

## Prüfungsfragen zur Vorlesung Randintegralmethoden im WS 2008/09

1. Beschreiben Sie Eigenschaften des Cauchyschen Integrals (Satz 2.2, Bemerkung 2.3 und Satz 2.5).
2. Was versteht man unter einer stückweise holomorphen Funktion? Unter welchen Voraussetzungen ist das Cauchysche Integral stückweise holomorph? (Satz 2.7)
3. Was können Sie über die Lösbarkeit des Randwertproblems

$$F(\infty) = 0, \quad F^+(\zeta) - F^-(\zeta) = \varphi(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma^o,$$

aussagen? (Folgerung 2.10)

4. Nennen Sie notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass  $\varphi(\zeta)$ ,  $\zeta \in \Gamma$ , die Randwerte einer in  $\Omega_+$  bzw. in  $\Omega_-$  holomorphen Funktion sind. (Folgerungen 2.11–2.13)
5. Formulieren Sie das Hilbertsche Randwertproblem und diskutieren Sie dessen Lösbarkeit. (Satz 3.1 und (IV),(V) in Abschnitt 3.1) Wie kann man ein Riemann-Hilbertsches Randwertproblem auf ein Hilbertsches zurückführen? (Abschnitt 3.2)
6. Beschreiben Sie die Herleitung der Integralgleichung (3.11) für die Lösung des Dirichlet-Problems mittels eines Cauchyschen Integralansatzes. Was können Sie über die Lösbarkeit dieser Integralgleichung aussagen? (Satz 3.4)
7. Diskutieren Sie die Lösbarkeit der Integralgleichung (3.15) für das Außenraumproblem. (Ende von Abschnitt 3.4 nach Übungsaufgabe 3.14)
8. Erklären Sie den Begriff des Einfachschichtpotentials. Wie kann man Normalen- und andere Ableitungen sowie den Gradienten des Einfachschichtpotentials für Punkte auf dem Rand  $\Gamma$  definieren? Welche Stetigkeits- bzw. Sprungeigenschaften haben das Einfachschichtpotential und seine Ableitungen? (Sätze 4.5, 4.6, 4.7 und Bemerkung 4.8)
9. Diskutieren Sie die Fragen der Eindeutigkeit der Lösungen der Dirichlet- und der Neumann-Randwertaufgaben (4.8)-(4.11) (Punkte (A)–(F) im Abschnitt 4.3).
10. Zeigen Sie, dass die Integralgleichung (4.15) höchstens eine stetige Lösung besitzt (Satz 4.9). Warum kann die Integralgleichung (4.15) für  $f \equiv 1$  und  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$  keine Lösung in  $\mathbf{L}^\infty(\Gamma)$  besitzen?
11. Beschreiben Sie die Abbildungseigenschaften des Einfachschichtpotentialoperators bzgl. des Intervalls  $[-1, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$  und eine Möglichkeit zur numerischen Lösung der entsprechenden Integralgleichung (Abschnitt 4.4).
12. Welche Integralgleichungen erhält man für die Neumann-RWAN für harmonische Funktionen, wenn man den Einfachschichtpotentialansatz macht? Diskutieren Sie deren Lösbarkeit (Satz 4.13).
13. Wie erklärt sich der Begriff “Doppelschichtpotential”? (Beispiel 4.14)

14. Geben Sie die grundlegenden Eigenschaften des Doppelschichtpotentials bzw. des Dipoloperators an (Satz 4.15, Folgerung 4.16, Satz 4.17, Satz 4.18, Folgerung 4.19, Satz 4.20).
15. Was kann man über die Stetigkeit des Doppelschichtpotentials aussagen? (Bemerkung 4.21) Zeigen Sie, dass man dabei auf die Glattheit von  $\Gamma$  nicht verzichten kann (Beispiel 4.22).
16. Sprechen Sie über die Eigenschaften der Normalableitung des Doppelschichtpotentials (Satz 4.24 mit Bemerkungen (a), (b) und (c)).
17. Welche Integralgleichungen erhält man für die Dirichlet-RWAn für harmonische Funktionen, wenn man den Doppelschichtpotentialansatz macht? Diskutieren Sie deren Lösbarkeit (Sätze 4.25 und 4.26).
18. Leiten Sie aus der Darstellungsformel für harmonische Funktionen geeignete Integralgleichungen zur Lösung des Neumann-Problems her ((4.31), (4.32), Übungsaufgabe 4.27).
19. Sprechen Sie über Definition und Eigenschaften hypersingulärer Integrale (Abschnitt 4.9).