

1. Berechnen Sie folgende Riemann-Stieltjes-Integrale:

$$(a) \int_{-1}^3 x d\mu(x), \text{ wobei } \mu(x) = \begin{cases} -1 & : & x = -1 \\ 0 & : & -1 < x < 2 \\ 1 & : & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$(b) \text{ (HA) } \int_0^2 x d\mu(x), \text{ wobei } \mu(x) = \begin{cases} -1 & : & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & : & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \\ 1 & : & x = \frac{3}{2} \\ 2 & : & \frac{3}{2} < x \leq 2 \end{cases}$$

$$(c) \int_{-2}^2 x^2 d\mu(x), \text{ wobei } \mu(x) = \begin{cases} x+2 & : & -2 \leq x \leq -1 \\ 2 & : & -1 < x < 0 \\ x^2+3 & : & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

2. Man untersuche die Funktionenfolgen (f_n) auf gleichmäßige bzw. punktweise Konvergenz:

$$(a) f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, -\infty < x < \infty, \quad (b) f_n(x) = \sin \frac{x}{n}, -\infty < x < \infty,$$

$$(c) f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, x \in [0, 1], \quad (d) \text{ (HA) } f_n(x) = x^n, x \in [0, 1-\varepsilon] \quad (\varepsilon > 0),$$

$$(e) \text{ (HA) } f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x}, x \in [0, 1].$$

3. Man untersuche folgende Reihen auf gleichmäßige Konvergenz:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-q, q), 0 < q < 1, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1),$$

$$(c) \text{ (HA) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}, x \in [-1, 1], \quad (d) \text{ (HA) } \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1}), x \in [0, 1],$$

$$(e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in [a, b], -\infty < a < b < \infty, \text{ bzw. (Z) } x \in \mathbb{R},$$

$$(f) \text{ (HA) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}, x \in \mathbb{R}.$$

4. Man stelle durch eine Reihe dar:

$$(a) \int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt, \quad (b) \text{ (HA) } \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad (c) \text{ (HA) } \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

5. (HA) Zeigen Sie, dass für eine 2π -periodische, auf $[-\pi, \pi]$ Riemann-integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f.$$

6. Zeigen Sie: Bei einer π -periodischen Funktion verschwinden die Fourier-Koeffizienten mit ungeraden Indizes.

7. Seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodische Funktionen. In welchem Zusammenhang stehen die Fourier-Koeffizienten von f und g , wenn

$$(a) g(x) = f(-x), \quad (b) g(x) = f(x+h) \quad (h = \text{const} \in \mathbb{R})?$$

8. Geben Sie, ausgehend von dem trigonometrischen System $(e^{inx})_{n=-\infty}^{\infty}$, ein Orthonormalsystem (ONS) zur Entwicklung von Funktionen der Periode $2\ell \neq 2\pi$ an, d.h. ein ONS bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Wie berechnen sich die entsprechenden Fourier-Koeffizienten?

9. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Fourier-Reihe und geben Sie die Summe dieser Fourier-Reihe an:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) &= |\cos x|, & \text{(b) (HA)} \quad f(x) &= \begin{cases} \pi + x & : -\pi \leq x \leq 0, \\ \pi - x & : 0 < x \leq \pi, \end{cases} \\ \text{(c)} \quad f(x) &= x \cos x, \quad -\pi \leq x \leq \pi, & \text{(d) (HA)} \quad f(x) &= x \sin x, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

10. Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und 2π -periodisch, so gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n| + 1)^2 |\hat{f}_n|^2 < \infty,$$

und die Fourier-Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{inx}$ ist absolut konvergent.

11. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale bzw. zeigen Sie deren Divergenz:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} & \quad \text{(b)} \quad \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} & \quad \text{(c)} \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \quad (\alpha > 0) \\ \text{(d) (HA)} \quad \int_0^{\infty} e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx & \quad (\alpha < 0, \beta \in \mathbb{R}) & \quad \text{(e) (HA)} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x} \\ \text{(f) (HA)} \quad \int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx & \quad \text{(g)} \quad \int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} & \quad \text{(h)} \quad \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx & \quad \text{(i) (HA)} \quad \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \\ \text{(j) (HA)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} & \quad \text{(k) (HA)} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} & \quad \text{(Z)} \quad \int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \end{aligned}$$

12. Zeigen Sie:

- (a) Konvergiert $\int_a^{\infty} |f|$, so konvergiert auch $\int_a^{\infty} f$. (Man sagt, $\int_a^{\infty} f$ konvergiert **absolut**.)
 (b) Sind $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a, \infty)$ und $\int_a^{\infty} g$ konvergent, so konvergiert $\int_a^{\infty} f$ absolut.

13. Untersuchen Sie folgende Integrale auf Konvergenz:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x} dx & \quad \text{(b) (HA)} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}} & \quad \text{(c) (HA)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\ln x} \\ \text{(d)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x dx & \quad \text{(e)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} & \quad \text{(f)} \quad \int_0^{\infty} x^{\mu} e^{-\alpha x} dx \quad (\alpha, \mu \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

14. Berechnen Sie die Mantelfläche F und das Volumen V des Rotationskörpers, der bei Rotation des Graphen der Funktion $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ um die x -Achse entsteht.

15. Berechnen Sie die folgenden Cauchyschen Hauptwerte:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \text{v.p.} \int_{-1}^e \frac{dx}{x} & \quad \text{(b)} \quad \text{v.p.} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x} & \quad \text{(c)} \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} \\ \text{(d) (HA)} \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx & \quad \text{(e) (HA)} \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx \end{aligned}$$