreue) *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem Gebiet G holomorph und nicht konstant, so ist auch $f(G) := \{f(z) : z \in G\}$ ein Gebiet.*

Satz 1.11 (Maximumprinzip) *Ist f auf dem Gebiet G holomorph und **nicht** konstant, so existiert **kein** Punkt $z_0 \in G$ mit der Eigenschaft*

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in G.$$

Ist also zusätzlich $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so kann $|f(z)|$ nur auf dem Rand von G sein Maximum annehmen.

Satz 1.12 (Schwarzsches Lemma) *Es seien $f : U_1(0) \rightarrow U_1(0)$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in U_1(0)$. Existiert ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $|f(z_0)| = |z_0|$ oder ist $|f'(0)| = 1$, so ist f einfach eine Drehung um einen Winkel $\theta \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt $f(z) = e^{i\theta}z$ für alle $z \in U_1(0)$.*

1.4 Laurentreihenentwicklung, Residuensatz, Argumentprinzip

Ist f in $U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ holomorph, so heißt z_0 **isolierte Singularität** von f . Für $0 \leq r < R$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $K_{r,R}(z_0)$ den Kreisring $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.

Satz 1.13 (Laurentreihenentwicklung) *Ist f im Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ holomorph, so ist*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n := \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (1.4)$$

für alle $z \in K_{r,R}(z_0)$, wobei für jedes ρ mit $r < \rho < R$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{U_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

gilt.

Sind z_0 eine isolierte Singularität von f und (1.4) die Laurentreihenentwicklung von f in einer punktierten Kreisscheibe $K_{0,R}(z_0)$, so nennt man den Koeffizienten $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{U_\rho(z_0)} f(z) dz$ Residuum der Funktion f im Punkt z_0 , $c_{-1} =: \text{res}_{z_0} f$.

Satz 1.14 (Residuensatz) *Es seien f in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten holomorph, $\Gamma \subset G$ eine doppelpunktfreie, stückweise glatte, geschlossene Kurve, auf der keine Singularität von f liegt und innerhalb derer (auf der linken Seite von Γ , Orientierung beachten) die isolierten Singularitäten z_1, \dots, z_m von f liegen. Dann gilt*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{res}_{z_k} f.$$

Die isolierte Singularität z_0 von f heißt **Pol der Ordnung** k von f ($k > 0$), wenn in (1.4) $c_{-k} \neq 0$ und $c_n = 0$ für alle $n < -k$ gilt. Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ bis auf Pole holomorph, so heißt f in G **meromorph**.

Satz 1.15 (Argumentprinzip) *Es seien f in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G meromorph und $\Gamma \subset G$ eine doppelpunktfreie, stückweise glatte, geschlossene Kurve, auf der keine Nullstellen und Pole von f liegen und die so orientiert ist, dass das von ihr begrenzte und beschränkte Gebiet links liegt. Ferner seien N und P die (entsprechend der Ordnung) Anzahlen der Nullstellen und Polstellen von f innerhalb von Γ . Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

1.5 Konforme Abbildungen

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

Eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt (**lokal**) **konform** im Punkt $z_0 \in G$, falls f in z_0 holomorph mit $f'(z_0) \neq 0$ ist. Ist f in jedem Punkt $z \in G$ lokal konform, so nennen wir f **konform im Gebiet G** .

Satz 1.16 (Riemannscher Abbildungssatz) *Es seien G und G^* einfach zusammenhängende, echte Teilgebiete von \mathbb{C} . Dann gibt es eine konforme Abbildung $f : G \rightarrow G^*$, die außerdem bijektiv ist.*

Satz 1.17 (Ränderzuordnung) *Die Ränder der Gebiete G und G^* seien einfache (d.h. doppelpunktfreie) geschlossene stetige (d.h. durch einen Weg gegebene) Kurven, und $f : G \rightarrow G^*$ sei konform und bijektiv. Dann ist f auf \overline{G} stetig fortsetzbar, und $f : \overline{G} \rightarrow \overline{G^*}$ ist bijektiv.*

Kapitel 2

Randwerte Cauchyscher Integrale

Nach dem Cauchyschen Integralsatz 1.5 gilt für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$ und für eine stetige Funktion $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$, die auf Ω holomorph ist

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & : z \in \Omega. \\ 0 & : z \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Allgemeiner betrachten wir jetzt für eine absolut integrierbare Funktion $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, d.h. $\int_{\Gamma} |\varphi(\zeta)| |dz| < \infty$, die Funktion

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin \Gamma,$$

wobei Γ eine doppelunktfreie und stückweise glatte Kurve ist. Wir definieren $\Phi(\zeta_0)$ auch für $\zeta_0 \in \Gamma^\circ$ unter Verwendung des Cauchyschen Hauptwertes

$$\Phi(\zeta_0) = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\Gamma \setminus U_\varepsilon(\zeta_0)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad \zeta \in \Gamma^\circ.$$

Dabei verstehen wir unter Γ° die Kurve Γ ohne die Endpunkte (im Fall einer nicht geschlossenen Kurve) und die Punkte, in denen Γ nicht glatt ist.

Beispiel 2.1 Wir berechnen $\Phi(z)$ für $\Gamma = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und erhalten für $\operatorname{Im} z_0 > 0$ (vgl. Abbildung 2.1)

$$\Phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{b - z_0}{a - z_0} \right| + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2\pi}$$

sowie für $\operatorname{Im} z_0 < 0$ (vgl. Abbildung 2.2)

$$\Phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{b - z_0}{a - z_0} \right| + \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2\pi}.$$

Für $\zeta_0 \in (a, b)$ und $z \rightarrow \zeta_0$, $\operatorname{Im} z > 0$ folgt also

$$\Phi(z) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{b - \zeta_0}{\zeta_0 - a} + \frac{1}{2} =: \Phi^+(\zeta_0)$$

und für $z \rightarrow \zeta_0$, $\operatorname{Im} z < 0$

$$\Phi(z) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{b - \zeta_0}{\zeta_0 - a} - \frac{1}{2} =: \Phi^-(\zeta_0).$$

Andererseits ist $\Phi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{b - \zeta_0}{\zeta_0 - a}$, so dass

$$\Phi^+(\zeta_0) - \Phi^-(\zeta_0) = 1 \quad \text{und} \quad \Phi^+(\zeta_0) + \Phi^-(\zeta_0) = 2\Phi(\zeta_0) \quad \forall \zeta_0 \in (a, b)$$

gilt.

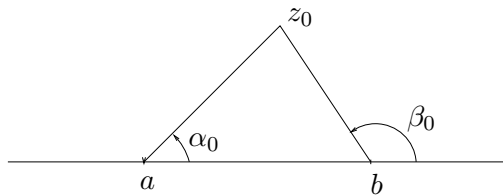


Abbildung 2.1

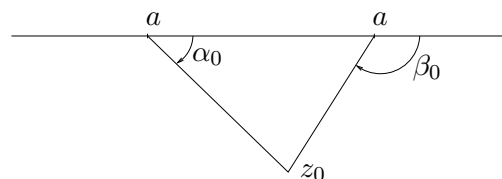


Abbildung 2.2

Satz 2.2 Ist $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar, so ist die oben definierte Funktion $\Phi(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ holomorph.

Bemerkung 2.3 Im Fall einer beschränkten Kurve Γ ist $\Phi(z)$ auch in $z = \infty$ holomorph mit $\Phi(\infty) = 0$.

Die Überlegungen aus Beispiel 2.1 lassen sich auf eine beliebige Strecke

$$\Gamma = [a, b] = \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{C}$$

und ebenso auf eine beschränkte, offene, doppeltpunktfreie Kurve $\Gamma \subset \mathbb{C}$ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b ausdehnen. Die Abbildung $f(z) = \frac{z - b}{z - a}$ bildet dabei Γ auf einen (i.a. krummlinigen) Strahl $f(\Gamma)$ von ∞ nach 0 ab. Das Äußere einer Kreisscheibe, die Γ enthält und symmetrisch zu Strecke $[a, b]$ liegt, wird dabei auf das Innere eines Kreises abgebildet, der in der rechten Halbebene und symmetrisch zur reellen Achse liegt. Unter $\ln : \mathbb{C} \setminus f(\Gamma)$ wollen wir den holomorphen Zweig des natürlichen Logarithmus verstehen, der innerhalb dieses Kreises mit dem Hauptzweig des Logarithmus zusammenfällt. Wir erhalten dann

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z - b}{z - a} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \quad (2.1)$$

und

$$F^+(\zeta_0) - F^-(\zeta_0) = 1 \quad \forall \zeta_0 \in \Gamma^\circ. \quad (2.2)$$

Im Fall einer geschlossenen Kurve gilt wegen der Cauchyschen Integralformel

$$F(z) = \begin{cases} 1 & : z \in \Omega_+, \\ 0 & : z \in \Omega_-, \end{cases}$$

und somit ebenfalls (2.2).

Übungsaufgabe 2.4 Man gebe für $R_0 > 1$ das Bild der Kreisscheibe $U_R\left(\frac{a+b}{2}\right)$ mit $R = \frac{R_0|b-a|}{2}$ bei der Abbildung $f(z) = \frac{z-b}{z-a}$ an, wobei $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$.

Für das Weitere nehmen wir an, dass Γ eine glatte, doppel­punkt­freie Kurve mit Anfangspunkt a und Endpunkt b ist sowie $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ ihre Parametrisierung bzgl. der Bogenlänge, d.h. $\Gamma = \{\gamma(s) : s \in [0, L]\}$. Dabei sei außerdem vorausgesetzt, dass eine Konstante $c_1 > 0$ existiert, so dass

$$|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)| \leq |s_1 - s_2| \leq c_1 |\gamma(s_1) - \gamma(s_2)| \quad \forall s_1, s_2 \in [0, L] \quad (A)$$

gilt. Ferner sei $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar und mit evtl. Ausnahme von Anfangs- und Endpunkt der Kurve Γ lokal hölderstetig, d.h., für jedes $\zeta_0 \in \Gamma^\circ$ existieren ein $\delta > 0$, ein $\lambda \in (0, 1]$ und ein $c_0 > 0$ mit

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| \leq c_0 |\zeta - \zeta_0|^\lambda \quad \forall \zeta \in \Gamma \cap U_\delta(\zeta_0).$$

Mit $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir eine glatte Kurve von ζ_0 nach ∞ , die rechts von Γ liegt und senkrecht auf Γ steht. Ist nun $\ln(z - \zeta_0)$ ein für $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_0$ holomorpher Zweig des natürlichen Logarithmus, so gilt

$$\Phi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} [\ln(b - \zeta_0) - \ln(a - \zeta_0) + \pi i] \varphi(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \quad \forall \zeta_0 \in \Gamma^\circ, \quad (2.3)$$

wobei das Integral zumindest im uneigentlichen Sinne existiert. Im Fall einer geschlossenen Kurve Γ verschwinden die \ln -Terme in (2.3).

Satz 2.5 Sind Γ eine glatte, doppel­punkt­freie Kurve und $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar und lokal hölderstetig, so besitzt

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma,$$

in allen Punkten $\zeta_0 \in \Gamma^\circ$ nichttangente Grenzwerte $\Phi^\pm(\zeta_0)$, wobei die Formeln von **Sochozki-Plemelj**

$$\Phi^\pm(\zeta_0) = \pm \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0) + \Phi(\zeta_0) \quad (2.4)$$

gültig sind.

Nichttangentialer Grenzwert bedeutet dabei, dass z lediglich innerhalb eines Doppelsektors $W(\zeta_0, \omega)$ mit $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ gegen ζ_0 strebt, und zwar links von Γ für $\Phi^+(\zeta_0)$ und rechts von Γ für $\Phi^-(\zeta_0)$. Unter $W(\zeta_0, \omega)$ verstehen wir dabei die Menge der $z \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\}$, für die der Winkel zwischen $z - \zeta_0$ und der Geraden durch ζ_0 , die senkrecht auf Γ steht, betragsmäßig kleiner als ω ist.

Im Weiteren sei Γ glatt, doppel­punkt­frei und beschränkt. Für $\alpha \in (0, 1]$ verstehen wir unter $\mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ den Banachraum der zum Exponenten α hölderstetigen Funktionen $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Norm

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup \left\{ \frac{|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)|}{|\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha} : \zeta_1, \zeta_2 \in \Gamma, \zeta_1 \neq \zeta_2 \right\},$$

wobei $\|f\|_\infty = \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \Gamma\}$. Wir betrachten nun das folgende Randwertproblem: Gegeben sei eine Funktion $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ und gesucht eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \setminus \Gamma$, so dass

$$F(\infty) = 0 \quad \text{und} \quad F^+(\zeta) - F^-(\zeta) = \varphi(\zeta) \quad \forall \zeta \in \Gamma^\circ. \quad (2.5)$$

Wir nennen eine Funktion $F(z)$ **stückweise holomorph** bzgl. Γ , wenn $F : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist, F in $\zeta_0 \in \Gamma \setminus \Gamma_s$ von links und von rechts stetig ist und für jedes $z_0 \in \Gamma_s$ ein $\beta \in (0, 1)$, ein $\varepsilon > 0$ und ein $c > 0$ existieren, so dass

$$|F(z)| \leq \frac{c}{|z - z_0|^\beta} \quad \forall z \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma) \cap U_\varepsilon(z_0)$$

gilt. Dabei sei $\Gamma_s = \Gamma_s(F)$ eine endliche Menge von Punkten der Kurve Γ . Die Menge aller bzgl. Γ stückweise holomorphen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{H}(\Gamma)$.

Übungsaufgabe 2.6 *Man zeige: Sind $F \in \mathcal{H}(\Gamma)$ und $F^+(\zeta) - F^-(\zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in \Gamma^\circ$, so ist $F(z)$ eine ganze Funktion.*

Der folgende Satz verschärft die Aussagen des Satzes 2.5 unter der Voraussetzung, dass $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ gilt.

Satz 2.7 *Es seien $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$. Dann ist $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ stückweise holomorph bzgl. Γ , wobei $\Gamma_s(\Phi) \subset \Gamma \setminus \Gamma^\circ$ gilt. Dabei ist $\Phi(\zeta) = \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta} - \zeta} d\tilde{\zeta}$ hölderstetig mit dem Exponenten*

$$\alpha_0 = \begin{cases} \alpha & : \alpha \in (0, 1), \\ 1 - \varepsilon & : \alpha = 1, \end{cases} \quad \forall \varepsilon \in (0, 1),$$

auf jedem abgeschlossenen Teilbogen von Γ° .

Übungsaufgabe 2.8 *Man zeige, dass unter den Voraussetzungen von Satz 2.7 und $\varphi(\zeta) = 0$, $\zeta \in \Gamma \setminus \Gamma^\circ$ gilt $\Phi \in \mathbf{C}^{\alpha_0}(\Gamma)$.*

Übungsaufgabe 2.9 *Was kann man im Sinne von Satz 2.7 aussagen, wenn φ stückweise hölderstetig auf Γ ist und/oder wenn Γ stückweise glatt ist?*

Im Weiteren verstehen wir das Randwertproblem (2.5) in dem Sinne, dass wir ein $F \in \mathcal{H}(\Gamma)$ suchen, welches den Bedingungen (2.5) genügt.

Folgerung 2.10 *Das Randwertproblem (2.5) ist eindeutig lösbar, wobei*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Folgerung 2.11 *Es seien $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ und Γ geschlossen. Dann sind die Funktionswerte $\varphi(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, genau dann die Randwerte einer in Ω_+ holomorphen Funktion, wenn*

$$\int_\Gamma \varphi(\zeta) \zeta^n d\zeta = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

gilt.

Folgerung 2.12 *Unter den Voraussetzungen der Folgerung 2.11 sind $\varphi(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, genau dann die Randwerte einer in Ω_+ holomorphen Funktion, wenn*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$$

gilt.

Folgerung 2.13 *Es seien die Voraussetzungen von Folgerung 2.11 erfüllt. Die Werte $\varphi(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, sind genau dann die Randwerte einer in $(\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}) \cup \{\infty\}$ holomorphen Funktion, wenn*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \equiv \text{const} \quad \forall z \in \Omega_+$$

gilt.

Kapitel 3

Randwertprobleme der Funktionentheorie

3.1 Das Hilbertsche Randwertproblem

Es seien Γ eine geschlossene (und damit beschränkte), doppelpunktfreie, glatte Kurve und $a, b \in C^\alpha(\Gamma)$ zwei gegebene Funktionen mit $a(\zeta) \neq 0 \forall \zeta \in \Gamma$. Mit Ω_+ bezeichnen wir das von Γ berandete beschränkte Gebiet, $\Omega_- = \mathbb{C} \setminus (\Omega_+ \cup \Gamma)$. Gesucht sind zwei holomorphe Funktionen $f^+ : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{C}$ und $f^- : \Omega_- \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$, die auf $\overline{\Omega}_+$ bzw. $\overline{\Omega}_-$ stetig sind und der Bedingung

$$f^-(\zeta) = a(\zeta)f^+(\zeta) + b(\zeta) \quad \forall \zeta \in \Gamma \quad (3.1)$$

genügen. Das dazugehörige homogene Problem lautet

$$f^-(\zeta) = a(\zeta)f^+(\zeta) \quad \forall \zeta \in \Gamma. \quad (3.2)$$

Die Zahl

$$\kappa(a) = \frac{1}{2\pi} [\arg a(\zeta)]_\Gamma = \frac{1}{2\pi} [\ln a(\zeta)]_\Gamma,$$

der (stetige) Argumentzuwachs der Funktionswerte $a(\zeta)$ bei einem Durchlauf der Kurve Γ , ist wegen $a(\zeta) \neq 0$ auf Γ wohldefiniert und heißt **Index** der Funktion $a(\zeta)$. O.E.d.A. nehmen wir für das Weitere an, dass $0 \in \Omega_+$ gilt.

(I) Sei $\kappa(a) = 0$, d.h. $\ln a(\zeta)$ ist eine Funktion der Klasse $C^\alpha(\Gamma)$. Wir setzen

$$F^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln a(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_\pm, \quad (3.3)$$

und

$$f^\pm(z) = Ae^{-F^\pm(z)}, \quad z \in \Omega_\pm,$$

mit einer beliebigen Konstanten $A \in \mathbb{C}$. Mit $F(\zeta_0)$, $\zeta_0 \in \Gamma$, bezeichnen wir den Cauchyschen Hauptwert des Integrals in (2.3). Aus den Formeln von Sochozki-Plemelj (2.4) folgt

$$F^\pm(\zeta) = \pm \frac{1}{2} \ln a(\zeta) + F(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma,$$

also

$$f^\pm(\zeta) = A e^{\pm \frac{1}{2} \ln a(\zeta)} e^{-F(\zeta)},$$

so dass $a(\zeta)f^+(\zeta) = e^{\ln a(\zeta)}f^+(\zeta) = f^-(\zeta)$, d.h., $[f^-(z), f^+(z)]$ genügt (3.2). Es seien $[f_1^-(z), f_1^+(z)]$ eine weitere Lösung von (3.2) und $g^\pm(z) = \frac{f_1^\pm(z)}{f^\pm(z)}$. Dann folgt für $\zeta \in \Gamma$

$$g^-(\zeta) = \frac{f_1^-(\zeta)}{f^-(\zeta)} = \frac{a(\zeta)f_1^+(\zeta)}{a(\zeta)f^+(\zeta)} = g^+(\zeta),$$

d.h.

$$g(z) = \begin{cases} g^+(z) & : z \in \Omega_+ \\ g^-(z) & : z \in \Omega_- \end{cases}$$

ist holomorph in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Es folgt $f_1^\pm(z) = A_0 f^\pm(z)$ mit einer Konstanten $A_0 \in \mathbb{C}$. Die Lösungsmenge des homogenen Problems ist also im Fall $\kappa(a) = 0$ gleich

$$\{[A f^-(z), A f^+(z)] : A \in \mathbb{C}\},$$

wobei $f^\pm(z)$ in (3.3) definiert ist.

- (II) Sei jetzt $\kappa(a) = -n$ ($n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$). Für $a_1(\zeta) = \zeta^n a(\zeta)$ gilt dann $\kappa(a_1) = 0$. Wir suchen $f^\pm(z)$ in der Form $f^\pm(z) = f_1^\pm(z) f_2^\pm(z)$ mit $f_1^-(\zeta) = a_1(\zeta) f_1^+(\zeta)$, $\zeta \in \Omega$. Wählen wir (vgl. (I))

$$f_1^\pm(z) = e^{-F_1^\pm(z)}, \quad F_1^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln a_1(\zeta)}{\varphi - z} d\zeta,$$

so erhalten wir aus (3.2) für $f_2^\pm(z)$ die Bedingung

$$f_2^-(\zeta) = \frac{f^-(\zeta)}{f_1^-(\zeta)} = \frac{a(\zeta)f^+(\zeta)}{a_1(\zeta)f_1^+(\zeta)} = \zeta^{-n} f_2^+(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma.$$

Somit muss

$$g(z) := \begin{cases} f_2^+(z) & : z \in \Omega_+ \\ z^n f_2^-(z) & : z \in \Omega_- \end{cases}$$

in \mathbb{C} holomorph sein mit einer Polstelle in ∞ der Ordnung $\leq n$. Wir erhalten

$$f_2^+(z) = a_0 + z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{und} \quad f_2^-(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}$$

mit beliebigen Konstanten $a_k \in \mathbb{C}$.

- (III) Sei $\kappa(a) = n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $a_1(\zeta) = \zeta^{-n} a(\zeta)$ und wählen $f_1^\pm(z)$ wie in (II). Dann folgt aus (3.2) die Bedingung $f_2^-(\zeta) = \zeta^n f_2^+(\zeta)$. Somit ist

$$h(z) = \begin{cases} f_2^-(z) & : z \in \Omega_- \\ z^n f_2^+(z) & : z \in \Omega_+ \end{cases}$$

ist holomorph in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, also konstant. Da $h(0) = 0$ ist, folgt $h(z) \equiv 0$, d.h. (3.2) besitzt im Fall $\kappa(a) > 0$ nur die nichttriviale Lösung.

Satz 3.1 Für $\kappa(a) = -n \leq 0$ besitzt das Problem (3.2) $n + 1$ linear unabhängige Lösungen $[f^-(z), f^+(z)]$, die man in der Form $[z^{-k}G^-(z), z^kG^+(z)]$, $k = 0, 1, \dots, n$, mit

$$G^\pm(z) = e^{-F_1^\pm(z)}, \quad F_1^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln[\zeta^n a(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_\pm,$$

schreiben kann. Im Fall $\kappa(a) > 0$ besitzt (3.2) nur die triviale Lösung.

Im folgenden suchen wir eine spezielle Lösung für das inhomogene Problem (3.1).

(IV) Sei $\kappa(a) = -n \leq 0$. Wir suchen eine Lösung in der Form $f^\pm(z) = f_1^\pm(z)f_2^\pm(z)$, wobei wieder $f_1^\pm(z) = e^{-F_1^\pm(z)}$ sei, d.h.

$$f_1(\zeta) = a_1(\zeta)f_1^+(\zeta) \quad \text{mit} \quad a_1(\zeta) = \zeta^n a(\zeta).$$

Aus der Bedingung (3.1) folgt dann

$$\begin{aligned} f_1^-(\zeta)f_2^-(\zeta) &= a(\zeta)f_1^+(\zeta)f_2^+(\zeta) + b(\zeta) \\ &= a_1(\zeta)f_1^+(\zeta)\zeta^{-n}f_2^+(\zeta) + b(\zeta) \\ &= f_1^-(\zeta)\zeta^{-n}f_2^+(\zeta) + b(\zeta), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f_2^-(\zeta) &= \zeta^{-n}f_2^+(\zeta) + \frac{b(\zeta)}{f_1^-(\zeta)} \\ &= \zeta^{-n}f_2^-(\zeta) + e^{F_1^-(\zeta)}b(\zeta). \end{aligned}$$

Für $F_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{b(\zeta)e^{F_1^-(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ gilt nach den Formeln von Sochozki-Plemelj (2.4)

$$F_2^+(\zeta) - F_2^-(\zeta) = -b(\zeta)e^{F_1^-(\zeta)}, \quad \zeta \in \Gamma,$$

so dass wir $f_2^-(z) = F_2^-(z)$ und $f_2^+(z) = z^n F_2^+(z)$ setzen können. Wir erhalten

$$f^-(z) = \left[a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + F_2^-(z) \right] G^-(z)$$

und

$$f^+(z) = \left[a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n + z^n F_2^+(z) \right] G^+(z)$$

als allgemeine Lösung von (3.1).

(V) Sei $\kappa(a) = n > 0$. Wie eben erhalten wir

$$f_2^-(\zeta) = \zeta^n f_2^+(\zeta) + b(\zeta)e^{F_1^-(\zeta)}.$$

Aus Folgerung 2.10 ergibt sich

$$f_2^-(z) = A + F_2^-(z), \quad f_2^+(z) = z^{-n}[A + F_2^+(z)]$$

mit $A \in \mathbb{C}$. Dabei ist $f^+(z)$ genau dann in $z_0 = 0$ holomorph, wenn $A + F_2^+(z)$ in $z_0 = 0$ eine Nullstelle der Ordnung $\geq n$ hat. Für $|z| < \varepsilon$ hinreichend klein folgt

$$F_2^+(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b(\zeta)e^{F_1^-(\zeta)}}{1-\frac{z}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} b(\zeta)F_1^-(\zeta)\zeta^{-n-1} d\zeta z^n.$$

Also: Im Fall $\kappa(a) = n \in \mathbb{N}$ ist (3.1) genau dann lösbar, wenn die Bedingungen

$$\int_{\Gamma} \frac{b(\zeta)}{\zeta^{k+1}} e^{-F_1^-(\zeta)} d\zeta = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

erfüllt sind. Die Konstante A ist eindeutig bestimmt,

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b(\zeta)}{\zeta} e^{F_1^-(\zeta)} d\zeta.$$

3.2 Das Riemann-Hilbertsche Randwertproblem

- (I) Es seien Γ wie in Abschnitt 3.1 und $a, b, c \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ gegebene reellwertige Funktionen mit $[a(\zeta)]^2 + [b(\zeta)]^2 \neq 0 \forall \zeta \in \Gamma$. Gesucht sei eine in Ω_+ holomorphe Funktion $f = u + iv$, die auf $\overline{\Omega}_+$ stetig ist und der Bedingung

$$a(\zeta)u(\zeta) - b(\zeta)v(\zeta) = c(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma \tag{3.4}$$

genügt. Wir betrachten den Fall, dass $\Omega_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist, d.h.

$$\Gamma = \mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}.$$

Die Bedingung (3.4) ist äquivalent zu

$$[a(\zeta) + \mathbf{i}b(\zeta)]f(\zeta) + [a(\zeta) - \mathbf{i}b(\zeta)]\overline{f(\zeta)} = 2c(\zeta).$$

Wir setzen

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & : |z| < 1, \\ \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} & : |z| > 1. \end{cases}$$

Damit ist $F : (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \mathbb{T}$ holomorph, und es gilt

$$F^+(\zeta) = f(\zeta), \quad F^-(\zeta) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} = \overline{f(\zeta)},$$

so dass (3.4) äquivalent ist zu

$$F^-(\zeta) = A(\zeta)F^+(\zeta) + B(\zeta)$$

mit

$$A(\zeta) = -\frac{a(\zeta) + \mathbf{i}b(\zeta)}{a(\zeta) - \mathbf{i}b(\zeta)} \quad \text{und} \quad B(\zeta) = \frac{2c(\zeta)}{a(\zeta) - \mathbf{i}b(\zeta)}.$$

- (II) Gegeben sei eine reellwertige Funktion $f \in C^\alpha([a, b])$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und gesucht eine holomorphe Funktion $F = U + iV : \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$), die auf $(\overline{\mathbb{C}^+} \cup \{\infty\}) \setminus \{a, b\}$ stetig ist und

$$V(x) = \begin{cases} f(x) & : x \in (a, b) \\ 0 & : x \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \end{cases}$$

genügt. Die Funktion $F(z)$ kann durch Spiegelung holomorph auf $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus [a, b]$ fortgesetzt werden. Für $x \in (a, b)$ gilt dann

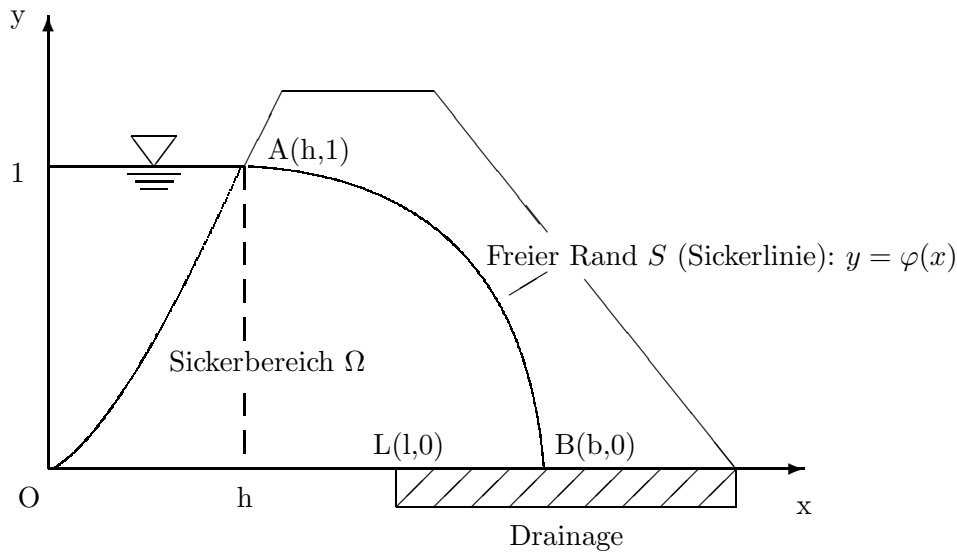
$$F^+(x) - F^-(x) = 2iV(x) = 2if(x).$$

Nach Folgerung 2.10 ist dann

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(x)}{x - z} dx + A,$$

wobei A den Wert von $F(z)$ in ∞ angibt und somit reell sein muss.

3.3 Ein Sickerproblem



Wir betrachten das ebene Problem der Durchströmung eines Staudamms aus homogenem porösen Material mit einer Drainage und einem undurchlässigen Dammboden OL (siehe Abb.). Die Dammfrent sei durch die Funktion $y = f(x)$, $0 \leq x \leq h$, mit $f(0) = 0$ und $f(h) = 1$ gegeben. Das Strömungsgebiet Ω wird begrenzt durch die Bögen AO und OB sowie den unbekannt

freien Rand BA , die Sickerlinie, welche den feuchten Teil des Damms vom trockenen trennt. Bezeichnet man mit $p(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, den Druck und mit $u(x, y) = y + \frac{p(x, y)}{\rho g}$ das modifizierte Geschwindigkeitspotential (piezometrischer Druck) mit der Dichte ρ und der Erdbeschleunigung g , so gilt nach dem Darcy'schen Gesetz $\mathbf{v} = -\gamma \operatorname{grad} u(x, y)$, wobei \mathbf{v} den Geschwindigkeitsvektor und γ den Permeabilitätskoeffizienten bezeichnen. Die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ liefert dann

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Die gesuchte, in Ω harmonische Funktion $u(x, y)$ hat folgende Randbedingungen zu erfüllen:

(R1) $u = 1$ auf dem Bogen AO , da dort $p(x, y) = \rho g(1 - y)$ ist,

(R2) $u_y = 0$ auf OL , da OL undurchlässig ist,

(R3) $u = 0$ auf LB , da freier Abfluss,

(R4) $u = y$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf dem freien Rand BA .

Es sei $v(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, eine zu $u(x, y)$ konjugiert harmonische Funktion. Aus der zweiten Bedingung in (R4) folgt, dass $v(x, y)$ auf dem Bogen BA konstant sein muss. Wir wählen

(R4') $v = 0$ auf dem Bogen BA .

Aus (R2) folgt ebenso

(R2') $v = q$ auf OL

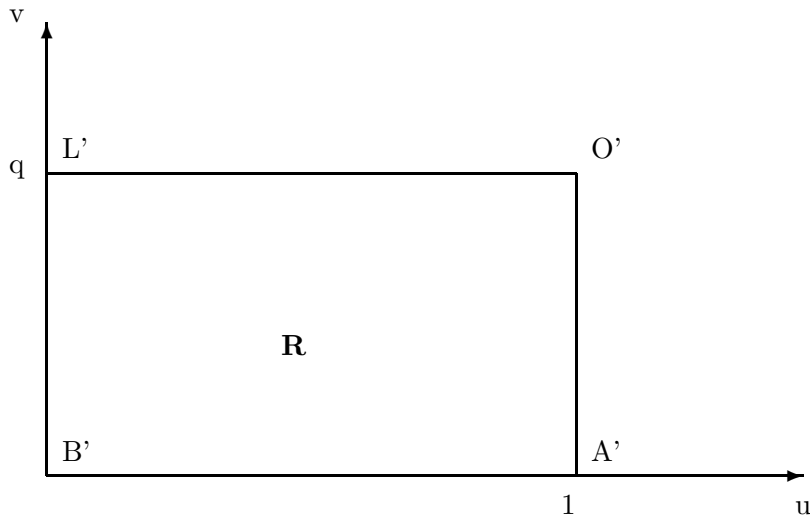
mit einer unbekanntenen Konstanten $q \in \mathbb{R}$. Das Integral

$$0 < \int_l^b u_y(x, 0) dx = - \int_l^b v_x(x, 0) dx = v(l, 0) - v(b, 0) = q$$

ist ein Maß für die Wassermenge, die durch LB fließt, so dass q , die sogenannte Durchflussrate, eine positive Konstante sein muss. Unser Problem besteht im Auffinden einer in Ω holomorphen und in $\bar{\Omega}$ stetigen Funktion $w = u + iv$, die obigen Randbedingungen genügt. Wir bestimmen das Bild $w(\partial\Omega)$. Es gilt

$$w(0) = 1 + iq, \quad w(l) = iq, \quad w(b) = 0 \quad \text{und} \quad w(h + i) = 1.$$

Das Bild von $\bar{\Omega}$ ist das in der Abbildung dargestellte Rechteck \mathbf{R} . Die Abbildung $w : BA \rightarrow [0, 1]$ ist bijektiv, wenn $\varphi(x)$, $x \in [h, b]$, stetig und streng monoton fallend ist. Auf $[0, l]$ ist offenbar $-\gamma u_x = (\mathbf{v})_x$ positiv, d.h. $u(x, 0)$ ist monoton fallend, so dass $w : OL \rightarrow O'L'$ bijektiv ist. Auf LB ist $-\gamma u_y = (\mathbf{v})_y < 0$, d.h. $v_x < 0$, so dass dort v monoton fallend und $w : LB \rightarrow L'B'$ bijektiv. Auf AO gilt $(\mathbf{v})_\nu = -\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$, so dass die tangentielle Ableitung von v , d.h. $\frac{\partial v}{\partial \tau}$, positiv und $w : AO \rightarrow A'O'$ ebenfalls bijektiv ist. Unter physikalisch sinnvollen Gesichtspunkten ist die Ränderzuordnung $w : \partial\Omega \rightarrow \partial\mathbf{R}$ also bijektiv.



Nun gilt folgender

Satz 3.2 (Prinzip des Randes) *Es seien Ω und Ω' einfach zusammenhängende Gebiete und Ω' beschränkt. Ist die Funktion $w = f(z)$ in Ω holomorph und besitzt sie stetige Randwerte auf $\partial\Omega$, die $\partial\Omega$ eindeutig auf $\partial\Omega'$ abbilden, wobei der Durchlaufsinne erhalten bleibt, so bildet $f(z)$ das Gebiet Ω konform und bijektiv auf Ω' ab.*

Mit $z(u, v) = x(u, v) + iy(u, v)$ bezeichnen wir die Umkehrabbildung zu $w : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$. Aus (R1)-(R4) folgt dann

$$(R'1) \quad y(1, v) = f(x(1, v)) \text{ für } (1, v) \in A'O',$$

$$(R'2) \quad y(u, q) = 0 \text{ für } (u, q) \in O'L',$$

$$(R'3) \quad y(0, v) = 0 \text{ für } (0, v) \in L'B',$$

$$(R'4) \quad y(u, 0) = u \text{ für } (u, 0) \in B'A'.$$

Um zu garantieren, daß A' auf A , O' auf O und L' auf L abgebildet werden, muß der Realteil $x(z)$ die zusätzlichen Bedingungen

$$(Z1) \quad x(1, 0) = h,$$

$$(Z2) \quad x(1, q) = 0,$$

$$(Z3) \quad x(0, q) = l$$

erfüllen. Wir verwenden nun eine konforme Abbildung der oberen (t, θ) -Halbebene auf das Rechteck \mathbf{R} in der (u, v) -Ebene:

$$w = u + iv = \frac{1}{2} + \frac{1}{2K(k)} F(k, \xi), \quad \xi = t + i\theta.$$

Dabei sind $0 < k < 1$ und

$$F(k, \xi) = \int_0^\xi \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}$$

das elliptische Integral erster Gattung sowie $K(k) = F(k, 1)$ das vollständige elliptische Integral erster Gattung, und es gilt

$$1 \rightarrow (0, 1) = A', \quad \frac{1}{k} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{F(k, 1/k)}{2K(k)}, \quad -\frac{1}{k} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{F(k, -1/k)}{2K(k)}, \quad -1 \rightarrow (0, 0) = B'.$$

Berücksichtigen wir die Beziehung (Subst. $s^2 = 1 - (1 - k^2)\sigma^2$)

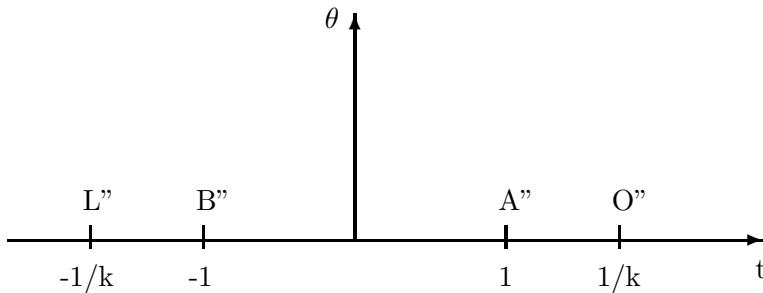
$$\int_1^{1/k} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-k^2s^2)}} = \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-(1-k^2)\sigma^2)}} = K(k'), \quad k' = \sqrt{1-k^2},$$

so erreichen wir durch die Wahl

$$q = \frac{K(k')}{2K(k)},$$

dass

$$\frac{1}{k} \rightarrow (1, q) = O' \quad \text{und} \quad -\frac{1}{k} \rightarrow (0, q) = L'.$$



Es entsteht somit folgende Aufgabenstellung: Gesucht ist eine konforme Abbildung $z = z(\xi) = x(\xi) + iy(\xi)$ der oberen Halbebene $\mathbb{C}^+ = \{\xi \in \mathbb{C} : \text{Im } \xi > 0\}$ auf das Gebiet Ω , wobei die Abbildung $z : \{\xi \in \mathbb{C} : \text{Im } \xi \geq 0\} \cup \{\infty\} \rightarrow \overline{\Omega}$ stetig ist und folgende Randbedingungen, die sich unmittelbar aus (R'1)-(R'4) und (Z1)-(Z3) ergeben, zu erfüllen sind:

$$(1) \quad y(t) = 0, \quad -\infty < t \leq -1, \quad \frac{1}{k} \leq t < \infty,$$

$$(2) \quad y(t) = f(x(t)), \quad 1 \leq t \leq \frac{1}{k},$$

$$(3) \quad y(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{K(k)} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} \right\} =: r(k, t), \quad -1 < t < 1,$$

$$(4) \quad x(-1/k) = l, \quad x(1) = h, \quad x(1/k) = 0.$$

Damit haben wir ein nichtlineares Riemann-Hilbertsches Randwertproblem erhalten (vgl. Abschnitt 2.3, Problemstellung (II)). Aus der Formel (2.5) folgt, dass sich die Lösung $z(\xi)$ in der Form

$$z(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{r(k, s) ds}{s - \xi} + \frac{1}{\pi} \int_1^{1/k} \frac{f(x(s)) ds}{s - \xi} + D$$

mit einer Konstanten $D = z(\infty) = x(\infty)$ schreiben lässt. Dabei gilt $z(\bar{\xi}) = \overline{z(\xi)} = x(\xi) - iy(\xi)$, also

$$x(\bar{\xi}) = x(\xi) \quad \text{und} \quad y(\bar{\xi}) = -y(\xi).$$

Hieraus folgt aus den Formeln von Sochozki-Plemelj für $t \in (-1, 1/k)$

$$x(t) = \frac{1}{2}[z^+(t) + z^-(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{r(k, s) ds}{s - t} + \frac{1}{\pi} \int_1^{1/k} \frac{f(x(s)) ds}{s - t} + D. \quad (3.6)$$

Wir erhalten also die folgende nichtlineare singuläre Integralgleichung vom Cauchyschen Typ für die unbekannte Funktion $x(t)$, $1 < t < 1/k$ (genauer: $x(k, t)$) und die unbekannte Konstante $D \in \mathbb{R}$

$$x(t) - \frac{1}{\pi} \int_1^{1/k} \frac{f(x(s)) ds}{s - t} - D = R(t) := \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{r(k, s) ds}{s - t}, \quad 1 < t < \frac{1}{k}$$

mit den Zusatzbedingungen

$$x(1) = h, \quad x(1/k) = 0, \quad x(-1/k) = l \quad \text{mit (3.6)}.$$

Ist $g(y)$, $0 \leq y \leq 1$, die Umkehrfunktion zu $f(x)$, $0 \leq x \leq h$, so geht letzteres Problem über in

$$g(y(t)) - \frac{1}{\pi} \int_1^{1/k} \frac{y(s)}{s - t} - D = R(t), \quad 1 < t, \frac{1}{k},$$

$$y(1) = 1, \quad y(1/k) = 0$$

und (vgl. (3.6))

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{r(k, s) ds}{s + \frac{1}{k}} + \frac{1}{\pi} \int_1^{1/k} \frac{y(s)}{s + \frac{1}{k}} + D = l.$$

Ist $y(t) = y(k, t)$, $1 < t < 1/k$, eine Lösung, so ergibt sich sofort eine Parameterdarstellung für die Sickerlinie:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{r(k, s) ds}{s - t} + \frac{1}{\pi} \int_1^{1/k} \frac{y(k, s)}{s - t} + D, \quad y(t) = r(k, t), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

3.4 Das Doppelschichtpotential

Es sei Γ eine einfache, glatte, geschlossene Kurve, die das Innengebiet $\Omega = \Omega_+$ berandet. Wir betrachten das Dirichlet-Problem für harmonische Funktionen, suchen also ein $u \in \mathbf{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ mit

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.7)$$

und

$$u = f \quad \text{auf } \Gamma \quad (3.8)$$

für ein gegebenes $f \in \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})$. Da wir wissen, dass Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen harmonisch sind und holomorphe Funktionen mit Hilfe von Cauchyschen Integralen dargestellt werden können, machen wir den Ansatz

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z = x + iy \in \Omega, \quad (3.9)$$

mit einer absolut integrierbaren Funktion (Dichte) $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Für die Funktion $u(x, y)$ ist damit (3.7) erfüllt (vgl. Satz 2.2), und unter der Annahme, dass $\Phi(z)$ eine stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$ besitzt, ist (3.8) äquivalent zu

$$\operatorname{Re} \Phi^+(\zeta) = f(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (3.10)$$

Mit einer Parametrisierung $\zeta(s) = \xi(s) + i\eta(s)$ von Γ bzgl. der Bogenlänge $s \in [0, L]$ schreiben wir

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^L \frac{\varphi(\zeta(s))}{\zeta(s) - z} \zeta'(s) ds.$$

Wegen $|\zeta'(s)| = 1$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s) - z} &= \frac{[\xi'(s) + i\eta'(s)][\xi(s) - i\eta(s) - x + iy]}{|\zeta(s) - z|^2} \\ &= \frac{\xi'(s)[\xi(s) - x] + \eta'(s)[\eta(s) - y]}{|\zeta(s) - z|^2} + i \frac{\eta'(s)[\xi(s) - x] - \xi'(s)[\eta(s) - y]}{|\zeta(s) - z|^2} \\ &= \frac{\langle \tau(\zeta(s)), \zeta(s) - z \rangle}{|\zeta(s) - z|^2} + i \frac{\langle \nu(\zeta(s)), \zeta(s) - z \rangle}{|\zeta(s) - z|^2} \end{aligned}$$

mit dem Tangentialvektor $\tau(\zeta(s))$ und dem Normalenvektor $\nu(\zeta(s))$ an Γ im Punkt $\zeta(s)$. Mit dem Ansatz (3.9) gilt also

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - z \rangle}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta) ds$$

und

$$\operatorname{Im} \Phi(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \tau(\zeta), \zeta - z \rangle}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta) ds.$$

Für eine hölderstetige Dichte $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ und $\zeta_0 \in \Gamma$ existiert $\Phi(\zeta_0)$ im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes (siehe die Sätze 2.5 und 2.7), so dass auch $\operatorname{Re} \Phi(\zeta_0)$ und $\operatorname{Im} \Phi(\zeta_0)$ für $\zeta_0 \in \Gamma$ in diesem Sinne existieren. Ist $\zeta' \in \mathbf{C}^\beta([0, L])$, so gilt für $\zeta_0 = \zeta(s_0) \in \Gamma$

$$\frac{\zeta(s) - \zeta(s_0)}{s - s_0} - \zeta'(s) = \xi'(\tilde{s}_1) - \xi'(s) + \mathbf{i}[\eta'(\tilde{s}_2) - \eta'(s)],$$

d.h.

$$\zeta(s) = \zeta(s_0) + \zeta'(s)(s - s_0) + o(|s - s_0|^{1+\beta}).$$

Da $\zeta'(s) \neq 0$ auf $[0, L]$, ist wegen $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{|\zeta(s) - \zeta(s_0)|}{|s - s_0|} = |\zeta'(s_0)| = 1$ auch $|\zeta(s) - \zeta(s_0)| \geq c_u |s - s_0|$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von s_0 mit einer Konstanten $c_u > 0$. Wegen $\langle \nu(\zeta), \zeta' \rangle = 0$ folgt

$$\frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - \zeta_0 \rangle}{|\zeta - \zeta_0|^2} = \frac{\langle \nu(\zeta(s)), \zeta(s) - \zeta(s_0) - \zeta'(s)(s - s_0) \rangle}{|\zeta(s) - \zeta(s_0)|^2} = o(|s - s_0|^{\beta-1}).$$

D.h., in diesem Fall existiert $\operatorname{Re} \Phi(\zeta_0)$, $\zeta_0 \in \Gamma$, sogar für jedes $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma)$ als uneigentliches Integral. Gehen wir in der Formel (vgl. (2.4))

$$\Phi^+(\zeta_0) = \Phi(\zeta_0) + \frac{\varphi(\zeta_0)}{2}$$

zum Realteil über und berücksichtigen (3.10), so erhalten wir die Integralgleichung

$$\varphi - \mathcal{K}\varphi = 2f \tag{3.11}$$

mit dem Integraloperator

$$(\mathcal{K}\varphi)(\zeta_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - \zeta_0 \rangle}{|\zeta - \zeta_0|^2} \varphi(\zeta) ds, \quad \zeta_0 \in \Gamma. \tag{3.12}$$

Die Funktion $(\mathcal{K}\varphi)(\zeta_0)$ heißt **Dipolpotential** (oder **Doppelschichtpotential**), welches von der **Belegung** φ erzeugt wird. Die Funktion

$$k(\zeta_0, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - \zeta_0 \rangle}{|\zeta - \zeta_0|^2}, \quad \zeta_0, \zeta \in \Gamma,$$

nennt man **Dipolkern** und den Operator \mathcal{K} **Dipoloperator**. Ist $\zeta \in \mathbf{C}^2([0, L])$, so haben wir

$$\zeta(s_0) = \zeta(s) + \zeta'(s)(s_0 - s) + \frac{\zeta''(s)}{2}(s_0 - s)^2 + o(|s_0 - s|^2)$$

und somit

$$\frac{\langle \nu(\zeta(s)), \zeta(s) - \zeta(s_0) \rangle}{|\zeta(s) - \zeta(s_0)|^2} = \frac{-\frac{1}{2} \langle \nu(\zeta(s)), \zeta''(s) \rangle + \frac{o(|s_0 - s|^2)}{|s_0 - s|^2}}{|\zeta'(s) + O(|s_0 - s|)|^2}.$$

In diesem Fall ist der Dipolkern also stetig auf Γ , und es gilt (beachte $|\zeta'(s)| = 1$) für $\zeta_0 = \zeta(s_0)$

$$k(\zeta_0, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi} [\eta'(s_0)\zeta''(s_0) - \zeta'(s_0)\eta''(s_0)] = -\frac{\kappa(\zeta_0)}{2\pi}$$

mit der Krümmung $\kappa(\zeta)$ der Kurve Γ im Punkt ζ (siehe G. M. Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung, Bd.I, Nr. 250).

Drückt man das Skalarprodukt zweier Vektoren mittels des Cosinus des eingeschlossenen Winkels aus, so erhält man für den Kern des Dipoloperators die Darstellung

$$k(\zeta_0, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos(\nu(\zeta), \zeta - \zeta_0)}{|\zeta - \zeta_0|}.$$

Wir definieren den singulären Integraloperator

$$(\mathcal{S}_\Gamma \varphi)(\zeta_0) = \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad \zeta_0 \in \Gamma,$$

als Cauchysches Hauptwertintegral, so dass

$$\mathcal{K}\varphi = -\operatorname{Re} \mathcal{S}_\Gamma \varphi.$$

Ist $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ eine Lösung der Integralgleichung (3.11) für gegebenes f , so ist

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - z \rangle}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta) ds$$

harmonisch in Ω , und nach den Formeln von Sochozki-Plemelj gilt auf Γ

$$u(\zeta_0) = \operatorname{Re} \Phi(\zeta_0) + \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0) = \frac{1}{2} [\operatorname{Re} (\mathcal{S}_\Gamma \varphi)(\zeta_0) + (\mathcal{K}\varphi)(\zeta_0) + 2f(\zeta_0)] = f(\zeta_0).$$

Sind $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ zwei Lösungen von (3.11) für ein und dasselbe f , so folgt mit $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ wie oben

$$u(\zeta_0) = 0, \quad \zeta_0 \in \Gamma.$$

Damit ist $u(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$ (Maximumprinzip für harmonische Funktionen) und somit $v(z) = \operatorname{Im} \Phi(z) = c$ in Ω mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Wir setzen $\psi = \operatorname{Im} \mathcal{S}_\Gamma \varphi$ und erhalten

$$c = \operatorname{Im} \Phi^+(\zeta_0) = \frac{1}{2} \psi(\zeta_0),$$

also $\psi = 2c$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \Phi^-(\zeta_0) &= \frac{1}{2} (\mathcal{S}_\Gamma \varphi)(\zeta_0) - \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0) \\ &= \frac{1}{2} [(-\mathcal{K}\varphi)(\zeta_0) + \mathbf{i}\psi(\zeta_0) - \varphi(\zeta_0)] \\ &= \frac{\mathbf{i}}{2} \psi(\zeta_0) - \varphi(\zeta_0) \\ &= \mathbf{i}c - \varphi(\zeta_0). \end{aligned}$$

Es folgt $v(z) = c$ in Ω_- und somit (C.-R.-Dgln.) $u(z) = c_1 \in \mathbb{R}$ in Ω_- . Das ergibt $\varphi(\zeta_0) = \Phi^+(\zeta_0) - \Phi^-(\zeta_0) = -c_1$ auf Γ . Wegen $(\mathcal{S}_\Gamma 1)(\zeta_0) = 1$ folgt $\mathcal{K}\varphi = -\varphi$. Andererseits ist $\varphi - \mathcal{K}\varphi = 0$ (wegen (3.11)) und somit $\varphi = 0$.

Satz 3.3 Ist $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ eine Lösung der Integralgleichung (3.11), so ist

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} k(z, \zeta) u(\zeta) ds, \quad z = x + iy \in \Omega,$$

die (eindeutige) Lösung von (3.7), (3.8). Ferner gibt es in $\mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ keine weitere Lösung von (3.11).

Wir stellen nun die Frage nach der Existenz einer Lösung $\varphi \in C^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ von (3.11).

Satz 3.4 Es seien Γ glatt mit $\zeta' \in \mathbf{C}^\beta([0, L])$ und $0 < \alpha \leq \beta$. Dann besitzt die Integralgleichung (3.11) für jedes $f \in C^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ genau eine Lösung $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$.

Satz 3.5 und Folgerung 3.6 sowie die Übungsaufgaben 3.7-3.9 bereiten den Beweis von Satz 3.4 vor.

Satz 3.5 Es seien $h(x, y) = \frac{\ell(x, y)}{|x - y|^{1-\beta}}$, $x, y \in [a, b]$, $0 < \beta < 1$, mit einer Funktion $\ell \in \mathbf{L}^\infty([a, b]^2)$ und

$$(Tu)(x) = \int_a^b h(x, y) u(y) dy, \quad x \in [a, b].$$

Es mögen Konstanten $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ existieren, so dass

$$|\ell(x, y) - \ell(x_1, y)| \leq C_2 \frac{|x - x_1|}{|x - y|} \quad \text{für } x, x_1, y \in [a, b] \quad \text{mit } |y - x| > C_1 |x_1 - x|$$

gilt. Dann ist $T : \mathbf{C}([a, b]) \rightarrow \mathbf{C}([a, b])$ ein linearer und beschränkter Operator.

Beweis. Aus

$$|(Tu)(x)| \leq \int_a^b \frac{|\ell(x, y)|}{|x - y|^{1-\beta}} |u(y)| dy \leq \|\ell\|_\infty \int_a^b \frac{dy}{|x - y|^{1-\beta}} \|u\|_\infty$$

und

$$\int_a^b \frac{dy}{|x - y|^{1-\beta}} = \int_a^x \frac{dy}{(x - y)^{1-\beta}} + \int_x^b \frac{dy}{(y - x)^{1-\beta}} = \frac{1}{\beta} \left[(x - a)^\beta + (b - x)^\beta \right] \leq \text{const}$$

folgt $\|Tu\|_\infty \leq \tilde{C}_1 \|u\|_\infty$ für beliebiges $u \in \mathbf{C}([a, b])$. Für beliebige $x_1, x \in [a, b]$ betrachten wir jetzt

$$J(x_1, x) := \int_a^b |h(x_1, y) - h(x, y)| dy.$$

Wir setzen $\varepsilon := |x_1 - x|$ und nehmen o.E.d.A. an, dass $C_1 \geq 2$ gilt. Mit

$$I_0 = [x - C_1\varepsilon, x + C_1\varepsilon] \cap [a, b] \quad \text{und} \quad I_1 = [a, b] \setminus [x - C_1\varepsilon, x + C_1\varepsilon]$$

ist dann

$$J(x_1, x) = \int_{I_0} |h(x_1, y) - h(x, y)| dy + \int_{I_1} |h(x_1, y) - h(x, y)| dy =: J_0(x_1, x) + J_1(x_1, x).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
J_0(x_1, x) &\leq \int_{I_0} (|h(x_1, y)| + |h(x, y)|) dy \\
&\leq \|\ell\|_\infty \int_{I_0} (|x_1 - y|^{\beta-1} + |x - y|^{\beta-1}) dy \\
&\leq \|\ell\|_\infty \int_{x-C_1\varepsilon}^{x+C_1\varepsilon} \int_{I_0} (|x_1 - y|^{\beta-1} + |x - y|^{\beta-1}) dy \\
&= \frac{\|\ell\|_\infty}{\beta} \left[(x_1 - x + C_1\varepsilon)^\beta + (x + C_1\varepsilon - x_1)^\beta + 2(C_1\varepsilon)^\beta \right] \\
&= \frac{\|\ell\|_\infty}{\beta} \left[(C_1\varepsilon - \varepsilon)^\beta + (C_1\varepsilon + \varepsilon)^\beta + 2(C_1\varepsilon)^\beta \right] \\
&= \frac{\|\ell\|_\infty}{\beta} \left[(C_1 - 1)^\beta + (C_1 + 1)^\beta + 2C_1^\beta \right] \varepsilon^\beta =: C_3 |x_1 - x|^\beta.
\end{aligned}$$

Für $J_1(x_1, x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
J_1(x_1, x) &= \int_{I_1} \left| \frac{\ell(x_1, y)}{|x_1 - y|^{1-\beta}} - \frac{\ell(x, y)}{|x - y|^{1-\beta}} \right| dy \\
&\leq \int_{I_1} \left(\frac{|\ell(x_1, y) - \ell(x, y)|}{|x_1 - y|^{1-\beta}} + |\ell(x, y)| \left| |x_1 - y|^{\beta-1} - |x - y|^{\beta-1} \right| \right) dy \\
&\leq C_2 |x_1 - x| \int_{I_1} \frac{dy}{|x - y| \cdot |x_1 - y|^{1-\beta}} + \|\ell\|_\infty \int_{I_1} \left| |x_1 - y|^{\beta-1} - |x - y|^{\beta-1} \right| dy.
\end{aligned}$$

Für $y \in [x + C_1\varepsilon, \infty)$ gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$(y - x_1)^{\beta-1} - (y - x)^{\beta-1} = (\beta - 1)(y - \xi)^{\beta-2}(x - x_1)$$

mit ξ zwischen x_1 und x . Wegen $|y - \xi| = y - \xi \geq y - (x + \varepsilon)$ folgt, falls $x + C_1\varepsilon < b$,

$$\begin{aligned}
\int_{x+C_1\varepsilon}^b \left| |x_1 - y|^{\beta-1} - |x - y|^{\beta-1} \right| dy &\leq (1 - \beta)\varepsilon \int_{x+C_1\varepsilon}^\infty (y - x - \varepsilon)^{\beta-2} dy \\
&= -\varepsilon \left[(y - x - \varepsilon)^{\beta-1} \right]_{x+C_1\varepsilon}^\infty \\
&= \varepsilon(C_1\varepsilon - \varepsilon)^{\beta-1} = (C_1 - 1)^{\beta-1} \varepsilon^\beta =: C_4 |x_1 - x|^\beta.
\end{aligned}$$

Analog erhält man, falls $a < x - C_1\varepsilon$,

$$\int_a^{x-C_1\varepsilon} \left| |x_1 - y|^{\beta-1} - |x - y|^{\beta-1} \right| dy \leq C_5 |x_1 - x|^\beta.$$

Für $y \in [x + C_1\varepsilon, b]$ gilt mit $x_0 = x + (C_1 - 1)\varepsilon$

$$|y - x_1| \geq y - x_0 \quad \text{und} \quad |y - x| \geq y - x_0,$$

also

$$\begin{aligned} \int_{x+C_1\varepsilon}^b \frac{dy}{|x-y| \cdot |x_1-y|^{1-\beta}} &\leq \int_{x+C_1\varepsilon}^b \frac{dy}{(y-x_0)^{2-\beta}} \\ &= \int_{\varepsilon}^{b-x_0} t^{\beta-2} dt \leq \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{\beta-2} dt = \frac{\varepsilon^{\beta-1}}{1-\beta}. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\int_a^{x-C_1\varepsilon} \frac{dy}{|x-y| \cdot |x_1-y|^{1-\beta}} \leq \frac{\varepsilon^{\beta-1}}{1-\beta}$$

und somit

$$C_2|x_1 - x| \int_{I_1} \frac{dy}{|x-y| \cdot |x_1-y|^{1-\beta}} \leq C_6|x_1 - x|^\beta.$$

Insgesamt erhalten wir

$$|(Tu)(x_1) - (Tu)(x)| \leq \tilde{C}_2|x_1 - x|^\beta \|u\|_\infty \quad \forall u \in \mathbf{C}([a, b]).$$

Zusammen mit dem ersten Teil des Beweises ergibt das $\|Tu\|_{\mathbf{C}^\beta([a, b])} \leq (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) \|u\|_\infty$, $u \in \mathbf{C}([a, b])$ und damit die Beschränktheit des Operators $T : \mathbf{C}([a, b]) \rightarrow \mathbf{C}^\beta([a, b])$. \square

Der Satz von Arzela-Ascoli über die Charakterisierung der kompakten Mengen in $\mathbf{C}([a, b])$ liefert nun

Folgerung 3.6 *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.5 ist $T : \mathbf{C}([a, b]) \rightarrow \mathbf{C}([a, b])$ ein kompakter Operator.*

Übungsaufgabe 3.7 *Auf der Menge $[a, b]^2 \setminus \{(x, y) \in [a, b]^2 : x \neq y\}$ existiere die partielle Ableitung $\frac{\partial \ell(x, y)}{\partial x}$, wobei*

$$\left| \frac{\partial \ell(x, y)}{\partial x} \right| \leq \frac{C}{|x - y|}$$

mit einer gewissen Konstanten C gelte. Man zeige, dass dann Konstanten $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ existieren, so dass die entsprechende Voraussetzung in Satz 3.5 erfüllt ist.

Wir verschärfen die Definition der lokalen Hölder-Stetigkeit und nennen eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem metrischen Raum (M, d) stark lokal hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$, wenn zu jedem $x \in M$ ein $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ und ein $c = c(x, \varepsilon) > 0$ existieren, so dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq c d(x_1, x_2)^\alpha \quad \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x)$$

gilt.

Übungsaufgabe 3.8 Man zeige: Sind $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ stark lokal hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$ und der metrische Raum (M, d) kompakt, so ist $f \in \mathbf{C}^\alpha(M, \mathbb{C})$.

Übungsaufgabe 3.9 Wir schreiben den Dipolkern in der Form

$$k(\zeta_0, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \frac{\ell(\zeta_0, \zeta)}{|\zeta - \zeta_0|^{1-\beta}} \quad \text{mit} \quad \ell(\zeta_0, \zeta) = \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - \zeta_0 \rangle}{|\zeta - \zeta_0|^{1+\beta}}.$$

Man zeige, dass dann

$$\frac{d}{ds} \ell(\zeta(s), \zeta) = -\frac{\langle \nu(\zeta), \zeta'(s) \rangle}{|\zeta - \zeta(s)|^{1+\beta}} + \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - \zeta(s) \rangle}{|\zeta - \zeta(s)|^{3+\beta}} (1 + \beta) \langle \zeta'(s), \zeta - \zeta(s) \rangle$$

gilt.

Übungsaufgabe 3.10 Man zeige: Sind $\Omega \subset M$ und $f \in \mathbf{C}^\alpha(\Omega, \mathbb{C})$, so ist f auf $\bar{\Omega}$ stetig fortsetzbar, und es gilt $f \in \mathbf{C}^\alpha(\bar{\Omega}, \mathbb{C})$.

Übungsaufgabe 3.11 * Es seien $\Gamma \subset \mathbb{C}$ eine glatte, doppelunktpunktfreie, geschlossene Kurve und $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ für ein $\alpha \in (0, 1)$. Man zeige, dass dann die Funktion

$$z \mapsto \begin{cases} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta & : z \in \Omega_+, \\ \Phi^+(\zeta) & : \zeta \in \Gamma, \end{cases}$$

zu $\mathbf{C}^\alpha(\bar{\Omega}_+)$ gehört (vgl. Satz 2.7).

Beispiel 3.12 Die Funktion

$$u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta) =: \tilde{u}(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2\theta - \pi}{3}$$

ist auf dem Gebiet $\Omega = \{(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1, \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\}$ harmonisch. Auf $\partial\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ verschwinden die Randwerte von $u(x, y)$, so dass offenbar $u \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ mit $\Gamma = \partial\Omega$ für jedes $\alpha \in (0, 1)$ gilt. Da aber $u \in \mathbf{C}^\alpha(\bar{\Omega})$ nur für $\alpha \in (0, \frac{2}{3}]$ gilt, kann nach Übungsaufgabe 3.11 die Integralgleichung (3.11) mit $f = u|_\Gamma$ keine Lösung $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ für $\alpha \in (\frac{2}{3}, 1)$ besitzen.

Wir betrachten jetzt die Außenraumaufgabe

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_-, \quad u = f \quad \text{auf} \quad \Gamma = \partial\Omega, \quad u(\infty) = 0, \quad (3.13)$$

für die wir eine Lösung $u \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}_-, \mathbb{R}) \cap \mathbf{C}^2(\Omega_-, \mathbb{R})$ suchen. Dazu machen wir wieder den Ansatz (3.9), d.h.

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - z \rangle}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta) ds, \quad z = x + iy. \quad (3.14)$$

Aus (2.4) folgt mit der Randbedingung in (3.13)

$$f(\zeta_0) = \operatorname{Re} \Phi^-(\zeta_0) = \operatorname{Re} \Phi(\zeta_0) - \frac{\varphi(\zeta_0)}{2},$$

also

$$\varphi(\zeta_0) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - \zeta_0 \rangle}{|\zeta - \zeta_0|^2} \varphi(\zeta) ds = -2f(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma,$$

bzw.

$$\varphi + \mathcal{K}\varphi = -2f. \quad (3.15)$$

Satz 3.13 *Ist $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ eine Lösung von (3.15), so ist $u(x, y)$ aus (3.14) die (eindeutige) Lösung von (3.13). Zwei Lösungen von (3.15) unterscheiden sich durch eine (reelle) additive Konstante.*

Übungsaufgabe 3.14 *Wir machen die gleichen Voraussetzungen wie in Satz 3.5, nur dass jetzt $\frac{1}{2} < \beta < 1$ gelte. Man zeige, dass dann*

$$T : \mathbf{L}^2((a, b)) \longrightarrow \mathbf{C}^{\beta-\frac{1}{2}}([a, b])$$

ein linearer beschränkter Operator ist.

Sei nun $\zeta' \in \mathbf{C}^\beta(\Gamma)$, $\frac{1}{2} < \beta < 1$. Dann ist $\mathcal{K} : \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})$ ein kompakter Operator (vgl. Satz 3.5 und Folgerung 3.6). Dabei gilt (vgl. Satz 3.13) $\ker_{\mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})}(\mathcal{I} + \mathcal{K}) = \{c : c \in \mathbb{R}\}$, d.h. $\dim \ker_{\mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})}(\mathcal{I} + \mathcal{K}) = 1$. Auch der Operator $\mathcal{K} : \mathbf{L}^2(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma, \mathbb{R})$ ist kompakt, es gilt sogar (vgl. Übungsaufgabe (3.14)), dass $\mathcal{K} : \mathbf{L}^2(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{C}^{\beta-\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R})$ beschränkt ist, woraus auch

$$\ker_{\mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})}(\mathcal{I} + \mathcal{K}) = \ker_{\mathbf{L}^2(\Gamma, \mathbb{R})}(\mathcal{I} + \mathcal{K})$$

folgt. Wir haben also einen Operator $\mathcal{A} = \mathcal{I} + \mathcal{K} \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ mit einem Banachraum $\mathbf{X} = \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})$ und einen Operator $B \in \mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{H})$ mit einem Hilbertraum $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\Gamma, \mathbb{R})$, wobei das innere Produkt in \mathbf{H} durch $\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma} f(\zeta)g(\zeta) ds$ gegeben ist und wobei $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_{\mathbf{X}}$ gilt. Beide Operatoren sind Fredholmoperatoren mit dem Fredholmindex $\kappa(\mathcal{A}) = \kappa(\mathcal{B}) = 0$, wobei $\ker_{\mathbf{X}} \mathcal{A} = \ker_{\mathbf{H}} \mathcal{B}$ gilt. Es folgt $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^*|_{\mathbf{H}^*}$ und $\ker_{\mathbf{H}^*} \mathcal{B}^* = \ker_{\mathbf{X}^*} \mathcal{A}^*$. Für $f \in \mathbf{H} = \mathbf{H}^*$ gilt

$$f(\mathcal{K}\varphi)(\zeta_0) = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k(\zeta_0, \zeta) \varphi(\zeta) |d\zeta| f(\zeta_0) |d\zeta_0| = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k(\zeta_0, \zeta) f(\zeta_0) |d\zeta_0| \varphi(\zeta) |d\zeta|,$$

also $(\mathcal{K}^* f)(\zeta) = \int_{\Gamma} k(\zeta_0, \zeta) f(\zeta_0) |d\zeta_0|$. Ist somit $\psi_0(\zeta) \not\equiv 0$ eine Lösung von

$$\psi_0(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} k(\zeta_0, \zeta) \psi_0(\zeta_0) |d\zeta_0| = 0, \quad \zeta \in \Gamma,$$

so besitzt (3.15) genau dann eine Lösung $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ für $f \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$, $0 < \alpha \leq \beta$, falls

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) \psi_0(\zeta) ds = 0$$

gilt. Dabei ist $\int_{\Gamma} \psi_0(\zeta) ds \neq 0$, da andernfalls die Integralgleichung (3.15) für $f \equiv 1$ eine Lösung φ besitzen würde. Die eindeutige Lösung von $\Delta u \equiv 0$ in Ω_- , $u \equiv 1$ auf Γ ist aber $u \equiv 1$, so dass $u(\infty) = 0$ in (3.13) verletzt wäre.

3.5 Die Tangentialableitung des Einfachschichtpotentials

Wir machen jetzt für eine Lösung von (3.7),(3.8) den Ansatz (vgl. (3.9))

$$u(x, y) = -\operatorname{Im} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \tau(\zeta), \zeta - z \rangle}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta) ds.$$

Aus (3.8) und (2.4) folgt

$$f(\zeta_0) = -\operatorname{Im} \Phi^+(\zeta_0) = -\operatorname{Im} \left[\Phi(\zeta_0) + \frac{\varphi(\zeta_0)}{2} \right] = -\operatorname{Im} \Phi(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma,$$

also

$$(\mathcal{T}\varphi)(\zeta_0) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \tau(\zeta), \zeta - \zeta_0 \rangle}{|\zeta - \zeta_0|^2} \varphi(\zeta) ds = f(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma. \quad (3.16)$$

Für die Funktion $g(\zeta_0, \zeta) = \ln |\zeta - \zeta_0| = \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ gilt

$$\nabla g(\zeta_0, \zeta) = \frac{\zeta - \zeta_0}{|\zeta - \zeta_0|^2},$$

so dass der Kern des Integraloperators in (3.16) bis auf den Faktor $\frac{1}{2\pi}$ gleich der Tangentialableitung (bzgl. der Kurve Γ) des Kerns $\ln |\zeta - \zeta_0|$ des Einfachschichtpotentialoperators (vgl. Abschnitt 4.2) ist. Der Operator \mathcal{T} bildet die konstanten Funktionen auf Null ab, da bekanntlich $\Phi(z) = 1$, d.h. $\operatorname{Im} \Phi(z) = 0$, gilt für $z \in \Omega_+$ und $\varphi \equiv 1$.

Kapitel 4

Die Integralgleichungsmethode

4.1 Singularitätenfunktionen

Für $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$ definieren wir das innere Produkt $\langle x, y \rangle$ und den Betrag (Norm) $|x|$ durch

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d x_k y_k \quad \text{und} \quad |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^d x_k^2}.$$

Ferner definieren wir für $d = 2$ und $d = 3$

$$s(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y| & : d = 2 \\ \frac{1}{4\pi |x - y|} & : d = 3 \end{cases} \quad (4.1)$$

und erhalten

$$\nabla_x s(x, y) = -\frac{1}{\omega_d} \frac{x - y}{|x - y|^d}, \quad \omega_d = \begin{cases} 2\pi & : d = 2, \\ 4\pi & : d = 3. \end{cases}$$

Es folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} s(x, y) = -\frac{1}{\omega_d} \left(\frac{1}{|x - y|^d} - d \frac{(x_j - y_j)^2}{|x - y|^{d+2}} \right)$$

und somit

$$\Delta_x s(x, y) = -\frac{1}{\omega_d |x - y|^{d+2}} \left(d|x - y|^2 - d \sum_{j=1}^d (x_j - y_j)^2 \right) = 0, \quad x \neq y.$$

Man nennt $s(x, y)$ eine **Singularitätenfunktion** oder **Fundamentallösung** für die **Laplace-Gleichung** $-\Delta u = 0$ in \mathbb{R}^d . Für $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{N}^d$ sind auch

$$r(x, y) := \sum_{j=1}^N a_{\alpha_j, \beta_j}(y) D_x^{\alpha_j} D_y^{\beta_j} s(x, y)$$

Singularitätenfunktionen für die Laplace-Gleichung. Für $d \geq 3$ kann man allgemein

$$s(x, y) = \frac{|x - y|^{2-d}}{(d-2)\omega_d} \quad \text{mit} \quad \omega_d = \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^d}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

setzen. Die Funktion $\frac{1}{8\pi} |x - y|^2 \ln |x - y|$ ist Singularitätenfunktion für die **biharmonische Gleichung** $\Delta^2 u = 0$.

4.2 Das Einfachschichtpotential

Es seien $\Omega = \Omega_+ \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega = \Gamma$ und $s(x, y)$ die in 4.1 definierte Singularitätenfunktion für $-\Delta u = 0$. Für eine \mathbf{L}^∞ -Funktion $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma} s(x, y) \varphi(y) d\Gamma_y \quad (4.2)$$

Einfachschichtpotential mit der Belegung $\varphi(x)$. Ist $d = 2$, so ist $d\Gamma_y$ in (4.2) das Differential der Bogenlänge bzgl. der Kurve Γ . Im Fall $d = 3$ ist das Integral in (4.2) als Oberflächenintegral zweiter Art zu verstehen, d.h., ist $\zeta(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in K$, eine Parametrisierung der Fläche Γ ($\zeta : K^\circ \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv, stetig differenzierbar mit $\det \zeta'(t) = 2$, $t \in K^\circ$), so ist

$$\int_{\Gamma} s(x, y) \varphi(y) d\Gamma_y = \iint_K s(x, \zeta(t)) \varphi(\zeta(t)) \left| \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t_1} \times \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t_2} \right| d(t_1, t_2).$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ sind die partiellen Ableitungen nach x von $s(x, y)$ in einer Umgebung von x gleichmäßig bzgl. $y \in \Gamma$ stetig, so dass $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} = \int_{\Gamma} \frac{\partial s(x, y)}{\partial x_j} \varphi(y) d\Gamma_y$ usw. usf. gilt, also $\Delta \Phi = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \Gamma$.

Es seien $D \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, \dots$, und $f : D \setminus \{x^0\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Für jede Umgebung U von x^0 möge das Integral $\int_{D \setminus U} f(x) dx$ existieren. Wir sagen, dass das **uneigentliche Integral** $\int_D f(x) dx$ existiert, falls für eine beliebige Folge $(U_n)_{n=0}^\infty$ von Umgebungen von x^0 , die sich für $n \rightarrow \infty$ auf x^0 zusammenzieht, der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D \setminus U_n} f(x) dx$ existiert. Dieser Grenzwert ist dann von der Wahl der Folge $(U_n)_{n=0}^\infty$ unabhängig und definiert den Wert des Integrals $\int_D f(x) dx$.

Beispiel 4.1 Die Integrale $\int_{K_R(\Theta)} \frac{dx}{|x|^\lambda}$, $R > 0$, existieren als uneigentliche Integrale für $\lambda < d$.

Beispiel 4.2 Wir zeigen, dass die Funktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{|t - z|^{1-\beta}}$, $0 < \beta < 1$, $-\infty < a < b < \infty$, für jedes $\varphi \in \mathbf{L}^\infty((a, b), \mathbb{R})$ stetig ist.

Übungsaufgabe 4.3 Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_a^b \ln |t - z| \varphi(t) dt$, $-\infty < a < b < \infty$, für jedes $\varphi \in \mathbf{L}^\infty((a, b), \mathbb{R})$ stetig ist.

Übungsaufgabe 4.4 Es seien $D = K_R(x^0) = \{x = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : |x - x^0| \leq R\}$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, 0)$ und $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(D, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für $0 < \alpha < 2$ die Funktion

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \iint_D \frac{\varphi(y_1, y_2) d(y_1, y_2)}{|y - x|^\alpha}$$

stetig ist.

Im Weiteren sei $d = 2$ oder $d = 3$.

Satz 4.5 Das Einfachschichtpotential ist auf \mathbb{R}^d stetig. Für $d = 3$ gilt $\Phi(\infty) = 0$. Für $d = 2$ gilt $\Phi(\infty) = 0$ genau dann, wenn $\int_\Gamma \varphi d\Gamma = 0$ ist.

Für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ haben wir

$$\nabla \Phi(x) = -\frac{1}{\omega_d} \int_\Gamma \frac{x - y}{|x - y|^d} \varphi(y) d\Gamma_y, \quad (4.3)$$

$\Phi : \mathbb{R}^d \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ ist sogar unendlich oft differenzierbar. Für $x \in \Gamma$ existiert das Integral in (4.3) i. Allg. aber nicht mehr im uneigentlichen Sinne. Wir definieren für $x \in \Gamma$

$$\frac{\partial^\pm \Phi}{\partial \nu} := \lim_{\alpha \rightarrow \mp 0} \langle \nu(x), \nabla \Phi(x + \alpha \nu(x)) \rangle, \quad (4.4)$$

falls diese Grenzwerte existieren, wobei $\nu(x)$ die äußere Normale an Γ im Punkt x bezeichnet.

Satz 4.6 Im Punkt $x^0 \in \Gamma$ gelte $|\langle \nu(x^0), x^0 - y \rangle| \leq c|x^0 - y|^{1+\beta}$ für ein $\beta \in (0, 1]$ und für alle $y \in \Gamma$. Ferner seien $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma)$ und φ in x^0 stetig. Dann existieren die einseitigen Normalenableitungen (4.4). Dabei gilt

$$\frac{\partial \Phi^+(x^0)}{\partial \nu} - \frac{\partial \Phi^-(x^0)}{\partial \nu} = \varphi(x^0)$$

und

$$\frac{\partial \Phi^+(x^0)}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi^-(x^0)}{\partial \nu} = -\frac{1}{\omega_d} \int_\Gamma \frac{\langle \nu(x^0), x^0 - y \rangle}{|x^0 - y|^d} \varphi(y) d\Gamma_y,$$

wobei das Integral im uneigentlichen Sinne existiert.

Es sei jetzt $\tau(x^0)$ eine Tangentialrichtung an Γ im Punkt $x^0 \in \Gamma$, d.h. $\tau(x^0) \perp \nu(x^0)$. Für $x \notin \Gamma$ betrachten wir

$$\langle \tau(x^0), \nabla \Phi(x) \rangle = -\frac{1}{\omega_d} \int_\Gamma \frac{\langle \tau(x^0), x - y \rangle}{|x - y|^d} \varphi(y) d\Gamma_y.$$

Satz 4.7 Ist $\varphi(x)$ im Punkt x^0 hölderstetig, so gilt im Sinne nichttangentialer Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \langle \tau(x^0), \nabla \Phi(x) \rangle = -\frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{\langle \tau(x^0), x^0 - y \rangle}{|x^0 - y|^d} \varphi(y) d\Gamma_y,$$

wobei das Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen ist.

Definition des Cauchyschen Hauptwertes: $\int_{\Gamma} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \{x \in \mathbb{R}^d : |x - x^0| \leq \varepsilon\}}$. Unter Verwendung der Sätze 4.5 und 4.6 kann man für eine im Punkt $x^0 \in \Gamma$ hölderstetige Belegung φ zeigen, dass (wieder im Sinne nichttangentialer Grenzwerte)

$$\nabla \Phi^+(x^0) - \nabla \Phi^-(x^0) = \varphi(x^0) \nu(x^0)$$

und

$$\nabla \Phi^+(x^0) + \nabla \Phi^-(x^0) = -\frac{2}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{x^0 - y}{|x^0 - y|^d} \varphi(y) d\Gamma_y$$

gilt, wobei das Integral wiederum als Cauchyscher Hauptwert erklärt ist.

Wir schreiben $\Gamma \in \mathbf{C}^{1+\beta}$, wenn Γ kompakt, zusammenhängend und doppelpunktfrei ist und wenn für jedes $x^0 \in \Gamma$ eine Umgebung $U \subset \Gamma$ von x^0 existiert, so dass U das Bild einer bijektiven Abbildung $\zeta : D \rightarrow U$ mit einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^{d-1}$ ist, so dass ζ' hölderstetig mit dem Exponenten β ist ($\zeta' \in \mathbf{C}^{\beta}(D, \mathbb{R}^{(d-1) \times d})$).

Bemerkung 4.8 Es seien $\Gamma_0 \subset \Gamma$ und $\Gamma_0 \in \mathbf{C}^{1+\beta}$ sowie $\varphi \in \mathbf{C}^{\beta}(\Gamma_0, \mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^{\infty}(\Gamma, \mathbb{R})$. Ferner sei $U \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge, die durch Γ in zwei disjunkte Teilmengen $U^{\pm} \subset \Omega^{\pm}$ zerlegt wird, wobei $\Gamma \cap U \subset \Gamma_0$ gelte. Dann sind $\nabla \Phi^{\pm}$ auf \overline{U}_{\pm} stetig.

4.3 Die Dirichlet-RWA und das Einfachschichtpotential

Sind $u, v \in \mathbf{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$, so folgt aus dem Gaußschen Integralsatz die Greensche Formel

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma - \int_{\Omega} v \Delta u dx. \quad (4.5)$$

Ist also $\Delta u = 0$ in Ω , so folgt für $v = u$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma \quad (4.6)$$

und für $v \equiv 1$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = 0. \quad (4.7)$$

Neben den folgenden **Dirichlet-Randwertaufgaben** betrachten wir auch die entsprechenden **Neumann-Randwertaufgaben** für Funktionen $u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$:

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_+, \quad u = f \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.8)$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_+, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.9)$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_-, \quad u = f \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.10)$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_-, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.11)$$

(A) Sind u_1, u_2 zwei Lösungen von (4.8) bzw. (4.9) (Innenraumprobleme), so ist $u = u_1 - u_2$ Lösung von (4.8) bzw. (4.9) für $f \equiv 0$. Es folgt aus (4.6) $\nabla u \equiv 0$, also $u \equiv \text{const}$. Im Fall der Gleichung (4.8) folgt daraus $u \equiv 0$.

(B) Sei jetzt u Lösung von (4.10) bzw. (4.11) (Außenraumprobleme) mit $f \equiv 0$. Für $R > \max\{|x| : x \in \Gamma\}$ setzen wir $\Omega_R = \{x \in \Omega_- : |x| < R\}$. Aus (4.6) und den Randbedingungen in (4.10) bzw. (4.11) folgt (ν auf dem äußeren Rand γ von Ω_R nach außen gerichtet)

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 dx = - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\gamma = \int_{\gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\gamma.$$

Setzen wir voraus, dass

$$|u(x)| = O(|x|^{-1}) \quad \text{und} \quad |\nabla u(x)| = O(|x|^{1-d}) \quad \text{für} \quad |x| \longrightarrow \infty \quad (4.12)$$

gilt, so folgt

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\gamma} |u| |\langle \nu, \nabla u \rangle| d\gamma = O(R^{-1}).$$

Für $R \longrightarrow \infty$ erhalten wir $\int_{\Omega_-} |\nabla u|^2 dx = 0$ und somit unter Verwendung von $u(\infty) = 0$ (vgl. (4.12)) auch $u \equiv 0$.

(C) Für das Einfachschichtpotential $\Phi(x)$ zur Belegung $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma)$ gilt $|\Phi(x)| = O(|x|^{-1})$, falls man im Fall $d = 2$ zusätzlich $\int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = 0$ voraussetzt (vgl. Beweis von Satz 4.5).

(D) Setzen wir generell (auch im Fall $d = 3$) voraus, dass $\int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = 0$ ist, so folgt für $|x| \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |\nabla \Phi(x)| &= \frac{1}{\omega_d} \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{x-y}{|x-y|^d} - \frac{x}{|x|^d} \right) \varphi(y) d\Gamma_y \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_d |x|^d} \int_{\Gamma} \left| \frac{x-y}{\left(1 - \frac{|y|}{|x|}\right)^d} - x \right| |\varphi(y)| d\Gamma_y = O(|x|^{-d}). \end{aligned}$$

(E) Die Außenraumaufgabe (4.10) besitzt höchstens eine Lösung mit den Eigenschaften

$$|u(x)| = O(1) \quad \text{und} \quad |\nabla u(x)| = O(|x|^{-d}). \quad (4.13)$$

(F) Ist u Lösung von (4.9), so ist notwendigerweise $\int_{\Gamma} f \, d\Gamma = 0$ wegen (4.7). Das gilt auch für die Außenraumangabe (4.11), falls $|\nabla u(x)| = O(|x|^{-d})$ gilt.

Wir suchen nun eine Lösung von (4.8) bzw. (4.10) in Form eines Einfachschichtpotentials

$$u(x) = \Phi(x) = \int_{\Gamma} s(x, y) \varphi(y) \, d\Gamma_y, \quad (4.14)$$

wobei $s(x, y)$ durch (4.1) gegeben ist. Nach Satz 4.5 ist Φ auf \mathbb{R}^d stetig, so dass die Randbedingung $u = f$ auf Γ zu der Integralgleichung

$$\int_{\Gamma} s(x, y) \varphi(y) \, d\Gamma_y = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.15)$$

führt. Für das Weitere setzen wir voraus, dass die Voraussetzung $|\langle \nu(x^0), x^0 - y \rangle| \leq c|x^0 - y|^{1+\beta}$, $y \in \Gamma$ von Satz 4.6 für alle $x^0 \in \Gamma$ erfüllt ist.

Satz 4.9 *Es gibt höchstens eine stetige Lösung $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ der Integralgleichung (4.15), falls man im Fall $d = 2$ zusätzlich $\int_{\Gamma} \varphi \, d\Gamma = 0$ fordert.*

Es sei $\varphi \in \mathbf{L}^{\infty}(\Gamma)$ eine Lösung der Integralgleichung (4.15) für $d = 2$, $f \in \mathbf{C}(\Gamma)$ und den Einheitskreis $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$. Unter Verwendung der folgenden Übungsaufgabe ergibt sich

$$\int_{\Gamma} f \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} s(x, y) \varphi(y) \, d\Gamma_y \, d\Gamma_x = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} s(x, y) \, d\Gamma_x \varphi(y) \, d\Gamma_y = 0.$$

Übungsaufgabe 4.10 *Es seien $d = 2$ und $\Omega_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Man zeige, dass für $\varphi \equiv 1$ gilt*

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & : x \in \Omega_+, \\ -\ln|x| & : x \in \Omega_-. \end{cases}$$

D.h., $\varphi \equiv 1$ löst die Integralgleichung (4.15) im Fall $f \equiv 0$.

Satz 4.11 *Es seien $f \in \mathbf{C}^{1+\beta}(\Gamma)$ und $d = 3$. Dann besitzt die Integralgleichung (4.15) eine Lösung $\varphi \in \mathbf{C}^{\beta}(\Gamma)$.*

4.4 Ein Integraloperator mit logarithmischer Singularität

Wir betrachten das Randwertproblem im \mathbb{R}^2

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega = \Omega_- = \mathbb{R}^2 \setminus [-1, 1], \quad u = f \quad \text{auf} \quad (-1, 1).$$

Suchen wir die Lösung als Einfachschichtpotential, so erhalten wir die Integralgleichung

$$(\mathcal{K}\varphi)(x) := -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|y - x| \varphi(y) \, dy = 2f(x), \quad -1 < x < 1.$$

(A) Ist $\varphi \in \mathbf{L}^1(-1, 1) \cap \mathbf{C}^\beta([-1 + \delta, 1 - \delta])$ für jedes $\delta \in (0, 1)$, so gilt

$$(\mathcal{K}\varphi)'(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(y)}{y-x} dy, \quad -1 < x < 1.$$

(B) Wir definieren

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0(x) & : n = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x) & : n > 0, \end{cases}$$

wobei $T_n(x)$ mit $T_n(\cos s) = \cos(ns)$ das Tschebyscheff-Polynom erster Art und n -ten Grades bezeichnet. Das System $(p_n)_{n=0}^\infty$ ist ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum \mathbf{L}_σ^2 der zum Tschebyscheff-Gewicht $\sigma(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ über dem Intervall $(-1, 1)$ quadratisch summierbaren Funktionen versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_\sigma = \int_{-1}^1 u(x) \overline{v(x)} \sigma(x) dx$$

und der Norm $\|u\|_\sigma = \sqrt{\langle u, u \rangle_\sigma}$. Es gilt für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{p.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(y)}{y-x} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = U_{n-1}(x), \quad -1 < x < 1, \quad (4.16)$$

wobei $U_n(x)$ mit $U_n(\cos s) = \frac{\sin(n+1)s}{\sin s}$ das Tschebyscheff-Polynom zweiter Art und n -ten Grades bezeichnet, $U_{-1}(x) \equiv 0$. Hieraus kann man die Beziehung

$$\mathcal{K}\sigma p_n = \begin{cases} (\ln 2) p_0 & : n = 0, \\ \frac{1}{n} p_n & : n > 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

ableiten.

(C) Der Operator

$$\mathcal{K}_0 : \mathbf{L}_\sigma^2 \longrightarrow \mathbf{L}_\sigma^2, \quad u \mapsto -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|y-x| u(y) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

ist linear und beschränkt. Der Raum \mathbf{L}_σ^2 ist isometrisch isomorph zu ℓ^2 mittels der Abbildung $\mathcal{J} : \mathbf{L}_\sigma^2 \longrightarrow \ell^2$, $u \mapsto (\langle u, p_n \rangle_\sigma)_{n=0}^\infty$, wobei

$$\ell^2 = \left\{ (\xi_n)_{n=0}^\infty : \xi_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^\infty |\xi_n|^2 < \infty \right\}, \quad \langle \xi, \eta \rangle = \sum_{n=0}^\infty \xi_n \overline{\eta_n}, \quad \|\xi\|_{\ell^2} = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}.$$

Wegen (4.17) ist $\mathcal{J}^{-1} \mathcal{K}_0 \mathcal{J}$ gleich der Diagonalmatrix $\mathbf{A} = [\alpha_j \delta_{jk}]_{j,k=0}^\infty$ mit $\alpha_0 = \ln 2$ und $\alpha_j = \frac{1}{j}$, $j > 0$.

- Für $s \geq 0$ definiert man den Sobolev-Raum $\mathbf{L}_\sigma^{2,s}$ als den Teilraum

$$\left\{ \psi \in \mathbf{L}_\sigma^2 : \|\psi\|_{\sigma,s}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{2s} |\langle \psi, p_n \rangle_\sigma|^2 < \infty \right\}.$$

Die Abbildung $\mathcal{J} : \mathbf{L}_\sigma^{2,s} \longrightarrow \ell_s^2$ ist isometrisch isomorph, wobei

$$\ell_s^2 = \left\{ \xi \in \ell^2 : \|\xi\|_{\ell_s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{2s} |\xi_n|^2 < \infty \right\}.$$

Man sieht nun leicht, dass $\mathbf{A} : \ell_s^2 \longrightarrow \ell_{s+1}^2$ und $\mathcal{K}_0 = \mathcal{J}\mathbf{A}\mathcal{J}^{-1} : \mathbf{L}_\sigma^{2,s} \longrightarrow \mathbf{L}_\sigma^{2,s+1}$ lineare und beschränkte Operatoren sind.

- Wie könnte man die Gleichung

$$\mathcal{K}_0 \psi = g \in \mathbf{L}_\sigma^{2,s+1} \quad (4.18)$$

numerisch approximativ lösen? Wir betrachten dazu $\mathbf{X}_n = \text{span}\{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$, versuchen g durch $g_n \in \mathbf{X}_n$ in $\mathbf{L}_\sigma^{2,s+1}$ zu approximieren, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_{\sigma,s+1} = 0$, und suchen $\psi_n \in \mathbf{X}_n$ mit

$$\mathcal{K}_0 \psi_n = g_n. \quad (4.19)$$

Wir wissen, dass dann

$$\psi_n = \mathcal{K}_0^{-1} g_n = \frac{\langle g_n, p_0 \rangle_\sigma}{\ln 2} p_0 + \sum_{k=1}^{n-1} k \langle g_n, p_k \rangle_\sigma p_k$$

gilt (beachte $\mathcal{K}_0 : \mathbf{X}_n \longrightarrow \mathbf{X}_n$). Es ist außerdem

$$\|\psi_n - \psi\|_{\sigma,t} \leq \|\mathcal{K}_0^{-1}\|_{\mathbf{L}_\sigma^{2,t+1} \rightarrow \mathbf{L}_\sigma^{2,t}} \|g_n - g\|_{\sigma,t+1} = \frac{1}{\ln 2} \|g_n - g\|_{\sigma,t+1}.$$

- Eine Möglichkeit der Wahl von g_n wäre die folgende:

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n g(x_{nk}) \ell_{nk}(x),$$

wobei $x_{nk} = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$, $k = 1, \dots, n$, die Nulstellen von $T_n(x)$ und

$$\ell_{nk}(x) = \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x - x_{nj}}{x_{nj} - x_{nk}} = \frac{T_n(x)}{(x - x_{nk}) t'_n(x_{nk})}, \quad k = 1, \dots, n,$$

die entsprechenden Lagrangeschen Grundpolynome sind.

Lemma. Für $g \in \mathbf{L}_\sigma^{2,s}$, $s > \frac{1}{2}$ und $0 \leq t \leq s$ gilt

$$\|g_n - g\|_{\sigma,t} \leq \text{const } n^{t-s} \|g\|_{\sigma,s}.$$

Ist also $g \in \mathbf{L}_\sigma^{2,s+1}$ für ein $s \geq 0$, so gilt für die Lösungen ψ und ψ_n der Gleichungen (4.18) und (4.19)

$$\|\psi_n - \psi\|_{\sigma,t} \leq \text{const } n^{t-s} \|g\|_{\sigma,s+1}, \quad 0 < t < s.$$

- Zur Berechnung der Näherung ψ_n benötigt man die Fourierkoeffizienten $\langle g_n, p_j \rangle_\sigma$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Dazu verwenden wir die Gauß-Tschebyscheff-Quadratur

$$\int_{-1}^1 f(x) \sigma(x) dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{nk}),$$

die für Polynome $f(x)$ bis zum Grad $2n-1$ exakt ist, und erhalten

$$\gamma_{nj} := \langle g_n, p_j \rangle_\sigma = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n g(x_{nk}) p_j(x_{nk}).$$

Es gilt also

$$\gamma_n := \begin{bmatrix} \gamma_{n0} \\ \vdots \\ \gamma_{n,n-1} \end{bmatrix} = \mathbb{P}_n \begin{bmatrix} g(x_{n1}) \\ \vdots \\ g(x_{nn}) \end{bmatrix}$$

mit

$$\mathbb{P}_n = \frac{\pi}{n} [p_j(x_{nk})]_{j=0, k=1}^{n-1, n} = \mathbb{D}_n \mathbb{C}_n,$$

wobei

$$\mathbb{D}_n = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \text{diag} [1 \quad \sqrt{2} \quad \dots \quad \sqrt{2}]$$

und

$$\mathbb{C}_n = [T_j(x_{nk})]_{j=0, k=1}^{n-1, n} = \left[\cos \frac{j(2k-1)\pi}{2n} \right]_{j=0, k=1}^{n-1, n} =: \mathbb{C}_n^2.$$

Die Matrix \mathbb{C}_n^2 ist die zweite diskrete Kosinustransformation, welche man mit einer Komplexität von $O(n \log n)$ auf einen Vektor der Länge n anwenden kann.

Übungsaufgabe 4.12 Man berechne die Parameter λ_{nk}^φ der Gauß-Tschebyscheff-Quadratur

$$\int_{-1}^1 f(x) \sqrt{1-x^2} dx \approx \sum_{k=1}^n \lambda_{nk} f(y_{nk})$$

zum Tschebyscheff-Gewicht zweiter Art, $y_{nk} = \cos \frac{k\pi}{n+1}$.

4.5 Die Neumann-RWA und das Einfachschichtpotential

Im Weiteren sei die Bedingung von Satz 4.6 für alle $x^0 \in \Gamma$ erfüllt:

$$\exists \beta \in (0, 1] : |\langle \nu(x), x-y \rangle| \leq \text{const} |x-y|^{1+\beta} \quad \forall x, y \in \Gamma. \quad (4.20)$$

Machen wir für (4.9) bzw. (4.11) den Lösungsansatz als Einfachschichtpotential $\Phi(x)$, so erhalten wir

- im Fall der Innenraumaufgabe (4.9) die Integralgleichung

$$\varphi + \mathcal{K}_1 \varphi = 2f, \quad (4.21)$$

- im Fall der Außenraumaufgabe (4.11) die Integralgleichung

$$\varphi - \mathcal{K}_1\varphi = -2f, \quad (4.22)$$

wobei

$$(\mathcal{K}_1\varphi)(x) = \int_{\Gamma} k_1(x, y)\varphi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma,$$

mit

$$k_1(x, y) = -\frac{2}{\omega_d} \frac{\langle \nu(x), x - y \rangle}{|x - y|^d}.$$

Beachte: In Abschnitt 3.4 hatten wir (für $d = 2$) den Kern

$$-\frac{1}{\pi} \frac{\langle \nu(y), x - y \rangle}{|x - y|^2}$$

zu verwenden.

Satz 4.13 *Es sei (4.20) erfüllt.*

- Beide Integralgleichungen (4.21) und (4.22) haben höchstens eine Lösung $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma)$ mit $\int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = 0$.
- Der Operator $\mathcal{K}_1 : \mathbf{C}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{C}(\Gamma)$ ist kompakt.
- Die Gleichung (4.21) bzw. (4.22) besitzt genau dann eine Lösung $\varphi \in \mathbf{C}(\Gamma)$, wenn $f \in \mathbf{C}(\Gamma)$ der Bedingung $\int_{\Gamma} f d\Gamma = 0$ genügt.

4.6 Das Doppelschichtpotential

Allgemein definiert man den **Dipolkern** als

$$k_D(x, y) = 2 \frac{\partial s(x, y)}{\partial \nu_y} = 2 \langle \nu(y), \nabla_y s(x, y) \rangle$$

und das **Doppelschichtpotential** mit der Belegung $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$\Phi_D(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial s(x, y)}{\partial \nu_y} \varphi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma.$$

Beispiel 4.14 Für $\varepsilon \geq 0$ seien $\Gamma^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, x_3 = \varepsilon\}$ und

$$\Phi_\varepsilon = \int_{\Gamma^\varepsilon} s(x, y) \varphi_\varepsilon(y) d\Gamma_y^\varepsilon,$$

$\varphi_\varepsilon(y_1, y_2, \varepsilon) = \varphi(y_1, y_2, 0)$, $y \in \Gamma^\varepsilon$. Es folgt

$$\Phi_\varepsilon(x) = \int_0^1 \int_0^1 s(x, y + \varepsilon \nu(y)) \varphi(y_1, y_2, 0) dy_1 dy_2, \quad \nu(Y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_0(x)}{\varepsilon} = \int_\Gamma \frac{\partial s(x, y)}{\partial \nu_y} \varphi(y) d\Gamma_y = \Phi_D(x)$$

mit $\Gamma = \Gamma^0$. Deshalb nennt man $\Phi_D(x)$ Doppelschichtpotential.

Im Weiteren sei

$$s(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x-y| & : d = 2, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} & : d = 3, \end{cases}$$

also

$$k_D(x, y) = -\frac{2}{\omega_d} \frac{\langle \nu(y), y-x \rangle}{|x-y|^d}, \quad \Phi_D(x) = -\frac{1}{\omega_d} \int_\Gamma \frac{\langle \nu(y), y-x \rangle}{|x-y|^d} \varphi(y) dy.$$

Außerdem sei wieder folgende bedingung erfüllt:

$$\exists \lambda \in (0, 1] : |\langle \nu(x), x-y \rangle| \leq \text{const} |x-y|^{1+\lambda} \quad \forall x, y \in \Gamma. \quad (4.23)$$

- Wir betrachten die folgende Situation:

- $x^0 \in \Gamma$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap U_\varepsilon(x^0)$,
- $\Gamma_\varepsilon = \{\beta(x') = (x', g(x')) : x' \in S_\varepsilon(x^0)\}$, wobei

$$S_\varepsilon(x^0) \subset \{\text{Tangentenebene bzw. Tangente an } \Gamma \text{ in } x^0\}.$$

Es gilt dann

- (i) $\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla g(x')|^2}} \begin{bmatrix} -\nabla g(x') \\ 1 \end{bmatrix}$, $x = \beta(x') \in \Gamma_\varepsilon$,
- (ii) $|g(x')| \leq \text{const} |x' - x^0|^{1+\lambda}$, $x' \in S_\varepsilon$,
- (iii) $|\langle \nabla g(x'), x' - x^0 \rangle| \leq \text{const} |x' - x^0|^{1+\lambda}$, $x' \in S_\varepsilon$.

Satz 4.15 Sei (4.23) erfüllt. Dann ist

$$\int_\Gamma |k_D(x, y)| d\Gamma_y \leq \text{const} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Folgerung 4.16 Ist (4.23) erfüllt, so existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$|\Phi_D(x)| \leq c \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

In Analogie zu Satz 3.5 kann man folgenden Satz beweisen.

Satz 4.17 Es sei (4.23) erfüllt und $k(x, y)$ besitze die Darstellung

$$k(x, y) = \frac{\ell(x, y)}{|x-y|^{d-\lambda-1}}, \quad x, y \in \Gamma, \quad x \neq y,$$

wobei positive Konstanten $c_{\ell,j}$, $j = 1, 2, 3$, existieren mögen, so dass $|\ell(x, y)| \leq c_{\ell,1}$, $x, y \in \Gamma$, und

$$|\ell(x, y) - \ell(x^0, y)| \leq c_{\ell,2} \frac{|x - x^0|}{|x - y|}$$

für alle $x, y, x^0 \in \Gamma$ mit $|x - y| > c_{\ell,3}|x - x^0|$ gilt. Dann ist der Operator

$$\mathcal{K} : \mathbf{C}(\Gamma) \longrightarrow \mathbf{C}(\Gamma), \quad v p \mapsto \int_{\Gamma} k(\cdot, y) \varphi(y) d\Gamma_y$$

linear und beschränkt.

Satz 4.18 *Es seien (4.23) erfüllt und*

$$(\mathcal{K}_D \varphi)(x) = \int_{\Gamma} k_D(x, y) \varphi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma.$$

Dann gilt $\mathcal{K}_D \in \mathcal{L}(\mathbf{C}(\Gamma), \mathbf{C}^\lambda(\Gamma))$.

Folgerung 4.19 *Unter der Voraussetzung (4.23) sind die Operatoren $\mathcal{K}_D : \mathbf{C}(\Gamma) \longrightarrow \mathbf{C}(\Gamma)$ und $\mathcal{K}_D : \mathbf{C}^\alpha(\Gamma) \longrightarrow \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$, $\alpha \in (0, \lambda]$, kompakte Operatoren.*

- Für $0 < |\alpha| < \alpha_0$, $\alpha_0 > 0$ - hinreichend klein, und $x^0 \in \Gamma$ definieren wir

$$\Psi(\alpha) = \Psi(\alpha, x^0) = \Phi_D(x^0 + \alpha\nu(x^0)).$$

Satz 4.20 *Sind (4.23) für $x = x^0 \in \Gamma^o$ erfüllt und $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma)$ in x^0 stetig, so existieren die Grenzwerte $\Psi(\pm 0)$, wobei*

$$\Psi(+0) - \Psi(-0) = \varphi(x^0) \quad \text{und} \quad \Psi(+0) + \Psi(-0) = (\mathcal{K}\varphi)(x^0)$$

gilt.

- Sind $x^0 \in \Gamma^o$ und $U_\varepsilon(x^0)$ eine solche Umgebung, so dass Γ diese Umgebung in die offenen Mengen $U_\varepsilon^+(x^0)$ und $U_\varepsilon^-(x^0)$ zerlegt, so definieren wir

$$\Phi_D^\pm(x) = \begin{cases} \Phi_D(x) & : x \in U_\varepsilon^\pm(x^0), \\ \lim_{\alpha \rightarrow +0} \Phi_D(x \mp \alpha\nu(x)) & : x \in \Gamma \cap U_\varepsilon(x^0). \end{cases}$$

Nach Satz 4.20 gilt dann

$$\Phi_D^+(x^0) - \Phi_D^-(x^0) = -\varphi(x^0), \quad (4.24)$$

$$\Phi_D^+(x^0) + \Phi_D^-(x^0) = (\mathcal{K}\varphi)(x^0) \quad (4.25)$$

bzw.

$$\Phi_D^\pm(x^0) = \mp \frac{1}{2} \varphi(x^0) + \frac{1}{2} (\mathcal{K}\varphi)(x^0). \quad (4.26)$$

Bemerkung 4.21 *Sei (4.23) erfüllt.*

- (a) Sind $x^0 \in \Gamma^\circ$ und $\varphi \in \mathbf{C}(\Gamma)$, so sind Φ_D^\pm auf $U_\varepsilon^\pm(x^0) \cup (\Gamma \cap U_\varepsilon(x^0))$ gleichmäßig stetig. Ist Γ geschlossen, so sind $\Phi_D^\pm : \overline{\Omega}_\pm \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.
- (b) Sind Γ geschlossen und $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ für ein $\alpha \in (0, \lambda]$, so gilt $\Phi_D^\pm \in \mathbf{C}^\alpha(\overline{\Omega}_\pm)$.
- (c) Eine zu (b) analoge Aussage gilt auch für $x^0 \in \Gamma^\circ$ und $U_\varepsilon^\pm(x^0) \cup (\Gamma \cap U_\varepsilon(x^0))$ statt $\overline{\Omega}_\pm$.

Beispiel 4.22 $\Phi_D(x)$ ist für $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 0\}$ und

$$\varphi(x_1, 0) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq x_1 \leq 1, \\ 0 & : -1 \leq x_1 < 0, \end{cases}$$

im Punkt $x^0 = \Theta$ unstetig.

Folgerung 4.23 Sind Ω_+ und Ω_- das Innen- bzw. Außengebiet zu Γ und $\varphi \equiv 1$ auf Γ , so gilt

$$\Phi_D(x) = \begin{cases} 0 & : x \in \Omega_-, \\ -1 & : x \in \Omega_+. \end{cases}$$

- Wir erklären $\nabla\varphi(x)$ für $x \in \Gamma$: Für $\alpha \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ - hinreichend klein, $x^0 \in \Gamma$ setzen wir $\varphi(x^0 + \alpha\nu(x^0)) = \varphi(x^0)$. Damit ist $\nabla\varphi(x^0)$ für alle $x^0 \in \Gamma$ erklärt. Offenbar gilt $\nabla\varphi(x^0) \perp \nu(x^0)$, d.h., $\nabla\varphi(x^0)$ liegt in der Tangentialebene zum Punkt x^0 bzgl. Γ . Für $\mu \in (0, 1]$ schreiben wir $\varphi \in \mathbf{C}^{1,\mu}(\Gamma)$, falls $\nabla\varphi \in \mathbf{C}^\mu(\Gamma, \mathbb{R}^d)$ erfüllt ist. Es gilt nun der folgende Satz.

Satz 4.24 Es seien (4.23) erfüllt, Γ geschlossen und $\varphi \in \mathbf{C}^{1,\mu}(\Gamma)$ für ein $\mu \in (0, 1]$. Dann besitzt der Gradient $\nabla\Phi_D(x)$, $x \in \Omega_\pm$, stetige Fortsetzungen $\nabla\Phi_D^\pm(x)$ auf $x \in \Gamma$. Dabei gilt für $x \in \Gamma$

$$\nabla\Phi_D^+(x) - \nabla\Phi_D^-(x) = -\nabla\varphi(x)$$

und

$$\nabla\Phi_D^+(x) + \nabla\Phi_D^-(x) = \frac{2}{\omega_d} \int_\Gamma \left[\frac{\nu(y)}{|y-x|^d} - d \frac{\langle \nu(y), y-x \rangle \langle y-x \rangle}{|y-x|^{d+2}} \right] \varphi(y) d\Gamma_y,$$

wobei das letzte Integral im Allg. ein hypersinguläres Integral ist (vgl. Abschnitt 4.9). Die Normalableitung des Doppelschichtpotentials ist beim Durchgang durch Γ stetig, d.h.

$$\frac{\partial\Phi_D^+(x)}{\partial\nu} = \frac{\partial\Phi_D^-(x)}{\partial\nu}, \quad x \in \Gamma.$$

Dabei gilt

$$\frac{\partial\Phi_D^\pm(x)}{\partial\nu} = \frac{1}{\omega_d} \int_\Gamma \left[\frac{\langle \nu(y), \nu(x) \rangle}{|y-x|^d} - d \frac{\langle \nu(y), y-x \rangle \langle y-x, \nu(x) \rangle}{|y-x|^{d+2}} \right] \varphi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma.$$

Einige Bemerkungen zu Satz 4.24:

(a) Nach Folgerung 4.23 ist für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ nahe bei Γ

$$\frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} \left[\frac{\nu(y)}{|y-x|^d} - d \frac{\langle \nu(y), y-x \rangle (y-x)}{|y-x|^{d+2}} \right] \varphi(x) d\Gamma_y = 0,$$

so dass für solche x gilt

$$\nabla \Phi_D(x) = \frac{2}{\omega_d} \int_{\Gamma} \left[\frac{\nu(y)}{|y-x|^d} - d \frac{\langle \nu(y), y-x \rangle (y-x)}{|y-x|^{d+2}} \right] [\varphi(y) - \varphi(x)] d\Gamma_y. \quad (4.27)$$

(b) Wegen $|\varphi(y) - \varphi(x) - \langle \nabla \varphi(x), y-x \rangle| \leq \text{const} |y-x|^{1+\mu}$ folgt, dass das Integral in (4.27) auch für $x \in \Gamma$ als Cauchysches Hauptwertintegral existiert.

(c) Die Aussage zur Stetigkeit der Normalableitung kann wie folgt abgeschwächt werden: Wir definieren

$$\psi(\alpha) := \langle \nabla \Phi_D(x^0 + \alpha \nu(x^0)), \nu(x^0) \rangle, \quad \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

und setzen voraus, dass $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma)$, dass (4.23) erfüllt ist und dass $x^0 \in \Gamma^o$. Ist φ in x^0 stetig und $\mu = 1$ oder gilt $|\varphi(x) - \varphi(x^0)| \leq \text{const} |x-x^0|^\mu$ und $\lambda + \mu > 1$, so ist

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} [\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)] = 0.$$

4.7 Die Dirichlet-RWA und das Doppelschichtpotential

Für (4.8) und (4.10) machen wir den Lösungsansatz $u(x) = \Phi_D(x)$ mit einer gesuchten Belegung $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi_D(x) = -\frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(y), y-x \rangle}{|y-x|^d} \varphi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma.$$

Man erhält die Integralgleichungen

$$\varphi - \mathcal{K}_D \varphi = -2f \quad (4.28)$$

für die Innenraumaufgabe (4.8) und

$$\varphi + \mathcal{K}_D \varphi = 2f \quad (4.29)$$

für die Außenraumaufgabe (4.10).

Satz 4.25 *Es seien (4.23) für ein $\Lambda > \frac{1}{2}$ erfüllt, $\Gamma = \partial\Omega = \partial\Omega_+$ und $f \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma)$. Dann hat die Integralgleichung (4.28) höchstens eine Lösung $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma)$. Zwei Lösungen von (4.29) unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.*

Wir modifizieren die Gleichung (4.29):

$$\varphi + \mathcal{K}_D \varphi = 2f + a, \quad \int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = b. \quad (4.30)$$

Dabei sind neben f auch $b \in \mathbb{R}$ gegeben und neben φ auch $a \in \mathbb{R}$ gesucht.

Satz 4.26 *Es seien (4.23) erfüllt und $f \in \mathbf{C}(\Gamma)$. Dann besitzen (4.28) und (4.30) eine eindeutige Lösung $\varphi \in \mathbf{C}(\Gamma)$ bzw. $(\varphi, a) \in \mathbf{C}(\Gamma) \times \mathbb{R}$. Ist $f \in \mathbf{C}^\mu(\Gamma)$ für ein $\mu \in (0, \lambda]$, so gilt auch $\varphi \in \mathbf{C}^\mu(\Gamma)$.*

4.8 Die Neumann-RWA und das Doppelschichtpotential

Für eine in $\Omega = \Omega_+$ harmonische Funktion $u(x)$ gilt die Darstellungsformel ($\Gamma = \partial\Omega$)

$$u(x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} s(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} d\Gamma_y + \frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(y), y - x \rangle}{|y - x|^d} u(y) d\Gamma_y, \quad x \in \Omega. \quad (4.31)$$

Wir definieren deshalb für die gegebenen Neumann-Daten $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ und die unbekanntenen Dirichlet-Daten $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} s(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} d\Gamma_y + \frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(y), y - x \rangle}{|y - x|^d} u(y) d\Gamma_y =: \Phi_E(x) - \Phi_D(x), \quad x \in \Omega.$$

Für das Innenraumproblem (4.9) erhält man damit die Integralgleichung

$$u + \mathcal{K}_D u = 2\Phi_E. \quad (4.32)$$

Übungsaufgabe 4.27 Zeigen Sie, dass das Neumann-Problem für den Außenraum (4.11) zu der Integralgleichung

$$u - \mathcal{K}_D u = -2\Phi_E \quad (4.33)$$

für die unbekanntenen Dirichlet-Werte von u führt.

Wir betrachten nochmal die Dirichlet-Aufgabe (4.8) für den Innenraum. Aus der Darstellungsformel (4.31) folgt

$$u(x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} s(x, y) \varphi(y) d\Gamma_y + \tilde{f}(x), \quad x \in \Omega_+,$$

mit $\varphi(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial \nu}$, $x \in \Gamma$, und $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(y), y - x \rangle}{|y - x|^d} f(y) d\Gamma_y$. Es folgt

$$\frac{2}{\omega_d} \int_{\Gamma} s(x, y) \varphi(y) d\Gamma_y = g(x) := f(x) + (\mathcal{K}_D f)(x), \quad x \in \Gamma$$

(vgl. (4.15)).

4.9 Hypersinguläre Integrale

Für $-\infty < a < b < \infty$ definieren wir das **Finite-Part-Integral** oder **hypersinguläre Integral**

$$\text{f.p.} \int_a^b \frac{\varphi(y)}{(y-x)^2} dy := \text{p.p.} \int_a^b \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{(y-x)^2} dy + \varphi(x) \text{f.p.} \int_a^b \frac{dy}{(y-x)^2}, \quad x \in (a, b),$$

falls das Hauptwertintegral auf der rechten Seite existiert. Dabei ist

$$\text{f.p.} \int_a^b \frac{dy}{(y-x)^2} = \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}.$$

Folgende Eigenschaften dieses Begriffes lassen sich ableiten:

- Für $\varphi \in \mathbf{C}^{1,\alpha}[a, b]$ gilt

$$\text{f.p.} \int_a^b \frac{\varphi(y)}{(y-x)^2} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^b \right) \frac{\varphi(y)}{(y-x)^2} dy - \frac{2\varphi(x)}{\varepsilon} \right], \quad x \in (a, b).$$

und

$$\text{f.p.} \int_a^b \frac{\varphi(y)}{(y-x)^2} dy = \frac{\varphi(a)}{a-x} - \frac{\varphi(b)}{b-x} + \text{p.p.} \int_a^b \frac{\varphi'(y)}{y-x} dy, \quad x \in (a, b). \quad (4.34)$$

- Aus Formel (4.34) erhalten wir (vgl. auch Abschn. 4.4)

$$\text{f.p.} \int_{-1}^1 \frac{U_n(y) \sqrt{1-y^2}}{(y-x)^2} dy = -(n+1) \text{p.p.} \int_{-1}^1 \frac{T_{n+1}(y)}{y-x} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\pi(n+1)U_n(x),$$

$x \in (-1, 1)$. Definieren wir also

$$(\mathcal{H}u)(x) = -\text{f.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(y) \sqrt{1-y^2}}{(y-x)^2} dy, \quad -1 < x < 1,$$

so ist \mathcal{H} auf dem vollständigen Orthonormalsystem $(p_n^\varphi)_{n=0}^\infty$ mit $p_n^\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} U_n(x)$ in \mathbf{L}_φ^2 , $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$, wohldefiniert. \mathcal{H} lässt sich eindeutig zu einem linearen und beschränkten Operator $\mathcal{H} : \mathbf{L}_\varphi^{2,s+1}, \mathbf{L}_\varphi^{2,s}$, $s \geq 0$, fortsetzen, wobei $\|\mathcal{H}\|_{\mathbf{L}_\varphi^{2,s+1} \rightarrow \mathbf{L}_\varphi^{2,s}} = 1$ gilt.

- Der Operator \mathcal{D} der verallgemeinerten Differentiation ist ein Element von $\mathcal{L}(\mathbf{L}_\sigma^{2,s+1}, \mathbf{L}_\varphi^{2,s})$, $s \geq 0$. Dabei gilt

$$\mathcal{D}u = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \langle u, p_{n+1}^\sigma \rangle_\sigma p_n^\varphi, \quad u \in \mathbf{L}_\sigma^{2,1}.$$

Ferner sit

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}\mathcal{S} : \mathbf{L}_\varphi^{2,s+1} \longrightarrow \mathbf{L}_{\sigma,0}^{2,s+1} \longrightarrow \mathbf{L}_\varphi^{2,s},$$

wobei $\mathbf{L}_{\sigma,0}^{2,s} = \left\{ u \in \mathbf{L}_\sigma^{2,s} : \langle u, p_0^\sigma \rangle_\sigma = 0 \right\}$ und

$$(\mathcal{S}u)(x) = \text{p.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(y) dy}{y-x}, \quad -1 < x < 1.$$

Im Fall $a = -\infty$, $b = \infty$ definieren wir

$$\text{f.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{(y-x)^2} dy := \lim_{A, B \rightarrow \infty} \text{f.p.} \int_{-B}^A \frac{f(y)}{(y-x)^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für $f \in \mathbf{C}_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{BC}(\mathbb{R})$ gilt dann

$$\text{f.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{(y-x)^2} dy = \text{p.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y) - f(x)}{(y-x)^2} dy = \text{p.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(y) dy}{y-x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

und

$$\text{f.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{(y-x)^2} dy = \frac{d}{dx} \text{p.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y) dy}{y-x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

falls das Cauchysche Hauptwertintegral für wenigstens ein $x \in \mathbb{R}$ existiert.

Index

- Argumentprinzip, 9
- biharmonische Gleichung, 36
- Cauchysche Integralformel, 7
- Cauchysche Koeffizientenformel, 7
- Cauchyscher Integralsatz, 7
- Darstellungsformel
 - für harmonische Funktionen, 49
- Dipolkern, 27, 44
- Dipoloperator, 27
- Dipolpotential, 27
- Dirichletsche RWA, 39
- Doppelschichtpotential, 27, 44
- Einfachschichtpotential, 36
- Finite-Part-Integral, 49
- Formeln von Sochozki-Plemelj, 13
- Fundamentallösung, 35
- ganze Funktion, 7
- Gebiet, 8
- Gebietstreue, 8
- harmonische Funktion, 6
- Hilbertsches RWP, 17
- holomorphe Funktion, 5
- hypersinguläres Integral, 49
- Identitätssatz, 8
- Index einer Funktion, 17
- isolierte Singularität, 9
- konforme Abbildung, 10
- konjugiert harmonische Funktion, 6
- Kurve, 6
- Laplace-Gleichung, 35
- Laurentreihenentwicklung, 9
- Maximumprinzip, 8
- meromorphe Funktion, 9
- Neumannsche RWA, 39
- nichttangentialer Grenzwert, 13
- Pol der Ordnung k , 9
- Potenzreihe, 5
- Prinzip des Randes, 23
- Ränderzuordnung, 10
- Residuensatz, 9
- Riemann-Hilbertsches RWP, 20
- Riemannscher Abbildungssatz, 10
- Satz von Liouville, 7
- Satz von Morera, 8
- Schwarzsches Lemma, 9
- Schwarzsches Spiegelungsprinzip, 8
- Singularitätenfunktion, 35
- stückweise glatte Kurve, 6
- stückweise holomorphe Funktion, 14
- uneigentliches Integral, 36
- Weg, 6