

Skript zur Vorlesung
Randintegralmethoden

SS 2014

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einiges aus der Funktionentheorie | 7 |
| 1.1 | Holomorphe und harmonische Funktionen | 7 |
| 1.2 | Cauchy'scher Integralsatz | 8 |
| 1.3 | Identitätssatz, Gebietstreue, Maximumprinzip | 10 |
| 1.4 | Laurentreihenentwicklung, Residuensatz, Argumentprinzip | 10 |
| 1.5 | Konforme Abbildungen | 11 |
| 2 | Randwerte Cauchy'scher Integrale | 13 |
| 3 | Randwertprobleme der Funktionentheorie | 17 |
| 3.1 | Das Hilbertsche Randwertproblem | 17 |
| 3.2 | Das Riemann-Hilbertsche Randwertproblem | 20 |
| 3.3 | Das Doppelschichtpotential | 21 |
| 4 | Die Integralgleichungsmethode | 27 |
| 4.1 | Singularitätenfunktionen | 27 |
| 4.2 | Das Einfachschichtpotential | 28 |
| 4.3 | Die Dirichlet-RWA und das Einfachschichtpotential | 30 |
| 4.4 | Die Neumann-RWA und das Einfachschichtpotential | 32 |
| 4.5 | Das Doppelschichtpotential | 32 |
| 4.6 | Die Dirichlet-RWA und das Doppelschichtpotential | 36 |
| 4.7 | Die Neumann-RWA und das Doppelschichtpotential | 36 |
| 4.8 | Hypersinguläre Integrale | 37 |

Literaturverzeichnis

- [1] W. Hackbusch, *Integralgleichungen, Theorie und Numerik*, Teubner, Stuttgart, 1989.
- [2] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer Verlag, New York, 1999.
- [3] N. I. Muskhelishwili, *Singular Integral Equations*, P. Noordhoff N. V., Groningen, 1953.

Kapitel 1

Einiges aus der Funktionentheorie

1.1 Holomorphe und harmonische Funktionen

Mit \mathbb{C} bezeichnen wir die Menge der komplexen Zahlen und mit $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt im Punkt $z_0 \in G$ **komplex differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert und endlich ist. Die Funktion f nennt man in G **holomorph** (bzw. analytisch), wenn sie in jedem Punkt $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist. Sie heißt im Punkt $z_0 \in G$ holomorph (bzw. analytisch), wenn sie in einer Umgebung $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\} \subset G$ (für ein $\varepsilon > 0$) des Punktes z_0 holomorph ist.

Satz 1.1 *Hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit gegebenen $a_n \in \mathbb{C}$ den Konvergenzradius*

$r > 0$, so ist die Funktion $f : U_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ holomorph, und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad \forall z \in U_r(z_0).$$

Satz 1.2 *Ist die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ im Punkt $z_0 \in G$ holomorph, so lässt sie sich in diesem Punkt in eine Potenzreihe entwickeln, d.h. es existiert ein $r > 0$, so dass*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in U_r(z_0) \tag{1.1}$$

mit eindeutig bestimmten $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, nämlich $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, gilt.

Jede Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ können wir als Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ betrachten und außerdem in der Form

$$f(z) = u(x, y) + \mathbf{i}v(x, y) \quad \text{mit} \quad z = x + \mathbf{i}y \in G$$

schreiben, wobei $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen auf $G \subset \mathbb{R}^2$ sind und wir die komplexe Zahlenebene \mathbb{C} mit dem zweidimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^2 identifizieren.

Satz 1.3 Die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ (reell) differenzierbar ist und Real- sowie Imaginärteil von f auf G den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2)$$

genügen.

Es zeigt sich, dass jede holomorphe Funktion automatisch unendlich oft differenzierbar ist (vgl. Satz 1.2). Aus den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen (1.2) folgt dann, dass sowohl Real- als auch Imaginärteil von f **harmonische** Funktionen sind, d.h. es gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{und} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{auf } G. \quad (1.3)$$

Ist umgekehrt $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, d.h. sie ist mindestens zweimal stetig differenzierbar und genügt auf G der ersten der beiden Gleichungen (1.3), so existiert eine bis auf eine (reelle) Konstante eindeutig bestimmte (harmonische) Funktion $v : G \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f = u + iv : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. Die Funktion v heißt zu u **konjugiert harmonisch**.

Beispiel 1.4 Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ist harmonisch. Da die Funktion $f(z) = \ln |z| + i\varphi$ (mit $z = |z|e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < \pi$) in $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ bekanntlich holomorph ist (mit $f'(z) = z^{-1}$), müsste die zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x, y)$ bis auf eine additive reelle Konstante gleich $v(x, y) = v(z) = \varphi$ sein. Diese Funktion lässt sich aber nicht auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig fortsetzen, so dass u auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ keine konjugiert harmonische Funktion besitzt.

1.2 Cauchy'scher Integralsatz

Auch hier sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge der komplexen Zahlen. Unter einem **Weg** γ in G verstehen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ des Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Der Weg γ heißtstückweise glatt, wenn die Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ stückweise stetig differenzierbar ist und mit eventueller Ausnahme höchstens endlich vieler Punkte $|\gamma'(t)| \neq 0$, $t \in [a, b]$, gilt. Für einen stückweise glatten Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ nennt man $\Gamma := \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ eine **stückweise glatte Kurve**. Diese Kurve heißt **doppelpunktfrei**, wenn $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ injektiv ist, und **geschlossen**, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.

Es seien nun $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\} \subset \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Kurve und $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist das Kurvenintegral von f entlang des Weges γ bzw. entlang der Kurve Γ definiert durch

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Wir formulieren den Cauchy'schen Integralsatz für die folgende Situation: Es seien Γ_j , $j = 0, 1, \dots, m$, stückweise glatte, doppelpunktfreie und geschlossene Kurven ($m = 0$ ist zugelassen), wobei die Kurve Γ_0 so orientiert ist, dass das von ihr begrenzte und beschränkte Gebiet links liegt, bei den restlichen Kurven dagegen rechts. Die einzelnen Kurven mögen sich nicht überschneiden und die Kurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ mögen innerhalb von Γ_0 liegen, aber kein Γ_j innerhalb einer anderen Kurve Γ_k , $k = 1, \dots, m$. Die Abbildung 1.1 zeigt eine mögliche Situation im Fall $m = 2$.

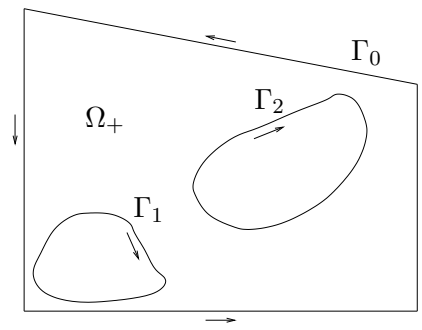


Abbildung 1.1

Das Gebiet, welches links von allen Kurven Γ_j , $j = 0, 1, \dots, m$, liegt, bezeichnen wir mit Ω_+ , die Vereinigung $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$ aller Kurven mit Γ und $\mathbb{C} \setminus (\Omega_+ \cup \Gamma)$ mit Ω_- . Ferner sei

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \sum_{j=0}^m \int_{\Gamma_j} f(z) dz.$$

Satz 1.5 (Cauchy'scher Integralsatz, Cauchy'sche Integralformel) Seien $f : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f : \Omega_+ \cup \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \begin{cases} f(a) & : a \in \Omega_+, \\ 0 & : a \in \Omega_-. \end{cases}$$

Für die Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung (1.1) einer in z_0 analytischen Funktion ergibt sich die **Cauchy'sche Koeffizientenformel**

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_{\rho}(z_0)} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei $0 < \rho < r$. Der Kreis $\partial U_{\rho}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ ist dabei als mathematisch positiv orientiert zu betrachten.

Eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion nennt man **ganze Funktion**.

Satz 1.6 (Liouville) Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Der folgende Satz stellt eine Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes dar.

Satz 1.7 (Morera) Ist die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und gilt für jede in G liegende Dreiecksfläche mit dem Rand $\Gamma \subset G$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

so ist f holomorph in G .

Satz 1.8 (Schwarz'sches Spiegelungsprinzip) Es seien $G \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$, $[a, b] = \overline{G} \cap \mathbb{R}$ (siehe Abbildung 1.2), $f : G \cup (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f(x) \in \mathbb{R} \forall x \in (a, b)$. Dann ist

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & : \text{Im } z \geq 0, \\ \overline{f(\bar{z})} & : \text{Im } z < 0, \end{cases}$$

auf $\tilde{G} := G \cup (a, b) \cup \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in G\}$ holomorph.

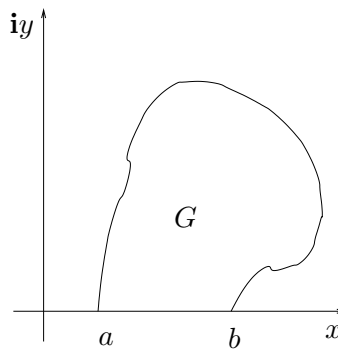


Abbildung 1.2

1.3 Identitätssatz, Gebietstreue, Maximumprinzip

Unter einem **Gebiet** verstehen wir eine offene und zusammenhängende Menge $G \subset \mathbb{C}$.

Satz 1.9 (Identitätssatz) Sind f und g zwei auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, die auf einer Teilmenge von G , die wenigstens einen Häufungspunkt in G besitzt, übereinstimmen, so sind f und g auf dem gesamten Gebiet G identisch.

Satz 1.10 (Gebietstreue) Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem Gebiet G holomorph und nicht konstant, so ist auch $f(G) := \{f(z) : z \in G\}$ ein Gebiet.

Satz 1.11 (Maximumprinzip) Ist f auf dem Gebiet G holomorph und **nicht** konstant, so existiert **kein** Punkt $z_0 \in G$ mit der Eigenschaft

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in G.$$

Ist also zusätzlich $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so kann $|f(z)|$ nur auf dem Rand von G sein Maximum annehmen.

Satz 1.12 (Schwarz'sches Lemma) Es seien $f : U_1(0) \rightarrow U_1(0)$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in U_1(0)$. Existiert ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $|f(z_0)| = |z_0|$ oder ist $|f'(0)| = 1$, so ist f einfach eine Drehung um einen Winkel $\theta \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt $f(z) = e^{i\theta}z$ für alle $z \in U_1(0)$.

1.4 Laurentreihenentwicklung, Residuensatz, Argumentprinzip

Ist f in $U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ holomorph, so heißt z_0 **isolierte Singularität** von f . Für $0 \leq r < R$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $K_{r,R}(z_0)$ den Kreisring $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.

Satz 1.13 (Laurentreihenentwicklung) Ist f im Kreisring $K_{r,R}(z_0)$ holomorph, so ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n := \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (1.4)$$

für alle $z \in K_{r,R}(z_0)$, wobei für jedes ρ mit $r < \rho < R$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

gilt.

Sind z_0 eine isolierte Singularität von f und (1.4) die Laurentreihenentwicklung von f in einer punktierten Kreisscheibe $K_{0,R}(z_0)$, so nennt man den Koeffizienten $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{U_\rho(z_0)} f(z) dz$ Residuum der Funktion f im Punkt z_0 , $c_{-1} =: \text{res}_{z_0} f$.

Satz 1.14 (Residuensatz) *Es seien f in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten holomorph, $\Gamma \subset G$ eine doppelunktpunktfreie, stückweise glatte, geschlossene Kurve, auf der keine Singularität von f liegt und innerhalb derer (auf der linken Seite von Γ , Orientierung beachten) die isolierten Singularitäten z_1, \dots, z_m von f liegen. Dann gilt*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{res}_{z_k} f.$$

Die isolierte Singularität z_0 von f heißt **Pol der Ordnung** k von f ($k > 0$), wenn in (1.4) $c_{-k} \neq 0$ und $c_n = 0$ für alle $n < -k$ gilt. Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ bis auf Pole holomorph, so heißt f in G **meromorph**.

Satz 1.15 (Argumentprinzip) *Es seien f in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G meromorph und $\Gamma \subset G$ eine doppelunktpunktfreie, stückweise glatte, geschlossene Kurve, auf der keine Nullstellen und Pole von f liegen und die so orientiert ist, dass das von ihr begrenzte und beschränkte Gebiet links liegt. Ferner seien N und P die (entsprechend der Ordnung) Anzahlen der Nullstellen und Polstellen von f innerhalb von Γ . Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

1.5 Konforme Abbildungen

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **(lokal) konform** im Punkt $z_0 \in G$, falls f in z_0 holomorph mit $f'(z_0) \neq 0$ ist. Ist f in jedem Punkt $z \in G$ lokal konform, so nennen wir f **konform im Gebiet** G .

Satz 1.16 (Riemannscher Abbildungssatz) *Es seien G und G^* einfach zusammenhängende, echte Teilgebiete von \mathbb{C} . Dann gibt es eine konforme Abbildung $f : G \rightarrow G^*$, die außerdem bijektiv ist.*

Satz 1.17 (Ränderzuordnung) *Die Ränder der Gebiete G und G^* seien einfache (d.h. doppelunktpunktfreie) geschlossene stetige (d.h. durch einen Weg gegebene) Kurven, und $f : G \rightarrow G^*$ sei konform und bijektiv. Dann ist f auf \overline{G} stetig fortsetzbar, und $f : \overline{G} \rightarrow \overline{G^*}$ ist bijektiv.*

Kapitel 2

Randwerte Cauchy'scher Integrale

Nach dem Cauchyschen Integralsatz 1.5 gilt für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$ und für eine stetige Funktion $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$, die auf Ω holomorph ist

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & : z \in \Omega. \\ 0 & : z \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Allgemeiner betrachten wir jetzt für eine absolut integrierbare Funktion $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, d.h. $\int_{\Gamma} |\varphi(\zeta)| |dz| = \int_a^b |\varphi(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt < \infty$, die Funktion

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin \Gamma,$$

wobei Γ eine doppeltpunktfreie und stückweise glatte Kurve ist.

Beispiel 2.1 Wir berechnen $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ für $\Gamma = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und erhalten für $\operatorname{Im} z_0 > 0$ (vgl. Abbildung 2.1)

$$\Phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{b - z_0}{a - z_0} \right| + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2\pi}$$

sowie für $\operatorname{Im} z_0 < 0$ (vgl. Abbildung 2.2)

$$\Phi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{b - z_0}{a - z_0} \right| + \frac{\alpha_0 - \beta_0}{2\pi}.$$

Für $\zeta_0 \in (a, b)$ und $z \rightarrow \zeta_0$, $\operatorname{Im} z > 0$ folgt also

$$\Phi(z) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{b - \zeta_0}{\zeta_0 - a} + \frac{1}{2} =: \Phi^+(\zeta_0)$$

und für $z \rightarrow \zeta_0$, $\operatorname{Im} z < 0$

$$\Phi(z) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{b - \zeta_0}{\zeta_0 - a} - \frac{1}{2} =: \Phi^-(\zeta_0).$$

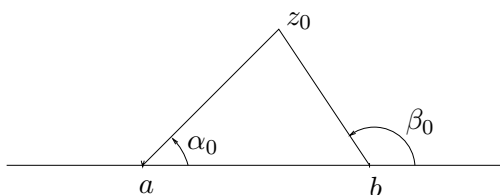


Abbildung 2.1

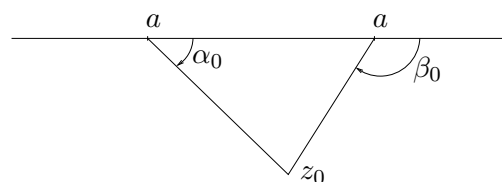


Abbildung 2.2

Satz 2.2 Ist $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ auf der stückweise glatten Kurve $\Gamma \subset \mathbb{C}$ absolut integrierbar, so ist die oben definierte Funktion $\Phi(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ holomorph.

Bemerkung 2.3 Im Fall einer beschränkten Kurve Γ ist $\Phi(z)$ auch in $z = \infty$ holomorph mit $\Phi(\infty) = 0$.

Übungsaufgabe 2.4 Man gebe für $R_0 > 1$ das Bild der Kreisscheibe $U_R(\frac{a+b}{2})$ mit $R = \frac{R_0|b-a|}{2}$ bei der Abbildung $f(z) = \frac{z-b}{z-a}$ an, wobei $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$.

Die Überlegungen aus Beispiel 2.1 lassen sich auf eine beliebige Strecke

$$\Gamma = [a, b] = \{a + t(b-a) : t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{C}$$

und ebenso auf eine beschränkte, offene, doppelungsfreie Kurve $\Gamma \subset \mathbb{C}$ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b ausdehnen. Die Abbildung $f(z) = \frac{z-b}{z-a}$ bildet dabei Γ auf einen (i.a. krummlinigen) Strahl $f(\Gamma)$ von ∞ nach 0 ab. Das Äußere einer Kreisscheibe, die Γ enthält und symmetrisch zur Strecke $[a, b]$ liegt, wird dabei auf das Innere eines Kreises abgebildet, der in der rechten Halbebene und symmetrisch zur reellen Achse liegt. Unter $\ln : \mathbb{C} \setminus f(\Gamma)$ wollen wir den holomorphen Zweig des natürlichen Logarithmus verstehen, der innerhalb dieses Kreises mit dem Hauptzweig des Logarithmus zusammenfällt. Wir erhalten dann

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z-b}{z-a} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \quad (2.1)$$

und

$$\Phi^+(\zeta_0) - \Phi^-(\zeta_0) = 1 \quad \forall \zeta_0 \in \Gamma^\circ. \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet $\Phi^\pm(\zeta_0)$ den Grenzwert von $\Phi(z)$ für $z \rightarrow \zeta_0$ und z links/rechts von Γ . Im Fall einer geschlossenen Kurve gilt wegen der Cauchyschen Integralformel

$$F(z) = \begin{cases} 1 & : z \in \Omega_+, \\ 0 & : z \in \Omega_-, \end{cases}$$

und somit ebenfalls (2.2).

Für das Weitere nehmen wir an, dass Γ eine glatte, doppelungsfreie Kurve ist, die in einer Umgebung eines jeden Punktes $\zeta_0 \in \Gamma^\circ$ eine Parametrisierung nach der Bogenlänge gestattet, für die

$$|\gamma(s_1) - \gamma(s_2)| \leq |s_1 - s_2| \leq c_1 |\gamma(s_1) - \gamma(s_2)| \quad (A)$$

mit einer Konstanten c_1 gilt. Dabei verstehen wir unter Γ° die Kurve Γ ohne die Endpunkte (im Fall einer nicht geschlossenen Kurve). Ferner sei $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar und mit evtl. Ausnahme von Anfangs- und Endpunkt der Kurve Γ lokal hölderstetig, d.h., für jedes $\zeta_0 \in \Gamma^\circ$ existieren ein $\delta > 0$, ein $\lambda \in (0, 1]$ und ein $c_0 > 0$ mit

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)| \leq c_0 |\zeta - \zeta_0|^\lambda \quad \forall \zeta \in \Gamma \cap U_\delta(\zeta_0).$$

Wir definieren $\Phi(\zeta_0)$ auch für $\zeta_0 \in \Gamma^\circ$ unter Verwendung des Cauchyschen Hauptwertes

$$\Phi(\zeta_0) = \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\Gamma \setminus U_\varepsilon(\zeta_0)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad \zeta \in \Gamma^\circ.$$

Mit $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}$ bezeichnen wir eine glatte Kurve von ζ_0 nach ∞ , die rechts von Γ liegt und senkrecht auf Γ steht. Ist nun $\ln(z - \zeta_0)$ ein für $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_0$ holomorpher Zweig des natürlichen Logarithmus, so gilt

$$\Phi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} [\ln(b - \zeta_0) - \ln(a - \zeta_0) + \pi i] \varphi(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \quad \forall \zeta_0 \in \Gamma^\circ, \quad (2.3)$$

wobei das Integral auf der rechten Seite zumindest im uneigentlichen Sinne existiert. Im Fall einer geschlossenen Kurve Γ verschwinden die \ln -Terme in (2.3).

Satz 2.5 *Sind Γ eine glatte, doppelpunktfreie Kurve und $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ absolut integrierbar und lokal hölderstetig, so besitzt*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma,$$

in allen Punkten $\zeta_0 \in \Gamma^\circ$ nichttangente Grenzwerte $\Phi^\pm(\zeta_0)$, wobei die Formeln von **Sochozki-Plemelj**

$$\Phi^\pm(\zeta_0) = \pm \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0) + \Phi(\zeta_0) \quad (2.4)$$

gültig sind.

Nichttangentialer Grenzwert bedeutet dabei, dass z lediglich innerhalb eines Doppelsektors $W(\zeta_0, \omega)$ mit $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ gegen ζ_0 strebt, und zwar links von Γ für $\Phi^+(\zeta_0)$ und rechts von Γ für $\Phi^-(\zeta_0)$. Unter $W(\zeta_0, \omega)$ verstehen wir dabei die Menge der $z \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\}$, für die der Winkel zwischen $z - \zeta_0$ und der Geraden durch ζ_0 , die senkrecht auf Γ steht, betragsmäßig kleiner als ω ist.

Im Weiteren sei Γ glatt, doppelpunktfrei und beschränkt. Für $\alpha \in (0, 1]$ verstehen wir unter $\mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ den Banachraum der zum Exponenten α hölderstetigen Funktionen $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Norm

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup \left\{ \frac{|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)|}{|\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha} : \zeta_1, \zeta_2 \in \Gamma, \zeta_1 \neq \zeta_2 \right\},$$

wobei $\|f\|_\infty = \sup \{|f(\zeta)| : \zeta \in \Gamma\}$ zu setzen ist. Wir betrachten nun das folgende Randwertproblem: Gegeben sei eine Funktion $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ und gesucht eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, so dass

$$F(\infty) = 0 \quad \text{und} \quad F^+(\zeta) - F^-(\zeta) = \varphi(\zeta) \quad \forall \zeta \in \Gamma^\circ \quad (2.5)$$

gilt. Wir nennen eine Funktion $F(z)$ **stückweise holomorph** bzgl. Γ , wenn $F : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist, F in $\zeta_0 \in \Gamma \setminus \Gamma_s$ von links und von rechts stetig ist und für jedes $z_0 \in \Gamma_s$ ein $\beta \in (0, 1)$, ein $\varepsilon > 0$ und ein $c > 0$ existieren, so dass

$$|F(z)| \leq \frac{c}{|z - z_0|^\beta} \quad \forall z \in (\mathbb{C} \setminus \Gamma) \cap U_\varepsilon(z_0)$$

gilt. Dabei sei $\Gamma_s = \Gamma_s(F)$ eine endliche Menge von Punkten der Kurve Γ . Die Menge aller bzgl. Γ stückweise holomorphen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{H}(\Gamma)$.

Übungsaufgabe 2.6 *Man zeige: Sind $F \in \mathcal{H}(\Gamma)$ und $F^+(\zeta) - F^-(\zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in \Gamma_s$, so ist $F(z)$ eine ganze Funktion.*

Im Weiteren seien

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \quad \text{und} \quad \Phi(\zeta_0) = \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \quad \text{für } \zeta_0 \in \Gamma^\circ.$$

Der folgende Satz verschärft die Aussagen des Satzes 2.5 unter der Voraussetzung, dass $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ gilt.

Satz 2.7 *Es seien $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$. Dann ist $\Phi(z)$ stückweise holomorph bzgl. Γ , wobei $\Gamma_s(\Phi) \subset \Gamma \setminus \Gamma^\circ$ gilt. Außerdem ist $\Phi \in \mathbf{C}_0^\alpha(\tilde{\Gamma})$ mit*

$$\alpha_0 = \begin{cases} \alpha & : \alpha \in (0, 1), \\ 1 - \varepsilon & : \alpha = 1, \end{cases} \quad \forall \varepsilon \in (0, 1),$$

auf jedem abgeschlossenen Teilbogen $\tilde{\Gamma}$ von Γ° .

Übungsaufgabe 2.8 *Man zeige, dass unter den Voraussetzungen von Satz 2.7 und $\varphi(\zeta) = 0$, $\zeta \in \Gamma \setminus \Gamma^\circ$ gilt $\Phi \in \mathbf{C}^{\alpha_0}(\Gamma)$.*

Im Weiteren verstehen wir das Randwertproblem (2.5) in dem Sinne, dass wir ein $F \in \mathcal{H}(\Gamma)$ suchen, welches den Bedingungen (2.5) genügt.

Folgerung 2.9 *Das Randwertproblem (2.5) ist eindeutig lösbar, wobei $F(z) = \Phi(z)$ gilt.*

Folgerung 2.10 *Es seien $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ und Γ geschlossen. Dann sind die Funktionswerte $\varphi(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, genau dann die Randwerte einer in Ω_+ (das von Γ berandete beschränkte Gebiet) holomorphen Funktion, wenn*

$$\int_{\Gamma} \varphi(\zeta) \zeta^n d\zeta = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

gilt.

Folgerung 2.11 *Unter den Voraussetzungen der Folgerung 2.10 sind $\varphi(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, genau dann die Randwerte einer in Ω_+ holomorphen Funktion, wenn*

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$$

gilt.

Folgerung 2.12 *Es seien die Voraussetzungen von Folgerung 2.10 erfüllt. Die Werte $\varphi(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, sind genau dann die Randwerte einer in $\Omega_- := (\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}_+) \cup \{\infty\}$ holomorphen Funktion, wenn*

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \equiv \text{const} \quad \forall z \in \Omega_+$$

gilt.

Kapitel 3

Randwertprobleme der Funktionentheorie

3.1 Das Hilbertsche Randwertproblem

Es seien Γ eine geschlossene (und damit beschränkte), doppelpunktfreie, glatte Kurve und $a, b \in C^\alpha(\Gamma)$ zwei gegebene Funktionen mit $a(\zeta) \neq 0 \forall \zeta \in \Gamma$. Mit Ω_+ bezeichnen wir das von Γ berandete beschränkte Gebiet, $\Omega_- = \mathbb{C} \setminus (\Omega_+ \cup \Gamma)$. Gesucht sind zwei holomorphe Funktionen $f^+ : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{C}$ und $f^- : \Omega_- \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$, die auf $\bar{\Omega}_+$ bzw. $\bar{\Omega}_-$ stetig sind und der Bedingung

$$f^-(\zeta) = a(\zeta)f^+(\zeta) + b(\zeta) \quad \forall \zeta \in \Gamma \quad (3.1)$$

genügen. Die Zahl

$$\kappa(a) = \frac{1}{2\pi} [\arg a(\zeta)]_\Gamma = \frac{1}{2\pi} [\ln a(\zeta)]_\Gamma,$$

der (stetige) Argumentzuwachs der Funktionswerte $a(\zeta)$ bei einem Durchlauf der Kurve Γ , ist wegen $a(\zeta) \neq 0$ auf Γ wohldefiniert und heißt **Index** der Funktion $a(\zeta)$. Das zu (3.1) gehörige homogene Problem lautet

$$f^-(\zeta) = a(\zeta)f^+(\zeta) \quad \forall \zeta \in \Gamma. \quad (3.2)$$

O.E.d.A. nehmen wir für das Weitere an, dass $0 \in \Omega_+$ gilt.

(I) Sei $\kappa(a) = 0$, d.h. $\ln a(\zeta)$ ist eine Funktion der Klasse $C^\alpha(\Gamma)$. Wir setzen

$$F^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln a(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_\pm, \quad (3.3)$$

und

$$f^\pm(z) = Ae^{-F^\pm(z)}, \quad z \in \Omega_\pm,$$

mit einer beliebigen Konstanten $A \in \mathbb{C}$. Mit $F(\zeta_0)$, $\zeta_0 \in \Gamma$, bezeichnen wir den Cauchyschen Hauptwert des Integrals in (2.3). Aus den Formeln von Sochozki-Plemelj (2.4) folgt

$$F^\pm(\zeta) = \pm \frac{1}{2} \ln a(\zeta) + F(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma,$$

also

$$f^\pm(\zeta) = Ae^{\pm \frac{1}{2} \ln a(\zeta)} e^{-F(\zeta)},$$

so dass $a(\zeta)f^+(\zeta) = e^{\ln a(\zeta)}f^+(\zeta) = f^-(\zeta)$, d.h., $[f^-(z), f^+(z)]$ genügt (3.2). Es seien $[f_1^-(z), f_1^+(z)]$ eine weitere Lösung von (3.2) und $g^\pm(z) = \frac{f_1^\pm(z)}{f^\pm(z)}$. Dann folgt für $\zeta \in \Gamma$

$$g^-(\zeta) = \frac{f_1^-(\zeta)}{f^-(\zeta)} = \frac{a(\zeta)f_1^+(\zeta)}{a(\zeta)f^+(\zeta)} = g^+(\zeta),$$

d.h.

$$g(z) = \begin{cases} g^+(z) & : z \in \Omega_+ \\ g^-(z) & : z \in \Omega_- \end{cases}$$

ist holomorph in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Es folgt $f_1^\pm(z) = A_0 f^\pm(z)$ mit einer Konstanten $A_0 \in \mathbb{C}$. Die Lösungsmenge des homogenen Problems ist also im Fall $\kappa(a) = 0$ gleich

$$\{[A f^-(z), A f^+(z)] : A \in \mathbb{C}\},$$

wobei $f^\pm(z)$ in (3.3) definiert ist.

- (II) Sei jetzt $\kappa(a) = -n$ ($n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$). Für $a_1(\zeta) = \zeta^n a(\zeta)$ gilt dann $\kappa(a_1) = 0$. Wir suchen $f^\pm(z)$ in der Form $f^\pm(z) = f_1^\pm(z) f_2^\pm(z)$ mit $f_1^-(\zeta) = a_1(\zeta) f_1^+(\zeta)$, $\zeta \in \Omega$. Wählen wir (vgl. (I))

$$f_1^\pm(z) = e^{-F_1^\pm(z)}, \quad F_1^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln a_1(\zeta)}{\varphi - z} d\zeta,$$

so erhalten wir aus (3.2) für $f_2^\pm(z)$ die Bedingung

$$f_2^-(\zeta) = \frac{f^-(\zeta)}{f_1^-(\zeta)} = \frac{a(\zeta)f^+(\zeta)}{a_1(\zeta)f_1^+(\zeta)} = \zeta^{-n} f_2^+(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma.$$

Somit muss

$$g(z) := \begin{cases} f_2^+(z) & : z \in \Omega_+ \\ z^n f_2^-(z) & : z \in \Omega_- \end{cases}$$

in \mathbb{C} holomorph sein mit einer Polstelle in ∞ der Ordnung $\leq n$. Wir erhalten

$$f_2^+(z) = a_0 + z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{und} \quad f_2^-(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}$$

mit beliebigen Konstanten $a_k \in \mathbb{C}$.

- (III) Sei $\kappa(a) = n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $a_1(\zeta) = \zeta^{-n} a(\zeta)$ und wählen $f_1^\pm(z)$ wie in (II). Dann folgt aus (3.2) die Bedingung $f_2^-(\zeta) = \zeta^n f_2^+(\zeta)$. Somit ist

$$h(z) = \begin{cases} f_2^-(z) & : z \in \Omega_- \\ z^n f_2^+(z) & : z \in \Omega_+ \end{cases}$$

ist holomorph in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, also konstant. Da $h(0) = 0$ ist, folgt $h(z) \equiv 0$, d.h. (3.2) besitzt im Fall $\kappa(a) > 0$ nur die nichttriviale Lösung.

Satz 3.1 Für $\kappa(a) = -n \leq 0$ besitzt das Problem (3.2) $n+1$ linear unabhängige Lösungen $[f^-(z), f^+(z)]$, die man in der Form $[z^{-k} G^-(z), z^k G^+(z)]$, $k = 0, 1, \dots, n$, mit

$$G^\pm(z) = e^{-F_1^\pm(z)}, \quad F_1^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\ln[\zeta^n a(\zeta)]}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_\pm,$$

schreiben kann. Im Fall $\kappa(a) > 0$ besitzt (3.2) nur die triviale Lösung.

Im folgenden suchen wir eine spezielle Lösung für das inhomogene Problem (3.1).

(IV) Sei $\kappa(a) = -n \leq 0$. Wir suchen eine Lösung in der Form $f^\pm(z) = f_1^\pm(z)f_2^\pm(z)$, wobei wieder $f_1^\pm(z) = e^{-F_1^\pm(z)}$ sei, d.h.

$$f_1(\zeta) = a_1(\zeta)f_1^+(\zeta) \quad \text{mit} \quad a_1(\zeta) = \zeta^n a(\zeta).$$

Aus der Bedingung (3.1) folgt dann

$$\begin{aligned} f_1^-(\zeta)f_2^-(\zeta) &= a(\zeta)f_1^+(\zeta)f_2^+(\zeta) + b(\zeta) \\ &= a_1(\zeta)f_1^+(\zeta)\zeta^{-n}f_2^+(\zeta) + b(\zeta) \\ &= f_1^-(\zeta)\zeta^{-n}f_2^+(\zeta) + b(\zeta), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f_2^-(\zeta) &= \zeta^{-n}f_2^+(\zeta) + \frac{b(\zeta)}{f_1^-(\zeta)} \\ &= \zeta^{-n}f_2^-(\zeta) + e^{F_1^-(\zeta)}b(\zeta). \end{aligned}$$

Für $F_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b(\zeta)e^{F_1^-(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ gilt nach den Formeln von Sochozki-Plemelj (2.4)

$$F_2^+(\zeta) - F_2^-(\zeta) = -b(\zeta)e^{F_1^-(\zeta)}, \quad \zeta \in \Gamma,$$

so dass wir $f_2^-(z) = F_2^-(z)$ und $f_2^+(z) = z^n F_2^+(z)$ setzen können. Wir erhalten

$$f^-(z) = \left[a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + F_2^-(z) \right] G^-(z)$$

und

$$f^+(z) = \left[a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n + z^n F_2^+(z) \right] G^+(z)$$

als allgemeine Lösung von (3.1).

(V) Sei $\kappa(a) = n > 0$. Wie eben erhalten wir

$$f_2^-(\zeta) = \zeta^n f_2^+(\zeta) + b(\zeta)e^{F_1^-(\zeta)}.$$

Aus Folgerung 2.9 ergibt sich

$$f_2^-(z) = A + F_2^-(z), \quad f_2^+(z) = z^{-n}[A + F_2^+(z)]$$

mit $A \in \mathbb{C}$. Dabei ist $f^+(z)$ genau dann in $z_0 = 0$ holomorph, wenn $A + F_2^+(z)$ in $z_0 = 0$ eine Nullstelle der Ordnung $\geq n$ hat. Für $|z| < \varepsilon$ hinreichend klein folgt

$$F_2^+(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b(\zeta)e^{F_1^-(\zeta)}}{1 - \frac{z}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} b(\zeta)F_1^-(\zeta)\zeta^{-n-1} d\zeta z^n.$$

Also: Im Fall $\kappa(a) = n \in \mathbb{N}$ ist (3.1) genau dann lösbar, wenn die Bedingungen

$$\int_{\Gamma} \frac{b(\zeta)}{\zeta^{k+1}} e^{-F_1^-(\zeta)} d\zeta = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

erfüllt sind. Die Konstante A ist eindeutig bestimmt,

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b(\zeta)}{\zeta} e^{F_1^-(\zeta)} d\zeta.$$

3.2 Das Riemann-Hilbertsche Randwertproblem

- (I) Es seien Γ wie in Abschnitt 3.1 und $a, b, c \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma)$ gegebene reellwertige Funktionen mit $[a(\zeta)]^2 + [b(\zeta)]^2 \neq 0 \forall \zeta \in \Gamma$. Gesucht sei eine in Ω_+ holomorphe Funktion $f = u + \mathbf{i}v$, die auf $\overline{\Omega}_+$ stetig ist und der Bedingung

$$a(\zeta)u(\zeta) - b(\zeta)v(\zeta) = c(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma \quad (3.4)$$

genügt. Wir betrachten den Fall, dass $\Omega_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist, d.h.

$$\Gamma = \mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}.$$

Die Bedingung (3.4) ist äquivalent zu

$$[a(\zeta) + \mathbf{i}b(\zeta)]f(\zeta) + [a(\zeta) - \mathbf{i}b(\zeta)]\overline{f(\zeta)} = 2c(\zeta).$$

Wir setzen

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & : |z| < 1, \\ \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} & : |z| > 1. \end{cases}$$

Damit ist $F : (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \mathbb{T}$ holomorph, und es gilt

$$F^+(\zeta) = f(\zeta), \quad F^-(\zeta) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} = \overline{f(\zeta)},$$

so dass (3.4) äquivalent ist zu

$$F^-(\zeta) = A(\zeta)F^+(\zeta) + B(\zeta)$$

mit

$$A(\zeta) = -\frac{a(\zeta) + \mathbf{i}b(\zeta)}{a(\zeta) - \mathbf{i}b(\zeta)} \quad \text{und} \quad B(\zeta) = \frac{2c(\zeta)}{a(\zeta) - \mathbf{i}b(\zeta)}.$$

- (II) Gegeben sei eine reellwertige Funktion $f \in \mathbf{C}^\alpha([a, b])$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und gesucht eine holomorphe Funktion $F = U + \mathbf{i}V : \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$), die auf $(\overline{\mathbb{C}^+} \cup \{\infty\}) \setminus \{a, b\}$ stetig ist und

$$V(x) = \begin{cases} f(x) & : x \in (a, b) \\ 0 & : x \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \end{cases}$$

genügt. Die Funktion $F(z)$ kann durch Spiegelung holomorph auf $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus [a, b]$ fortgesetzt werden. Für $x \in (a, b)$ gilt dann

$$F^+(x) - F^-(x) = 2\mathbf{i}V(x) = 2\mathbf{i}f(x).$$

Nach Folgerung 2.9 ist dann

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(x)}{x-z} dx + A,$$

wobei A den Wert von $F(z)$ in ∞ angibt und somit reell sein muss.

3.3 Das Doppelschichtpotential

Es sei Γ eine glatte, geschlossene und doppelpunktfreie Kurve, die das Innengebiet $\Omega = \Omega_+$ berandet. Wir betrachten das Dirichlet-Problem für harmonische Funktionen, suchen also ein $u \in \mathbf{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ mit

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.5)$$

und

$$u = f \quad \text{auf } \Gamma \quad (3.6)$$

für ein gegebenes $f \in \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})$. Da wir wissen, dass Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen harmonisch sind und holomorphe Funktionen mit Hilfe von Cauchy'schen Integralen dargestellt werden können, machen wir den Ansatz

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z = x + \mathbf{i}y \in \Omega, \quad (3.7)$$

mit einer absolut integrierbaren Funktion (Dichte) $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Für die Funktion $u(x, y)$ ist damit (3.5) erfüllt (vgl. Satz 2.2), und unter der Annahme, dass $\Phi(z)$ eine stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$ besitzt, ist (3.6) äquivalent zu

$$\operatorname{Re} \Phi^+(\zeta) = f(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma. \quad (3.8)$$

Mit einer Parametrisierung $\zeta(s) = \xi(s) + \mathbf{i}\eta(s)$ von Γ bzgl. der Bogenlänge $s \in [0, L]$ schreiben wir

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_0^L \frac{\varphi(\zeta(s))}{\zeta(s) - z} \zeta'(s) ds.$$

Wegen $|\zeta'(s)| = 1$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s) - z} &= \frac{[\xi'(s) + \mathbf{i}\eta'(s)][\xi(s) - \mathbf{i}\eta(s) - x + \mathbf{i}y]}{|\zeta(s) - z|^2} \\ &= \frac{\xi'(s)[\xi(s) - x] + \eta'(s)[\eta(s) - y]}{|\zeta(s) - z|^2} + \mathbf{i} \frac{\eta'(s)[\xi(s) - x] - \xi'(s)[\eta(s) - y]}{|\zeta(s) - z|^2} \\ &= \frac{\langle \tau(\zeta(s)), \zeta(s) - z \rangle}{|\zeta(s) - z|^2} + \mathbf{i} \frac{\langle \nu(\zeta(s)), \zeta(s) - z \rangle}{|\zeta(s) - z|^2} \end{aligned}$$

mit dem Tangentialvektor $\tau(\zeta(s))$ und dem Normalenvektor $\nu(\zeta(s))$ an Γ im Punkt $\zeta(s)$. Mit dem Ansatz (3.7) gilt also

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - z \rangle}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta) ds$$

und

$$\operatorname{Im} \Phi(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \tau(\zeta), \zeta - z \rangle}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta) ds.$$

Für eine hölderstetige Dichte $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ und $\zeta_0 \in \Gamma$ existiert $\Phi(\zeta_0)$ im Sinne des Cauchy'schen Hauptwertes (siehe die Sätze 2.5 und 2.7), so dass auch $\operatorname{Re} \Phi(\zeta_0)$ und $\operatorname{Im} \Phi(\zeta_0)$ für $\zeta_0 \in \Gamma$ in diesem Sinne existieren. Ist $\zeta' \in \mathbf{C}^\beta([0, L])$, so gilt für $\zeta_0 = \zeta(s_0) \in \Gamma$

$$\frac{\zeta(s) - \zeta(s_0)}{s - s_0} - \zeta'(s) = \xi'(\tilde{s}_1) - \xi'(s) + \mathbf{i}[\eta'(\tilde{s}_2) - \eta'(s)],$$

d.h.

$$\zeta(s) = \zeta(s_0) + \zeta'(s)(s - s_0) + o(|s - s_0|^{1+\beta}).$$

Wegen $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{|\zeta(s) - \zeta(s_0)|}{|s - s_0|} = |\zeta'(s_0)| = 1$ ist auch $|\zeta(s) - \zeta(s_0)| \geq c_u |s - s_0|$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von s_0 mit einer Konstanten $c_u > 0$. Wegen $\langle \nu(\zeta), \zeta' \rangle = 0$ folgt

$$\frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - \zeta_0 \rangle}{|\zeta - \zeta_0|^2} = \frac{\langle \nu(\zeta(s)), \zeta(s) - \zeta(s_0) - \zeta'(s)(s - s_0) \rangle}{|\zeta(s) - \zeta(s_0)|^2} = o(|s - s_0|^{\beta-1}).$$

D.h., in diesem Fall existiert $\operatorname{Re} \Phi(\zeta_0)$, $\zeta_0 \in \Gamma$, für jede beschränkte integrierbare Funktion φ sogar als uneigentliches Integral. Gehen wir in der Formel (vgl. (2.4))

$$\Phi^+(\zeta_0) = \Phi(\zeta_0) + \frac{\varphi(\zeta_0)}{2}$$

zum Realteil über und berücksichtigen (3.8), so erhalten wir die Integralgleichung

$$\varphi - \mathcal{K}\varphi = 2f \quad (3.9)$$

mit dem Integraloperator

$$(\mathcal{K}\varphi)(\zeta_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - \zeta_0 \rangle}{|\zeta - \zeta_0|^2} \varphi(\zeta) ds, \quad \zeta_0 \in \Gamma. \quad (3.10)$$

Die Funktion $(\mathcal{K}\varphi)(\zeta_0)$ heißt **Dipolpotential** (oder **Doppelschichtpotential**), welches von der **Belegung** φ erzeugt wird. Die Funktion

$$k(\zeta_0, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - \zeta_0 \rangle}{|\zeta - \zeta_0|^2}, \quad \zeta_0, \zeta \in \Gamma,$$

nennt man **Dipolkern** und den Operator \mathcal{K} **Dipoloperator**. Ist $\zeta \in \mathbf{C}^2([0, L])$, so haben wir

$$\zeta(s_0) = \zeta(s) + \zeta'(s)(s_0 - s) + \frac{\zeta''(s)}{2}(s_0 - s)^2 + o(|s_0 - s|^2)$$

und somit

$$\frac{\langle \nu(\zeta(s)), \zeta(s) - \zeta(s_0) \rangle}{|\zeta(s) - \zeta(s_0)|^2} = \frac{-\frac{1}{2} \langle \nu(\zeta(s)), \zeta''(s) \rangle + \frac{o(|s_0 - s|^2)}{|s_0 - s|^2}}{|\zeta'(s) + O(|s_0 - s|)|^2}.$$

In diesem Fall ist der Dipolkern also stetig auf Γ , und es gilt (beachte $|\zeta'(s)| = 1$) für $\zeta_0 = \zeta(s_0)$

$$k(\zeta_0, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi} [\eta'(s_0)\zeta''(s_0) - \zeta'(s_0)\eta''(s_0)] = -\frac{\kappa(\zeta_0)}{2\pi}$$

mit der Krümmung $\kappa(\zeta)$ der Kurve Γ im Punkt ζ (siehe G. M. Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung, Bd.I, Nr. 250).

Drückt man das Skalarprodukt zweier Vektoren mittels des Cosinus des eingeschlossenen Winkels aus, so erhält man für den Kern des Dipoloperators die Darstellung

$$k(\zeta_0, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos \angle(\nu(\zeta), \zeta - \zeta_0)}{|\zeta - \zeta_0|}.$$

Wir definieren den singulären Integraloperator

$$(\mathcal{S}_{\Gamma}\varphi)(\zeta_0) = \frac{1}{\pi \mathbf{i}} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta, \quad \zeta_0 \in \Gamma,$$

als Cauchy'sches Hauptwertintegral, so dass

$$\mathcal{K}\varphi = -\operatorname{Re} \mathcal{S}_\Gamma \varphi.$$

Ist $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ eine Lösung der Integralgleichung (3.9) für gegebenes f , so ist

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - z \rangle}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta) ds$$

harmonisch in Ω , und nach den Formeln von Sochozki-Plemelj gilt auf Γ

$$u(\zeta_0) = \operatorname{Re} \Phi(\zeta_0) + \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0) = \frac{1}{2} [\operatorname{Re}(\mathcal{S}_\Gamma \varphi)(\zeta_0) + (\mathcal{K}\varphi)(\zeta_0) + 2f(\zeta_0)] = f(\zeta_0).$$

Sind $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ zwei Lösungen von (3.9) für ein und dasselbe f , so folgt mit $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ wie oben

$$u(\zeta_0) = 0, \quad \zeta_0 \in \Gamma.$$

Damit ist $u(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$ (Maximumprinzip für harmonische Funktionen) und somit $v(z) = \operatorname{Im} \Phi(z) = c$ in Ω mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Wir setzen $\psi = \operatorname{Im} \mathcal{S}_\Gamma \varphi$ und erhalten

$$c = \operatorname{Im} \Phi^+(\zeta_0) = \frac{1}{2} \psi(\zeta_0),$$

also $\psi = 2c$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \Phi^-(\zeta_0) &= \frac{1}{2} (\mathcal{S}_\Gamma \varphi)(\zeta_0) - \frac{1}{2} \varphi(\zeta_0) \\ &= \frac{1}{2} [(-\mathcal{K}\varphi)(\zeta_0) + \mathbf{i}\psi(\zeta_0) - \varphi(\zeta_0)] \\ &= \frac{\mathbf{i}}{2} \psi(\zeta_0) - \varphi(\zeta_0) \\ &= \mathbf{i}c - \varphi(\zeta_0). \end{aligned}$$

Es folgt $v(z) = c$ in Ω_- und somit (C.-R.-Dgln.) $u(z) = c_1 \in \mathbb{R}$ in Ω_- . Das ergibt $\varphi(\zeta_0) = \Phi^+(\zeta_0) - \Phi^-(\zeta_0) = -c_1$ auf Γ . Wegen $(\mathcal{S}_\Gamma 1)(\zeta_0) = 1$ folgt $\mathcal{K}\varphi = -\varphi$. Andererseits ist $\varphi - \mathcal{K}\varphi = 0$ (wegen (3.9)) und somit $\varphi = 0$.

Satz 3.2 *Ist $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ eine Lösung der Integralgleichung (3.9), so ist*

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma k(z, \zeta) u(\zeta) ds, \quad z = x + \mathbf{i}y \in \Omega,$$

die (eindeutige) Lösung von (3.5), (3.6). Ferner gibt es in $\mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ keine weitere Lösung von (3.9).

Wir stellen nun die Frage nach der Existenz einer Lösung $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ von (3.9).

Satz 3.3 *Es seien Γ glatt mit $\zeta' \in \mathbf{C}^\beta([0, L])$ und $0 < \alpha \leq \beta$. Dann besitzt die Integralgleichung (3.9) für jedes $f \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ genau eine Lösung $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$.*

Satz 3.4 und Folgerung 3.5 bereiten den Beweis von Satz 3.3 vor.

Satz 3.4 Es seien $h(x, y) = \frac{\ell(x, y)}{|x - y|^{1-\beta}}$, $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$, $0 < \beta < 1$, mit einer beschränkten, integrierbaren Funktion $\ell : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$(Tu)(x) = \int_a^b h(x, y)u(y) dy, \quad x \in [a, b].$$

Es mögen Konstanten $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ existieren, so dass

$$|\ell(x, y) - \ell(x_1, y)| \leq C_2 \frac{|x - x_1|}{|x - y|} \quad \text{für } x, x_1, y \in [a, b] \quad \text{mit } |y - x| > C_1|x_1 - x|$$

gilt. Dann ist $T : \mathbf{C}([a, b]) \rightarrow \mathbf{C}^\beta([a, b])$ ein linearer und beschränkter Operator.

Der Satz von Arzela-Ascoli über die Charakterisierung der kompakten Mengen in $\mathbf{C}([a, b])$ liefert nun

Folgerung 3.5 Unter den Voraussetzungen von Satz 3.4 ist $T : \mathbf{C}([a, b]) \rightarrow \mathbf{C}([a, b])$ ein kompakter Operator.

Übungsaufgabe 3.6 Auf der Menge $[a, b]^2 \setminus \{(x, y) \in [a, b]^2 : x = y\}$ existiere die partielle Ableitung $\frac{\partial \ell(x, y)}{\partial x}$, wobei

$$\left| \frac{\partial \ell(x, y)}{\partial x} \right| \leq \frac{C}{|x - y|}$$

mit einer gewissen Konstanten C gelte. Man zeige, dass dann Konstanten $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ existieren, so dass die entsprechende Voraussetzung in Satz 3.4 erfüllt ist.

Wir verschärfen die Definition der lokalen Hölder-Stetigkeit und nennen eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem metrischen Raum (M, d) stark lokal hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$, wenn zu jedem $x \in M$ ein $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ und ein $c = c(x, \varepsilon) > 0$ existieren, so dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq c d(x_1, x_2)^\alpha \quad \forall x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x)$$

gilt.

Übungsaufgabe 3.7 Man zeige: Sind $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ stark lokal hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$ und der metrische Raum (M, d) kompakt, so ist $f \in \mathbf{C}^\alpha(M, \mathbb{C})$.

Übungsaufgabe 3.8 Wir schreiben den Dipolkern in der Form

$$k(\zeta_0, \zeta) = -\frac{1}{\pi} \frac{\ell(\zeta_0, \zeta)}{|\zeta - \zeta_0|^{1-\beta}} \quad \text{mit} \quad \ell(\zeta_0, \zeta) = \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - \zeta_0 \rangle}{|\zeta - \zeta_0|^{1+\beta}}.$$

Man zeige, dass dann

$$\frac{d}{ds} \ell(\zeta(s), \zeta) = -\frac{\langle \nu(\zeta), \zeta'(s) \rangle}{|\zeta - \zeta(s)|^{1+\beta}} + \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - \zeta(s) \rangle}{|\zeta - \zeta(s)|^{3+\beta}} (1 + \beta) \langle \zeta'(s), \zeta - \zeta(s) \rangle$$

gilt.

Wir betrachten jetzt die Außenraumaufgabe

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_-, \quad u = f \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega, \quad u(\infty) = 0, \quad (3.11)$$

für die wir eine Lösung $u \in \mathbf{C}(\overline{\Omega}_-, \mathbb{R}) \cap \mathbf{C}^2(\Omega_-, \mathbb{R})$ suchen. Dazu machen wir wieder den Ansatz (3.7), d.h.

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - z \rangle}{|\zeta - z|^2} \varphi(\zeta) ds, \quad z = x + iy. \quad (3.12)$$

Aus (2.4) folgt mit der Randbedingung in (3.11)

$$f(\zeta_0) = \operatorname{Re} \Phi^-(\zeta_0) = \operatorname{Re} \Phi(\zeta_0) - \frac{\varphi(\zeta_0)}{2},$$

also

$$\varphi(\zeta_0) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(\zeta), \zeta - \zeta_0 \rangle}{|\zeta - \zeta_0|^2} \varphi(\zeta) ds = -2f(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma,$$

bzw.

$$\varphi + \mathcal{K}\varphi = -2f. \quad (3.13)$$

Satz 3.9 *Ist $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ eine Lösung von (3.13), so ist $u(x, y)$ aus (3.12) die (eindeutige) Lösung von (3.11). Zwei Lösungen von (3.13) unterscheiden sich durch eine (reelle) additive Konstante.*

Übungsaufgabe 3.10 *Wir machen die gleichen Voraussetzungen wie in Satz 3.4, nur dass jetzt $\frac{1}{2} < \beta < 1$ gelte. Man zeige, dass dann*

$$T : \mathbf{L}^2((a, b)) \longrightarrow \mathbf{C}^{\beta-\frac{1}{2}}([a, b])$$

ein linearer beschränkter Operator ist.

Sei nun $\zeta' \in \mathbf{C}^\beta(\Gamma)$, $\frac{1}{2} < \beta < 1$. Dann ist $\mathcal{K} : \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})$ ein kompakter Operator (vgl. Satz 3.4 und Folgerung 3.5). Dabei gilt (vgl. Satz 3.9) $\ker_{\mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})}(\mathcal{I} + \mathcal{K}) = \{c : c \in \mathbb{R}\}$, d.h. $\dim \ker_{\mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})}(\mathcal{I} + \mathcal{K}) = 1$. Auch der Operator $\mathcal{K} : \mathbf{L}^2(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma, \mathbb{R})$ ist kompakt, es gilt sogar (vgl. Übungsaufgabe 3.10), dass $\mathcal{K} : \mathbf{L}^2(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{C}^{\beta-\frac{1}{2}}(\Gamma, \mathbb{R})$ beschränkt ist, woraus auch

$$\ker_{\mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})}(\mathcal{I} + \mathcal{K}) = \ker_{\mathbf{L}^2(\Gamma, \mathbb{R})}(\mathcal{I} + \mathcal{K})$$

folgt. Wir haben also einen Operator $\mathcal{A} = \mathcal{I} + \mathcal{K} \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ in einem Banachraum $\mathbf{X} = \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})$ und einen Operator $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{H})$ in einem Hilbertraum $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\Gamma, \mathbb{R})$, wobei das innere Produkt in \mathbf{H} durch $\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma} f(\zeta)g(\zeta) ds$ gegeben ist und wobei $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_{\mathbf{X}}$ gilt. Beide Operatoren sind Fredholmoperatoren mit dem Fredholmindex $\kappa(\mathcal{A}) = \kappa(\mathcal{B}) = 0$, wobei $\ker_{\mathbf{X}} \mathcal{A} = \ker_{\mathbf{H}} \mathcal{B}$ gilt. Es folgt $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^*|_{\mathbf{H}^*}$ und $\ker_{\mathbf{H}^*} \mathcal{B}^* = \ker_{\mathbf{X}^*} \mathcal{A}^*$. Für $f \in \mathbf{H} = \mathbf{H}^*$ gilt

$$f(\mathcal{K}\varphi)(\zeta_0) = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k(\zeta_0, \zeta) \varphi(\zeta) |d\zeta| f(\zeta_0) |d\zeta_0| = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} k(\zeta_0, \zeta) f(\zeta) |d\zeta_0| \varphi(\zeta) |d\zeta|,$$

also $(\mathcal{K}^* f)(\zeta) = \int_{\Gamma} k(\zeta_0, \zeta) f(\zeta_0) |d\zeta_0|$. Ist somit $\psi_0(\zeta) \not\equiv 0$ eine Lösung von

$$\psi_0(\zeta) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} k(\zeta_0, \zeta) \psi_0(\zeta_0) |d\zeta_0| = 0, \quad \zeta \in \Gamma,$$

so besitzt (3.13) genau dann eine Lösung $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ für $f \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$, $0 < \alpha \leq \beta$, falls

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) \psi_0(\zeta) ds = 0$$

gilt. Dabei ist $\int_{\Gamma} \psi_0(\zeta) ds \neq 0$, da andernfalls die Integralgleichung (3.13) für $f \equiv 1$ eine Lösung φ besitzen würde. Die eindeutige Lösung von $\Delta u \equiv 0$ in Ω_- , $u \equiv 1$ auf Γ ist aber $u \equiv 1$, so dass $u(\infty) = 0$ in (3.11) verletzt wäre.

Kapitel 4

Die Integralgleichungsmethode

4.1 Singularitätenfunktionen

Für $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$ definieren wir das innere Produkt $\langle x, y \rangle$ und den Betrag (Norm) $|x|$ durch

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^d x_k y_k \quad \text{und} \quad |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^d x_k^2}.$$

Ferner definieren wir für $d = 2$ und $d = 3$

$$s(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y| & : d = 2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} & : d = 3 \end{cases} \quad (4.1)$$

und erhalten

$$\nabla_x s(x, y) = -\frac{1}{\omega_d} \frac{x - y}{|x - y|^d}, \quad \omega_d = \begin{cases} 2\pi & : d = 2, \\ 4\pi & : d = 3. \end{cases}$$

Es folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} s(x, y) = -\frac{1}{\omega_d} \left(\frac{1}{|x - y|^d} - d \frac{(x_j - y_j)^2}{|x - y|^{d+2}} \right)$$

und somit

$$\Delta_x s(x, y) = -\frac{1}{\omega_d |x - y|^{d+2}} \left(d |x - y|^2 - d \sum_{j=1}^d (x_j - y_j)^2 \right) = 0, \quad x \neq y.$$

Man nennt $s(x, y)$ eine **Singularitätenfunktion** oder **Fundamentallösung** für die **Laplace-Gleichung** $-\Delta u = 0$ in \mathbb{R}^d . Für $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{N}^d$ sind auch

$$r(x, y) := \sum_{j=1}^N a_{\alpha_j, \beta_j}(y) D_x^{\alpha_j} D_y^{\beta_j} s(x, y)$$

Singularitätenfunktionen für die Laplace-Gleichung. Für $d \geq 3$ kann man allgemein

$$s(x, y) = \frac{|x - y|^{2-d}}{(d-2)\omega_d} \quad \text{mit} \quad \omega_d = \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^d}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

setzen. Die Funktion $\frac{1}{8\pi} |x - y|^2 \ln |x - y|$ ist Singularitätenfunktion für die **biharmonische Gleichung** $\Delta^2 u = 0$ in \mathbb{R}^2 .

4.2 Das Einfachschichtpotential

Es seien $\Omega = \Omega_+ \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, ein Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega = \Gamma$ und $s(x, y)$ die in 4.1 definierte Singularitätenfunktion für $-\Delta u = 0$. Für eine \mathbf{L}^∞ -Funktion $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma} s(x, y) \varphi(y) d\Gamma_y \quad (4.2)$$

Einfachschichtpotential mit der Belegung $\varphi(x)$. Ist $d = 2$, so ist $d\Gamma_y$ in (4.2) das Differential der Bogenlänge bzgl. der Kurve Γ . Im Fall $d = 3$ ist das Integral in (4.2) als Oberflächenintegral erster Art zu verstehen, d.h., ist $\zeta(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in K$, eine Parametrisierung der Fläche Γ ($\zeta : K^\circ \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv, stetig differenzierbar mit $\det \zeta'(t) = 2$, $t \in K^\circ$), so ist

$$\int_{\Gamma} s(x, y) \varphi(y) d\Gamma_y = \iint_K s(x, \zeta(t)) \varphi(\zeta(t)) \left| \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t_1} \times \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t_2} \right| d(t_1, t_2).$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ sind die partiellen Ableitungen nach x von $s(x, y)$ in einer Umgebung von x gleichmäßig bzgl. $y \in \Gamma$ stetig, so dass $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} = \int_{\Gamma} \frac{\partial s(x, y)}{\partial x_j} \varphi(y) d\Gamma_y$ usw. usf. gilt, also $\Delta \Phi = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \Gamma$.

Es seien $D \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, \dots$, und $f : D \setminus \{x^0\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Für jede Umgebung U von x^0 möge das Integral $\int_{D \setminus U} f(x) dx$ existieren. Wir sagen, dass das **uneigentliche Integral** $\int_D f(x) dx$ existiert, falls für eine beliebige Folge $(U_n)_{n=0}^\infty$ von Umgebungen von x^0 , die sich für $n \rightarrow \infty$ auf x^0 zusammenzieht, der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D \setminus U_n} f(x) dx$ existiert. Dieser Grenzwert ist dann von der Wahl der Folge $(U_n)_{n=0}^\infty$ unabhängig und definiert den Wert des Integrals $\int_D f(x) dx$.

Beispiel 4.1 Die Integrale $\int_{K_R(\Theta)} \frac{dx}{|x|^\lambda}$, $R > 0$, existieren als uneigentliche Integrale für $\lambda < d$.

Beispiel 4.2 Es seien $-\infty < a < b < \infty$, $0 < \beta < 1$ und $\varphi \in \mathbf{L}^\infty((a, b), \mathbb{R})$. Dann ist die Funktion die Funktion $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{|t - z|^{1-\beta}}$ stetig.

Übungsaufgabe 4.3 Es seien $-\infty < a < b < \infty$ und $\varphi \in \mathbf{L}^\infty((a, b), \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \int_a^b \ln |t - z| \varphi(t) dt$ stetig ist.

Übungsaufgabe 4.4 Es seien $D = \{x = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : |x - x^0| \leq R\}$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, 0)$ und $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(D, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für $0 < \alpha < 2$ die Funktion

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \iint_D \frac{\varphi(y_1, y_2) d(y_1, y_2)}{|y - x|^\alpha}$$

stetig ist.

Im Weiteren sei $d = 2$ oder $d = 3$.

Satz 4.5 Das Einfachschichtpotential ist auf \mathbb{R}^d stetig. Für $d = 3$ gilt $\Phi(\infty) = 0$. Für $d = 2$ gilt $\Phi(\infty) = 0$ genau dann, wenn $\int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = 0$ ist.

Begründung für das Verhalten im Unendlichen:

- $d = 2$:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [\ln|x-y| - \ln|x|] \varphi(y) d\Gamma_y - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi d\Gamma \ln|x| \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{|x-y|}{|x|} \varphi(y) d\Gamma_y - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi d\Gamma \ln|x|,\end{aligned}$$

wobei $1 - \frac{|y|}{|x|} = \frac{|x|-|y|}{|x|} \leq \frac{|x-y|}{|x|} \leq \frac{|x|+|y|}{|x|} = 1 + \frac{|y|}{|x|}$, so dass $\left| \ln \frac{|x-y|}{|x|} \right| = O(|x|^{-1})$ für $|x| \rightarrow \infty$ und $y \in \Gamma$.

- $d = 3$:

$$|\Phi(x)| \leq \frac{\|\varphi\|_{\infty}}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma_y}{|x-y|} \leq \frac{\|\varphi\|_{\infty}}{4\pi|x|} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma_y}{1 - \frac{|y|}{|x|}} = O(|x|^{-1}).$$

Für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ haben wir

$$\nabla\Phi(x) = -\frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{x-y}{|x-y|^d} \varphi(y) d\Gamma_y, \quad (4.3)$$

$\Phi : \mathbb{R}^d \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ ist sogar unendlich oft differenzierbar. Für $x \in \Gamma$ existiert das Integral in (4.3) i. Allg. aber nicht mehr im uneigentlichen Sinne. Wir definieren für $x \in \Gamma$

$$\frac{\partial\Phi^{\pm}(x)}{\partial\nu} := \lim_{\alpha \rightarrow \mp 0} \langle \nu(x), \nabla\Phi(x + \alpha\nu(x)) \rangle, \quad (4.4)$$

falls diese Grenzwerte existieren, wobei $\nu(x)$ die äußere Normale an Γ im Punkt x bezeichnet.

Satz 4.6 *Im Punkt $x^0 \in \Gamma$ gelte $|\langle \nu(x^0), x^0 - y \rangle| \leq c|x^0 - y|^{1+\beta}$ für ein $\beta \in (0, 1]$ und für alle $y \in \Gamma$. Ferner seien $\varphi \in \mathbf{L}^{\infty}(\Gamma, \mathbb{R})$ und φ in x^0 stetig. Dann existieren die einseitigen Normalenableitungen (4.4). Dabei gilt*

$$\frac{\partial\Phi^{+}(x^0)}{\partial\nu} - \frac{\partial\Phi^{-}(x^0)}{\partial\nu} = \varphi(x^0)$$

und

$$\frac{\partial\Phi^{+}(x^0)}{\partial\nu} + \frac{\partial\Phi^{-}(x^0)}{\partial\nu} = -\frac{2}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(x^0), x^0 - y \rangle}{|x^0 - y|^d} \varphi(y) d\Gamma_y,$$

wobei das Integral im uneigentlichen Sinne existiert.

Es sei jetzt $\tau(x^0)$ eine Tangentialrichtung an Γ im Punkt $x^0 \in \Gamma$, d.h. $\tau(x^0) \perp \nu(x^0)$. Für $x \notin \Gamma$ betrachten wir

$$\langle \tau(x^0), \nabla\Phi(x) \rangle = -\frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{\langle \tau(x^0), x - y \rangle}{|x - y|^d} \varphi(y) d\Gamma_y.$$

Satz 4.7 *Ist $\varphi(x)$ im Punkt $x^0 \in \Gamma$ hölderstetig, so gilt im Sinne nichttangentialer Grenzwerte*

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \langle \tau(x^0), \nabla\Phi(x) \rangle = -\frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{\langle \tau(x^0), x^0 - y \rangle}{|x^0 - y|^d} \varphi(y) d\Gamma_y,$$

wobei das Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen ist.

Definition des Cauchyschen Hauptwertes: $\int_{\Gamma} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus \{x \in \mathbb{R}^d; |x - x^0| \leq \varepsilon\}}$. Unter Verwendung der Sätze 4.6 und 4.7 kann man für eine im Punkt $x^0 \in \Gamma$ hölderstetige Belegung φ zeigen, dass (wieder im Sinne nichttangentialer Grenzwerte)

$$\nabla \Phi^+(x^0) - \nabla \Phi^-(x^0) = \varphi(x^0) \nu(x^0)$$

und

$$\nabla \Phi^+(x^0) + \nabla \Phi^-(x^0) = -\frac{2}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{x^0 - y}{|x^0 - y|^d} \varphi(y) d\Gamma_y$$

gilt, wobei das Integral wiederum als Cauchyscher Hauptwert erklärt ist.

Wir schreiben $\Gamma \in \mathbf{C}^{1+\beta}$, wenn Γ kompakt, zusammenhängend und doppelpunktfrei ist und wenn für jedes $x^0 \in \Gamma$ eine Umgebung $U \subset \Gamma$ von x^0 existiert, so dass U das Bild einer bijektiven Abbildung $\zeta : D \rightarrow U$ mit einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^{d-1}$ ist, so dass ζ' hölderstetig mit dem Exponenten β ist ($\zeta' \in \mathbf{C}^{\beta}(D, \mathbb{R}^{(d-1) \times d})$).

Bemerkung 4.8 Es seien $\Gamma_0 \subset \Gamma$ und $\Gamma_0 \in \mathbf{C}^{1+\beta}$ sowie $\varphi \in \mathbf{C}^{\beta}(\Gamma_0, \mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^{\infty}(\Gamma, \mathbb{R})$. Ferner sei $U \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge, die durch Γ in zwei disjunkte Teilmengen $U^{\pm} \subset \Omega^{\pm}$ zerlegt wird, wobei $\Gamma \cap U \subset \Gamma_0$ gelte. Dann sind $\nabla \Phi^{\pm}$ auf \overline{U}_{\pm} stetig.

4.3 Die Dirichlet-RWA und das Einfachschichtpotential

Sind $u, v \in \mathbf{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, so folgt aus dem Gaußschen Integralsatz die Greensche Formel

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma - \int_{\Omega} v \Delta u dx. \quad (4.5)$$

Ist also $\Delta u = 0$ in Ω , so folgt für $v = u$

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma \quad (4.6)$$

und für $v \equiv 1$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = 0. \quad (4.7)$$

Neben den folgenden **Dirichlet-Randwertaufgaben** betrachten wir auch die entsprechenden **Neumann-Randwertaufgaben** für Funktionen $u \in \mathbf{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$:

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_+, \quad u = f \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.8)$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_+, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.9)$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_-, \quad u = f \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.10)$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_-, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = f \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.11)$$

- (A) Sind u_1, u_2 zwei Lösungen von (4.8) bzw. (4.9) (Innenraumprobleme), so ist $u = u_1 - u_2$ Lösung von (4.8) bzw. (4.9) für $f \equiv 0$. Es folgt aus (4.6) $\nabla u \equiv 0$, also $u \equiv \text{const}$. Im Fall der Gleichung (4.8) folgt daraus $u \equiv 0$.

- (B) Sei jetzt u Lösung von (4.10) bzw. (4.11) (Außenraumprobleme) mit $f \equiv 0$. Für $R > \max\{|x| : x \in \Gamma\}$ setzen wir $\Omega_R = \{x \in \Omega_- : |x| < R\}$. Aus (4.6) und den Randbedingungen in (4.10) bzw. (4.11) folgt (ν auf dem äußeren Rand γ von Ω_R nach außen gerichtet)

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 dx = - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma + \int_{\gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\gamma = \int_{\gamma} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\gamma.$$

Setzen wir voraus, dass

$$|u(x)| = O(|x|^{-1}) \quad \text{und} \quad |\nabla u(x)| = O(|x|^{1-d}) \quad \text{für} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (4.12)$$

gilt, so folgt

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\gamma} |u| \cdot |\langle \nu, \nabla u \rangle| d\gamma = O(R^{-1}).$$

Für $R \rightarrow \infty$ erhalten wir $\int_{\Omega_-} |\nabla u|^2 dx = 0$ und somit unter Verwendung von $u(\infty) = 0$ (vgl. (4.12)) auch $u \equiv 0$.

- (C) Für das Einfachschichtpotential $\Phi(x)$ zur Belegung $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma)$ gilt $|\Phi(x)| = O(|x|^{-1})$, falls man im Fall $d = 2$ zusätzlich $\int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = 0$ voraussetzt (vgl. die Betrachtungen nach Satz 4.5).

- (D) Setzen wir generell (auch im Fall $d = 3$) voraus, dass $\int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = 0$ ist, so folgt für $|x| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |\nabla \Phi(x)| &= \frac{1}{\omega_d} \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{x-y}{|x-y|^d} - \frac{x}{|x|^d} \right) \varphi(y) d\Gamma_y \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_d |x|^d} \int_{\Gamma} \left| \frac{x-y}{\left(1 - \frac{|y|}{|x|}\right)^d} - x \right| |\varphi(y)| d\Gamma_y = O(|x|^{-d}). \end{aligned}$$

- (E) Die Außenraumaufgabe (4.10) besitzt höchstens eine Lösung mit den Eigenschaften

$$|u(x)| = O(1) \quad \text{und} \quad |\nabla u(x)| = O(|x|^{-d}). \quad (4.13)$$

- (F) Ist u Lösung von (4.9), so ist notwendigerweise $\int_{\Gamma} f d\Gamma = 0$ wegen (4.7). Das gilt auch für die Außenraumaufgabe (4.11), falls $|\nabla u(x)| = O(|x|^{-d})$ gilt.

Wir suchen nun eine Lösung von (4.8) bzw. (4.10) in Form eines Einfachschichtpotentials

$$u(x) = \Phi(x) = \int_{\Gamma} s(x, y) \varphi(y) d\Gamma_y, \quad (4.14)$$

wobei $s(x, y)$ durch (4.1) gegeben ist. Nach Satz 4.5 ist Φ auf \mathbb{R}^d stetig, so dass die Randbedingung $u = f$ auf Γ zu der Integralgleichung

$$\int_{\Gamma} s(x, y) \varphi(y) d\Gamma_y = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4.15)$$

führt. Für das Weitere setzen wir voraus, dass die Voraussetzung $|\langle \nu(x^0), x^0 - y \rangle| \leq c|x^0 - y|^{1+\beta}$, $y \in \Gamma$ von Satz 4.6 für alle $x^0 \in \Gamma$ erfüllt ist.

Satz 4.9 *Es gibt höchstens eine stetige Lösung $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ der Integralgleichung (4.15), falls man im Fall $d = 2$ zusätzlich $\int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = 0$ fordert.*

Satz 4.10 *Es seien $f \in \mathbf{C}^{1+\beta}(\Gamma, \mathbb{R})$ und $d = 3$. Dann besitzt die Integralgleichung (4.15) eine Lösung $\varphi \in \mathbf{C}^\beta(\Gamma, \mathbb{R})$.*

4.4 Die Neumann-RWA und das Einfachschichtpotential

Im Weiteren sei die Bedingung von Satz 4.6 für alle $x^0 \in \Gamma$ erfüllt:

$$\exists \beta \in (0, 1] : |\langle \nu(x), x - y \rangle| \leq \text{const} |x - y|^{1+\beta} \quad \forall x, y \in \Gamma. \quad (4.16)$$

Machen wir für (4.9) bzw. (4.11) den Lösungsansatz als Einfachschichtpotential $\Phi(x)$, so erhalten wir

- im Fall der Innenraumaufgabe (4.9) die Integralgleichung

$$\varphi + \mathcal{K}_1 \varphi = 2f, \quad (4.17)$$

- im Fall der Außenraumaufgabe (4.11) die Integralgleichung

$$\varphi - \mathcal{K}_1 \varphi = -2f, \quad (4.18)$$

wobei

$$(\mathcal{K}_1 \varphi)(x) = \int_{\Gamma} k_1(x, y) \varphi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma,$$

mit

$$k_1(x, y) = -\frac{2}{\omega_d} \frac{\langle \nu(x), x - y \rangle}{|x - y|^d}.$$

Beachte: In Abschnitt 3.3 hatten wir (für $d = 2$) den Kern

$$-\frac{1}{\pi} \frac{\langle \nu(y), x - y \rangle}{|x - y|^2}$$

zu verwenden.

Satz 4.11 *Es sei (4.16) erfüllt.*

- Beide Integralgleichungen (4.17) und (4.18) haben höchstens eine Lösung $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$ mit $\int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = 0$.
- Der Operator $\mathcal{K}_1 : \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})$ ist kompakt.
- Die Gleichung (4.17) bzw. (4.18) besitzt genau dann eine Lösung $\varphi \in \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})$, wenn $f \in \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})$ der Bedingung $\int_{\Gamma} f d\Gamma = 0$ genügt.

4.5 Das Doppelschichtpotential

Allgemein definiert man den **Dipolkern** als

$$k_D(x, y) = 2 \frac{\partial s(x, y)}{\partial \nu_y} = 2 \langle \nu(y), \nabla_y s(x, y) \rangle$$

und das **Doppelschichtpotential** mit der Belegung $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$\Phi_D(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial s(x, y)}{\partial \nu_y} \varphi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma.$$

Beispiel 4.12 Für $\varepsilon \geq 0$ seien $\Gamma^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, x_3 = \varepsilon\}$ und

$$\Phi_\varepsilon(x) = \int_{\Gamma^\varepsilon} s(x, y) \varphi_\varepsilon(y) d\Gamma_y^\varepsilon,$$

$\varphi_\varepsilon(y_1, y_2, \varepsilon) = \varphi(y_1, y_2, 0)$, $y \in \Gamma^\varepsilon$. Es folgt

$$\Phi_\varepsilon(x) = \int_0^1 \int_0^1 s(x, y + \varepsilon \nu(y)) \varphi(y_1, y_2, 0) dy_1 dy_2, \quad \nu(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_0(x)}{\varepsilon} = \int_\Gamma \frac{\partial s(x, y)}{\partial \nu_y} \varphi(y) d\Gamma_y = \Phi_D(x)$$

mit $\Gamma = \Gamma^0$. Deshalb nennt man $\Phi_D(x)$ Doppelschichtpotential.

Im Weiteren sei

$$s(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y| & : d = 2, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} & : d = 3, \end{cases}$$

also

$$k_D(x, y) = -\frac{2}{\omega_d} \frac{\langle \nu(y), y - x \rangle}{|x - y|^d}, \quad \Phi_D(x) = -\frac{1}{\omega_d} \int_\Gamma \frac{\langle \nu(y), y - x \rangle}{|x - y|^d} \varphi(y) dy.$$

Außerdem sei wieder folgende Bedingung erfüllt:

$$\exists \lambda \in (0, 1] : |\langle \nu(x), x - y \rangle| \leq \text{const} |x - y|^{1+\lambda} \quad \forall x, y \in \Gamma. \quad (4.19)$$

• Wir betrachten die folgende Situation:

- $x^0 \in \Gamma$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap U_\varepsilon(x^0)$,
- $\Gamma_\varepsilon = \{\beta(x') = (x', g(x')) : x' \in S_\varepsilon(x^0)\}$, wobei

$$S_\varepsilon(x^0) \subset \{\text{Tangentenebene bzw. Tangente an } \Gamma \text{ in } x^0\}.$$

Es gilt dann

- (i) $\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla g(x')|^2}} \begin{bmatrix} -\nabla g(x') \\ 1 \end{bmatrix}$, $x = \beta(x') \in \Gamma_\varepsilon$,
- (ii) $|g(x')| \leq \text{const} |x' - x^0|^{1+\lambda}$, $x' \in S_\varepsilon$,
- (iii) $|\langle \nabla g(x'), x' - x^0 \rangle| \leq \text{const} |x' - x^0|^{1+\lambda}$, $x' \in S_\varepsilon$.

Satz 4.13 Sei (4.19) erfüllt. Dann ist

$$\int_\Gamma |k_D(x, y)| d\Gamma_y \leq \text{const} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Folgerung 4.14 Ist (4.19) erfüllt, so existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$|\Phi_D(x)| \leq c \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma, \mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

In Analogie zu Satz 3.4 kann man folgenden Satz beweisen.

Satz 4.15 *Es sei (4.19) erfüllt und $k(x, y)$ besitze die Darstellung*

$$k(x, y) = \frac{\ell(x, y)}{|x - y|^{d-\lambda-1}}, \quad x, y \in \Gamma, \quad x \neq y,$$

wobei positive Konstanten $c_{\ell, j}$, $j = 1, 2, 3$, existieren mögen, so dass $|\ell(x, y)| \leq c_{\ell, 1}$, $x, y \in \Gamma$, und

$$|\ell(x, y) - \ell(x^0, y)| \leq c_{\ell, 2} \frac{|x - x^0|}{|x - y|}$$

für alle $x, y, x^0 \in \Gamma$ mit $|x - y| > c_{\ell, 3}|x - x^0|$ gilt. Dann ist der Operator

$$\mathcal{K} : \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R}), \quad \varphi \mapsto \int_{\Gamma} k(\cdot, y)\varphi(y) d\Gamma_y$$

linear und beschränkt.

Satz 4.16 *Es seien (4.19) erfüllt und*

$$(\mathcal{K}_D \varphi)(x) = \int_{\Gamma} k_D(x, y)\varphi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma.$$

Dann gilt $\mathcal{K}_D \in \mathcal{L}(\mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R}), \mathbf{C}^\lambda(\Gamma, \mathbb{R}))$.

Folgerung 4.17 *Unter der Voraussetzung (4.19) sind die Operatoren $\mathcal{K}_D : \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})$ und $\mathcal{K}_D : \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$, $\alpha \in (0, \lambda]$ kompakte Operatoren.*

- Für $0 < |\alpha| < \alpha_0$, $\alpha_0 > 0$ - hinreichend klein, und $x^0 \in \Gamma$ definieren wir

$$\Psi(\alpha) = \Psi(\alpha, x^0) = \Phi_D(x^0 + \alpha\nu(x^0)).$$

Satz 4.18 *Sind (4.19) für $x = x^0 \in \Gamma^0$ erfüllt und $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$ in x^0 stetig, so existieren die Grenzwerte $\Psi(\pm 0)$, wobei*

$$\Psi(+0) - \Psi(-0) = \varphi(x^0) \quad \text{und} \quad \Psi(+0) + \Psi(-0) = (\mathcal{K}\varphi)(x^0)$$

gilt.

- Sind $x^0 \in \Gamma^0$ und $U_\varepsilon(x^0)$ eine solche Umgebung, so dass Γ diese Umgebung in die offenen Mengen $U_\varepsilon^+(x^0)$ und $U_\varepsilon^-(x^0)$ zerlegt, so definieren wir

$$\Phi_D^\pm(x) = \begin{cases} \Phi_D(x) & : \quad x \in U_\varepsilon^\pm(x^0), \\ \lim_{\alpha \rightarrow +0} \Phi_D(x \mp \alpha\nu(x)) & : \quad x \in \Gamma \cap U_\varepsilon(x^0). \end{cases}$$

Nach Satz 4.18 gilt dann

$$\Phi_D^+(x^0) - \Phi_D^-(x^0) = -\varphi(x^0), \quad (4.20)$$

$$\Phi_D^+(x^0) + \Phi_D^-(x^0) = (\mathcal{K}\varphi)(x^0) \quad (4.21)$$

bzw.

$$\Phi_D^\pm(x^0) = \mp \frac{1}{2} \varphi(x^0) + \frac{1}{2} (\mathcal{K}\varphi)(x^0). \quad (4.22)$$

Bemerkung 4.19 *Sei (4.19) erfüllt.*

- (a) Sind $x^0 \in \Gamma^0$ und $\varphi \in \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})$, so sind Φ_D^\pm auf $U_\varepsilon^\pm(x^0) \cup (\Gamma \cap U_\varepsilon(x^0))$ gleichmäßig stetig. Ist Γ geschlossen, so sind $\Phi_D^\pm : \overline{\Omega}_\pm \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.
- (b) Sind Γ geschlossen und $\varphi \in \mathbf{C}^\alpha(\Gamma, \mathbb{R})$ für ein $\alpha \in (0, \lambda]$, so gilt $\Phi_D^\pm \in \mathbf{C}^\alpha(\overline{\Omega}_\pm, \mathbb{R})$.
- (c) Eine zu (b) analoge Aussage gilt auch für $x^0 \in \Gamma^0$ und $U_\varepsilon^\pm(x^0) \cup (\Gamma \cap U_\varepsilon(x^0))$ statt $\overline{\Omega}_\pm$.

Beispiel 4.20 $\Phi_D(x)$ ist für $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 0\}$ und

$$\varphi(x_1, 0) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq x_1 \leq 1, \\ 0 & : -1 \leq x_1 < 0, \end{cases}$$

im Punkt $x^0 = \Theta$ unstetig.

Folgerung 4.21 Sind Ω_+ und Ω_- das Innen- bzw. Außengebiet zu Γ und $\varphi \equiv 1$ auf Γ , so gilt

$$\Phi_D(x) = \begin{cases} 0 & : x \in \Omega_-, \\ -1 & : x \in \Omega_+. \end{cases}$$

- Wir erklären $\nabla\varphi(x)$ für $x \in \Gamma$: Für $\alpha \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ - hinreichend klein, $x^0 \in \Gamma$ setzen wir $\varphi(x^0 + \alpha\nu(x^0)) = \varphi(x^0)$. Damit ist $\nabla\varphi(x^0)$ für alle $x^0 \in \Gamma$ erklärt. Offenbar gilt $\nabla\varphi(x^0) \perp \nu(x^0)$, d.h., $\nabla\varphi(x^0)$ liegt in der Tangentialebene zum Punkt x^0 bzgl. Γ . Für $\mu \in (0, 1]$ schreiben wir $\varphi \in \mathbf{C}^{1,\mu}(\Gamma, \mathbb{R})$, falls $\nabla\varphi \in \mathbf{C}^\mu(\Gamma, \mathbb{R}^d)$ erfüllt ist. Es gilt nun der folgende Satz.

Satz 4.22 Es seien (4.19) erfüllt, Γ geschlossen und $\varphi \in \mathbf{C}^{1,\mu}(\Gamma, \mathbb{R})$ für ein $\mu \in (0, 1]$. Dann besitzt der Gradient $\nabla\Phi_D(x)$, $x \in \Omega_\pm$, stetige Fortsetzungen $\nabla\Phi_D^\pm(x)$ auf $x \in \Gamma$. Dabei gilt für $x \in \Gamma$

$$\nabla\Phi_D^+(x) - \nabla\Phi_D^-(x) = -\nabla\varphi(x)$$

und

$$\nabla\Phi_D^+(x) + \nabla\Phi_D^-(x) = \frac{2}{\omega_d} \int_\Gamma \left[\frac{\nu(y)}{|y-x|^d} - d \frac{\langle \nu(y), y-x \rangle (y-x)}{|y-x|^{d+2}} \right] \varphi(y) d\Gamma_y,$$

wobei das letzte Integral im Allg. ein hypersinguläres Integral ist (vgl. Abschnitt 4.8). Die Normalableitung des Doppelschichtpotentials ist beim Durchgang durch Γ stetig, d.h.

$$\frac{\partial\Phi_D^+(x)}{\partial\nu} = \frac{\partial\Phi_D^-(x)}{\partial\nu}, \quad x \in \Gamma.$$

Dabei gilt

$$\frac{\partial\Phi_D^\pm(x)}{\partial\nu} = \frac{1}{\omega_d} \int_\Gamma \left[\frac{\langle \nu(y), \nu(x) \rangle}{|y-x|^d} - d \frac{\langle \nu(y), y-x \rangle \langle y-x, \nu(x) \rangle}{|y-x|^{d+2}} \right] \varphi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \Gamma.$$

Einige Bemerkungen zu Satz 4.22:

- (a) Nach Folgerung 4.21 ist für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ nahe bei Γ

$$\frac{1}{\omega_d} \int_\Gamma \left[\frac{\nu(y)}{|y-x|^d} - d \frac{\langle \nu(y), y-x \rangle (y-x)}{|y-x|^{d+2}} \right] \varphi(x) d\Gamma_y = 0,$$

so dass für solche x gilt

$$\nabla\Phi_D(x) = \frac{2}{\omega_d} \int_\Gamma \left[\frac{\nu(y)}{|y-x|^d} - d \frac{\langle \nu(y), y-x \rangle (y-x)}{|y-x|^{d+2}} \right] [\varphi(y) - \varphi(x)] d\Gamma_y. \quad (4.23)$$

- (b) Wegen $|\varphi(y) - \varphi(x) - \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle| \leq \text{const} |y - x|^{1+\mu}$ folgt, dass das Integral in (4.23) auch für $x \in \Gamma$ als Cauchy'sches Hauptwertintegral existiert.
- (c) Die Aussage zur Stetigkeit der Normalableitung kann wie folgt abgeschwächt werden: Wir definieren

$$\psi(\alpha) := \langle \nabla \Phi_D(x^0 + \alpha \nu(x^0)), \nu(x^0) \rangle, \quad \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

und setzen voraus, dass $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$ gilt, dass (4.19) erfüllt ist und dass $x^0 \in \Gamma^0$. Ist φ in x^0 stetig und $\mu = 1$ oder gilt $|\varphi(x) - \varphi(x^0)| \leq \text{const} |x - x^0|^\mu$ und $\lambda + \mu > 1$, so ist

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} [\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)] = 0.$$

4.6 Die Dirichlet-RWA und das Doppelschichtpotential

Für (4.8) und (4.10) machen wir den Lösungsansatz $u(x) = \Phi_D(x)$ mit einer gesuchten Belegung $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi_D(x) = -\frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(y), y - x \rangle}{|y - x|^d} \varphi(y) d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma.$$

Man erhält die Integralgleichungen

$$\varphi - \mathcal{K}_D \varphi = -2f \tag{4.24}$$

für die Innenraumaufgabe (4.8) und

$$\varphi + \mathcal{K}_D \varphi = 2f \tag{4.25}$$

für die Außenraumaufgabe (4.10).

Satz 4.23 *Es seien (4.19) für ein $\lambda > \frac{1}{2}$ erfüllt, $\Gamma = \partial\Omega = \partial\Omega_+$ und $f \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$. Dann hat die Integralgleichung (4.24) höchstens eine Lösung $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$. Zwei Lösungen von (4.25) unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.*

Wir modifizieren die Gleichung (4.25):

$$\varphi + \mathcal{K}_D \varphi = 2f + a, \quad \int_{\Gamma} \varphi d\Gamma = b. \tag{4.26}$$

Dabei sind neben f auch $b \in \mathbb{R}$ gegeben und neben φ auch $a \in \mathbb{R}$ gesucht.

Satz 4.24 *Es seien (4.19) erfüllt und $f \in \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})$. Dann besitzen (4.24) und (4.26) eine eindeutige Lösung $\varphi \in \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R})$ bzw. $(\varphi, a) \in \mathbf{C}(\Gamma, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Ist $f \in \mathbf{C}^\mu(\Gamma, \mathbb{R})$ für ein $\mu \in (0, \lambda]$, so gilt auch $\varphi \in \mathbf{C}^\mu(\Gamma, \mathbb{R})$.*

4.7 Die Neumann-RWA und das Doppelschichtpotential

Für eine in $\Omega = \Omega_+$ harmonische Funktion $u(x)$ gilt die Darstellungsformel ($\Gamma = \partial\Omega$)

$$u(x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} s(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} d\Gamma_y + \frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(y), y - x \rangle}{|y - x|^d} u(y) d\Gamma_y, \quad x \in \Omega. \tag{4.27}$$

Wir definieren deshalb für die gegebenen Neumann-Daten $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ und die unbekanntenen Dirichlet-Daten $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} s(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} d\Gamma_y + \frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(y), y - x \rangle}{|y - x|^d} u(y) d\Gamma_y =: \Phi_E(x) - \Phi_D(x), \quad x \in \Omega.$$

Für das Innenraumproblem (4.9) erhält man damit die Integralgleichung

$$u + \mathcal{K}_D u = 2\Phi_E. \quad (4.28)$$

Übungsaufgabe 4.25 Zeigen Sie, dass das Neumann-Problem für den Außenraum (4.11) zu der Integralgleichung

$$u - \mathcal{K}_D u = -2\Phi_E \quad (4.29)$$

für die unbekanntenen Dirichlet-Werte von u führt.

Wir betrachten nochmal die Dirichlet-Aufgabe (4.8) für den Innenraum. Aus der Darstellungsformel (4.27) folgt

$$u(x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} s(x, y) \varphi(y) d\Gamma_y + \tilde{f}(x), \quad x \in \Omega_+,$$

mit $\varphi(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial \nu}$, $x \in \Gamma$, und $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\omega_d} \int_{\Gamma} \frac{\langle \nu(y), y - x \rangle}{|y - x|^d} f(y) d\Gamma_y$. Es folgt

$$\frac{2}{\omega_d} \int_{\Gamma} s(x, y) \varphi(y) d\Gamma_y = g(x) := f(x) + (\mathcal{K}_D f)(x), \quad x \in \Gamma$$

(vgl. (4.15)).

4.8 Hypersinguläre Integrale

Für $-\infty < a < b < \infty$ definieren wir das **Finite-Part-Integral** oder **hypersinguläre Integral**

$$\text{f.p.} \int_a^b \frac{\varphi(y)}{(y-x)^2} dy := \text{p.v.} \int_a^b \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{(y-x)^2} dy + \varphi(x) \text{f.p.} \int_a^b \frac{dy}{(y-x)^2}, \quad x \in (a, b),$$

falls das Hauptwertintegral auf der rechten Seite existiert. Dabei ist

$$\text{f.p.} \int_a^b \frac{dy}{(y-x)^2} = \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}.$$

Für $\varphi \in \mathbf{C}^{1,\alpha}[a, b]$ gilt

$$\text{f.p.} \int_a^b \frac{\varphi(y)}{(y-x)^2} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^b \right) \frac{\varphi(y)}{(y-x)^2} dy - \frac{2\varphi(x)}{\varepsilon} \right], \quad x \in (a, b).$$

und

$$\text{f.p.} \int_a^b \frac{\varphi(y)}{(y-x)^2} dy = \frac{\varphi(a)}{a-x} - \frac{\varphi(b)}{b-x} + \text{p.v.} \int_a^b \frac{\varphi'(y)}{y-x} dy, \quad x \in (a, b). \quad (4.30)$$

Index

- Argumentprinzip, 11
- biharmonische Gleichung, 27
- Cauchy'sche Integralformel, 9
- Cauchy'sche Koeffizientenformel, 9
- Cauchy'scher Integralsatz, 9
- Darstellungsformel für harmonische Funktionen, 36
- Dipolkern, 22, 32
- Dipoloperator, 22
- Dipolpotential, 22
- Dirichletsche RWA, 30
- Doppelschichtpotential, 22, 32
- Einfachschichtpotential, 28
- Finite-Part-Integral, 37
- Formeln von Sochozki-Plemelj, 15
- Fundamentallösung, 27
- ganze Funktion, 9
- Gebiet, 10
- Gebietstreue, 10
- harmonische Funktion, 8
- Hilbertsches RWP, 17
- holomorphe Funktion, 7
- hypersinguläres Integral, 37
- Identitätssatz, 10
- Index einer Funktion, 17
- isolierte Singularität, 10
- konforme Abbildung, 11
- konjugiert harmonische Funktion, 8
- Kurve, 8
- Laplace-Gleichung, 27
- Laurentreihenentwicklung, 10
- Maximumprinzip, 10
- meromorphe Funktion, 11
- Neumannsche RWA, 30
- nichttangentialer Grenzwert, 15
- Pol der Ordnung k , 11
- Potenzreihe, 7
- Ränderzuordnung, 11
- Residuensatz, 11
- Riemann-Hilbertsches RWP, 20
- Riemannscher Abbildungssatz, 11
- Satz von Liouville, 9
- Satz von Morera, 9
- Schwarz'sches Lemma, 10
- Schwarz'sches Spiegelungsprinzip, 9
- Singularitätenfunktion, 27
- stückweise glatte Kurve, 8
- stückweise holomorphe Funktion, 15
- uneigentliches Integral, 28
- Weg, 8