

1. Es seien $a_n > 0, b_n > 0, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende **Vergleichskriterien**:

(a) Es existiere der Grenzwert $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

• Ist $q < \infty$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

und aus der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

• Ist $q > 0$, so folgt aus der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und

aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

• Im Fall $q \in (0, \infty)$ konvergieren bzw. divergieren beide Reihen gleichzeitig.

(b) **(HA)** Existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \forall n > n_0$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{2^n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ (g) $1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{3}{2^{2n+1}} + \dots$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{2}{n} \tan \frac{5}{n}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$ (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n^2}{2+n^2}$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{25^n}}{(2n)!}$

(n) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ (p) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$ (q) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[3]{3} - 1)$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \cos^2 \frac{1}{n}$ (s) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ (t) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[\left(n + \frac{1}{n} \right) \pi \right]$

(u) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$ (v) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln n)$ (w) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^s}$ ($s \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$)

(x) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \tan \frac{1}{\sqrt{n}}$ (y) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ (z) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

(ä) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$) (ö) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^\rho}$ ($\rho > 0$) (ü) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

3. Untersuchen Sie mit Hilfe von Vergleichskriterien auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{n}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n} \right)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$

4. Untersuchen Sie mit Hilfe des Wurzel- bzw. Quotientenkriteriums auf Konvergenz ($z \in \mathbb{C}$):

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{z}{n}\right)^n$ (d) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\arctan n}{2} z\right)^n$

5. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ eine Reihe mit $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und $b_n \rightarrow 0$. Konvergiert diese Reihe?

6. Beweisen Sie: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ für alle $p > 1$. Gilt die Umkehrung?

7. Beweisen Sie: Sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ konvergent, so konvergieren auch die Reihen

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

8. Es gelte $a_n \rightarrow a$ und $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ sowie $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$

genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1}|$ konvergiert.

9. Wir modifizieren die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ auf folgende Weise:

- (a) **(HA)** Wir summieren nur über die durch 10 teilbaren natürlichen Zahlen n .
 (b) Wir summieren nur über die natürlichen Zahlen n , bei denen in der Dezimaldarstellung die Ziffer 9 nicht vorkommt.

Untersuchen Sie die so modifizierten Reihen auf Konvergenz.

10. Geben Sie die Summe $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgender Reihen an:

(a) $a_n = \frac{1}{(d+n)(d+n+1)}$ ($-d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$) (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (c) **(HA)** $a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$

11. Untersuchen Sie mit Hilfe des Dirichlet- oder Leibniz-Kriteriums auf Konvergenz ($\alpha \in \mathbb{R}$):

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\alpha)$ ($(b_n)_{n=1}^{\infty}$ monotone Nullfolge) (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin(n\alpha)}{n}$ (e) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1)$

(f) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]$

12. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter Reihen absolut konvergiert.

13. Es sei $\gamma_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \forall n \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie die Summe der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{10^n}$ an.

14. Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion sowie $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ und $s'_n = \sum_{k=1}^n a_{f(k)}$. Verwenden Sie die Tatsache, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index n_0 mit $\sum_{k=n}^{n+\ell} |a_k| < \varepsilon \forall n \geq n_0, \forall \ell \geq 0$ existiert, um zu zeigen, dass $(s_n - s'_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist. (D.h., beweisen Sie Satz 3.57.)

- (Z) Es sei s die Summe der Leibniz-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Geben Sie jeweils eine Umordnung dieser Reihe an, die die Summe $\frac{3s}{2}$, 0 bzw. ∞ hat.