Analysis II, 14. Übung

SS 2010 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Man zeige, dass $\lim\limits_{\xi_1\to 0}\lim\limits_{\xi_2\to 0} f(\xi_1,\xi_2)$ und $\lim\limits_{\xi_2\to 0}\lim\limits_{\xi_1\to 0} f(\xi_1,\xi_2)$ existieren, $\lim\limits_{x\to\Theta} f(x)$ aber nicht:

   (a) $f(\xi_1,\xi_2)=\dfrac{\xi_1-\xi_2}{\xi_1+\xi_2}$ (b) **(HA)** $f(\xi_1,\xi_2)=\dfrac{\xi_1^2\xi_2^2}{\xi_1^2\xi_2^2+(\xi_1-\xi_2)^2}$

2. Man zeige, dass für $f(\xi_1,\xi_2)=(\xi_1+\xi_2)\sin\dfrac{1}{\xi_1}\sin\dfrac{1}{\xi_2}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{\xi_1\to 0}\lim\limits_{\xi_2\to 0} f(\xi_1,\xi_2)$ und $\lim\limits_{\xi_2\to 0}\lim\limits_{\xi_1\to 0} f(\xi_1,\xi_2)$ nicht existieren, aber $\lim\limits_{x\to\Theta} f(x)=0$ gilt.

3. **(HA)** Berechnen Sie

   (a) $\lim\limits_{x\to\Theta}\dfrac{\xi_1^2+\xi_2^2}{\xi_1^4+\xi_2^4}$, (b) $\lim\limits_{x\to(0,a)}\dfrac{\sin(\xi_1\xi_2)}{\xi_1}$ $(a\in\mathbb{R})$, (c) $\lim\limits_{x\to(\infty,a)}\left(1+\dfrac{1}{\xi_1}\right)^{\frac{\xi_1^2}{\xi_1+\xi_2}}$.

4. **(HA)** Man zeige, dass $f(x)=\left\{\begin{array}{ccc}\dfrac{\xi_1^2\xi_2}{\xi_1^4+\xi_2^2} & : & x\neq\Theta\\ 0 & : & x=\Theta\end{array}\right\}$ in $x_0=\Theta$ nicht stetig ist, obwohl f in $x_0=\Theta$ längs jeder Halbgeraden $\{(t\cos\alpha,t\sin\alpha):0\le t<\infty\}$ stetig ist.

5. (a) Man bestimme $D_1f(\xi_1,1)$ für $f(\xi_1,\xi_2)=\xi_1+(\xi_2-1)\arcsin\sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_2}}$.

   (b) Sei $f(\xi_1,\xi_2)=\operatorname{sgn}(\xi_1\xi_2)\sqrt[3]{|\xi_1\xi_2|}$. Berechnen Sie $D_kf(\Theta)$ für $k=1,2$. Ist f in $x_0=\Theta$ differenzierbar?

6. **(HA)** Man zeige, dass für $f(x)=\left\{\begin{array}{ccc}\dfrac{\xi_1\xi_2(\xi_1^2-\xi_2^2)}{\xi_1^2+\xi_2^2} & : & x\neq\Theta\\ 0 & : & x=\Theta\end{array}\right\}$ die partiellen Ableitungen $D_{21}f(\Theta)$ und $D_{12}f(\Theta)$ existieren, aber nicht übereinstimmen.

7. Man leite $f(\xi_1,\xi_2)=\sqrt{\xi_1^2+2\xi_2^2}$ in Richtung der Geraden

   (a) $\xi_2=\xi_1$, (b) $\xi_2=2\xi_1+1$, (c) **(HA)** $\xi_2=0$, (d) **(HA)** $\xi_1=0$

   ab. Man gebe die Richtung der Geraden so vor, dass die Richtungsableitung im Punkt

   (a) $(1,1)$, (b) $(1,3)$, (c) $(1,0)$, (d) $(0,1)$ positiv wird.

8. **(HA)** Es sei $f:\left\{x\in\mathbb{R}^3:\xi_k>0,\ k=1,2,3\right\}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt[\xi_2]{\xi_1\xi_2\xi_3}$. Man bestimme die Richtungsableitungen von f in die Richtungen, die durch die Vektoren $\begin{bmatrix}\frac12 & \frac12 & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}^T$ bzw. $\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\end{bmatrix}^T$ gegeben sind.

9. Es sei $f(\xi_1,\xi_2)=\xi_1^2-\xi_1\xi_2+\xi_2^2$. In welche Richtung ist die Ableitung im Punkt $x_0=(1,1)$

   (a) gleich Null, (b) am größten, (c) am kleinsten?

10. Seien $\Omega=\left\{(r,\varphi,\xi_3)\in\mathbb{R}^3:0<r,\ 0\le\varphi<2\pi,\ \xi_3\in\mathbb{R}\right\}$ und

$$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^3\setminus\Theta,\quad(r,\varphi,\xi_3)\mapsto(r\cos\varphi,r\sin\varphi,\xi_3).$$

    Man bestimme die Ableitung dieser Funktion und deren Determinante.

    (Z) Bestimmen Sie Umkehrabbildung f^{-1} und deren Ableitung.

11. **(HA)** Man bestimme die Ableitung und deren Determinante der Funktion

$$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad(r,\varphi,\theta)\mapsto(r\cos\varphi\sin\theta,r\sin\varphi\cos\theta,r\cos\theta),$$

    wobei $\Omega=\{(r,\varphi,\theta):0<r,\ 0\le\varphi<2\pi,\ 0<\theta<\pi\}$.

12. Man untersuche folgende Funktionen auf Extremwerte

    (a) $f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^3 + 3\xi_1\xi_2^2 - 15\xi_1 - 12\xi_2$ (b) **(HA)** $f(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1-\xi_2}(\xi_1^2 - 2\xi_2^2)$

13. Bestimmen Sie die Extremstellen von $f(\xi_1, \xi_2)$ unter den angegebenen Nebenbedingungen

    (a) $f(\xi_1, \xi_2) = 6 - 4\xi_1 - 3\xi_2$, wobei $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$,

    (b) $f(\xi_1, \xi_2) = \cos^2\xi_1 + \cos^2\xi_2$, wobei $\xi_2 - \xi_1 = \frac{\pi}{4}$.

14. Bestimmen Sie den größten und kleinsten Wert von $f(\xi_1, \xi_2)$ im angegebenen Gebiet:

    (a) $f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_1\xi_2 + \xi_1 + \xi_2, \quad \xi_1 \le 0,\ \xi_2 \le 0,\ \xi_1 + \xi_2 \ge -3$

    (b) **(HA)** $f(\xi_1, \xi_2) = \sin\xi_1 + \sin\xi_2 + \sin(\xi_1 + \xi_2), \quad 0 \le \xi_1 \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \xi_2 \le \frac{\pi}{2}$

15. Durch
    $$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_2^2}{b^2} + \frac{\xi_3^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0,$$
    sei eine implizite Funktion $\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2)$ gegeben. Man bestimme ihre partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung!

16. Man bestimme von folgenden, implizit gegebenen Funktionen (a) $\xi_2 = f(\xi_1)$ bzw. (b) $\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2)$ die Extremstellen:

    (a) $\xi_1^3 + \xi_2^3 - 3a\xi_1\xi_2 = 0 \quad (a > 0)$

    (b) **(HA)** $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - 2\xi_1 + 4\xi_2 - 6\xi_3 - 11 = 0$

17. Man zerlege die Zahl $a > 0$ in drei nichtnegative Summanden, so dass deren Produkt möglichst groß wird. Man beweise mit dem gewonnenen Resultat, dass das arithmetische Mittel dreier Zahlen $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ge 0$ nicht kleiner ist als ihr geometrisches Mittel, d.h.
    $$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3} \ge \sqrt[3]{\xi_1\xi_2\xi_3}.$$

18. **(HA)** Unter allen in eine Kugel einbeschriebenen Zylindern ist der Zylinder maximalen Volumens zu finden!

Analysis II, 9. Hausaufgabe

Abgabetermin: 08.07.2010

SS 2010 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $[x] \in \mathbb{Z}$ mit $[x] \le x < [x] + 1$

   (a) $\displaystyle\int_0^n x\,d[x]$, (b) $\displaystyle\int_0^n [x]\,dx$.

2. Berechnen Sie folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, (b) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x\cos x\,dx$,

   (c) $\displaystyle\int_{-a}^b (x+1)\,d\mu(x)$ mit $a, b > 0$ und $\mu(x) = \begin{cases} x & : \ x < 0, \\ x+2 & : \ x \ge 0. \end{cases}$

3. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 13. Übung.

(Z) Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx$, $p = \text{const} > 0$.