

1. Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{\mathbf{i}z}{n}\right)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + \mathbf{i}n)^n z^n}{n!}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n$, wobei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler der Zahl n bezeichnet,
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^2}$ ($a \neq 0, a \in \mathbb{C}$) (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a\sqrt{n}}$ ($a > 0$) (f) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n + b^n}$ ($a, b > 0$)
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\vartheta(n)}(1-z)^n}{n}$, wobei $\vartheta(n)$ die Anzahl der Dezimalziffern der Zahl n bezeichnet,
- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) z^n$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathbf{i})^n z^{2n}}{n!}$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$
- (k) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} z^n$ (l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 + 2 \cos \frac{\pi n}{4})^n}{\ln n} z^n$ (m) $\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n (z - \mathbf{i})^n$
- (n) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$ **(Z)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\sin n}\right)^n$

2. Die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ mögen den Konvergenzradius R_1 bzw. R_2 haben. Geben Sie Abschätzungen für den Konvergenzradius R der folgenden Reihen an:

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k\right) z^n$

3. Verwenden Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ zur Berechnung folgender Grenzwerte:

(ohne Verwendung der l'Hospitalschen Regel)

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) (b) **(HA)** $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$ (c) **(HA)** $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$

4. Berechnen Sie folgende Grenzwerte der Gestalt 1^∞ :

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ ($a \in \mathbb{R}$) (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right]^{\cot x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$ (e) **(HA)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ (f) **(HA)** $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\frac{1}{x}}$
- (g) **(HA)** $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

5. Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ die Beziehungen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (1)$$

gelten, und verwenden Sie diese zur Berechnung von

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\log_{10} x - 1}{x - 10}, \quad (d) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{a}{1 + \ln x}},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a+b+c} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a, b, c > 0).$$

6. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit in \mathbb{R} .

$$(a) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0, \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} a^{\frac{1}{x}} & : x \neq 0 \ (a > 0), \\ 0 & : x = 0, \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} \quad (d) \text{(HA)} f(x) = \text{sgn}(\sin x)$$

7. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit im Intervall I !

$$(a) f(x) = \frac{x}{4 - x^2} \quad I = [-1, 1]$$

$$(b) f(x) = \ln x \quad I = (0, \infty)$$

$$(c) f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad I = (0, \pi)$$

$$(d) f(x) = x \sin x \quad I = [0, \infty)$$

$$(e) f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad I = (0, 1).$$

8. Beweisen Sie: Wenn f auf $[a, \infty)$ definiert und stetig ist, und weiterhin $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert und endlich ist, dann ist f auf $[a, \infty)$ gleichmäßig stetig.

9. Besitzt die Gleichung $2^x = 4x$ außer der Lösung $x_0 = 4$ noch weitere Lösungen?

10. Gegeben sei eine beliebige, beschränkte, ebene Figur mit Flächeninhalt F . Zeigen Sie, dass eine Gerade existiert, die diese Figur in zwei flächengleiche Teile zerlegt.

Analysis II, 6. Hausaufgabe

Abgabetermin: 29.04.2010

SS 2010

<http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html>

1. Sei $\alpha < \beta$. Zeigen Sie: Die Gleichung $\frac{x^2 + 1}{x - \alpha} + \frac{x^6 + 1}{x - \beta} = 0$ hat mindestens eine Lösung im Intervall (α, β) .

2. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 9. Übung.