Analysis I, 1. Übung

WS 2009/10 http://www.tu-chemnitz.de/~peju/lehre/ana.html

---

1. Sind die folgenden Aussagen wahr? Was ist jeweils ihr Gegenteil?
   (a) $3 < 4 \wedge 4 < 3$,
   (b) $3 < 4 \vee 4 < 3$,
   (c) $3 < 4 \wedge \neg(4 < 3)$,
   (d) $3 < 4 \vee$ Der Mond ist aus Käse,
   (e) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 \in \mathbb{N}$,
   (f) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} : x = y + 1$,
   (g) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} : y = x + 1$,
   (h) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x = y + 1$,
   (i) Wenn meine Großmutter Räder hätte, wäre sie ein Autobus,
   (j) Für alle reellen Zahlen x gilt $3 < x \Leftrightarrow \neg(x < 3)$.

2. Beweisen Sie mithilfe der Wahrheitswerttabelle den Satz von der Kontraposition (Prinzip des indirekten Beweises): $(p \Rightarrow q) \iff (\neg q \Rightarrow \neg p)$!

3. Es gelte die folgende Implikation:

   {Die Ware ist verdorben.} $\Rightarrow$ {Die Ware darf nicht verkauft werden.}

   Welche Folgerungen können getroffen werden, wenn folgende Aussagen wahr sind:
   (a) Die Ware ist verdorben.
   (b) Die Ware ist nicht verdorben.
   (c) Die Ware darf verkauft werden.
   (d) Die Ware darf nicht verkauft werden.

4. Nutzen Sie die Implikation $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ zur Lösung der Gleichung $\sqrt{x+2} - x = 0$!

5. Sei M die Menge der Menschen und H die Menge der Hunde. Negieren Sie

   $\forall h \in H \quad \exists m \in M : (m \text{ füttert } h \wedge m \text{ führt } h \text{ Gassi})$.

6. Seien A und B zwei Aussagen (etwa „$x > 2$“ und „$x > 1$“ für reelle x). Schreiben Sie $A \Rightarrow B$ ohne den Folgepfeil nur mit den logischen Symbolen „nicht“, „und“ und „oder“ ($\neg$, $\wedge$ und $\vee$).

7. Dividieren Sie
   (a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$, (b) **(HA)** $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y)$.

8. Lösen Sie die folgenden Gleichungen
   (a) $\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 = \dfrac{1}{4}\lg 16 - \sqrt{x + 0.25}\lg 4$.
   (b) $\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a^4 - x^4}}(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = (a - x)^{-\frac{1}{2}}$, $a > 0$.

9. Zeigen Sie, dass folgende Zahlen irrational sind:
   (a) $\sqrt{2}$, (b) **(HA)** $\sqrt{5}$!

10. Dies ist ein A4-Blatt. Es ist offenbar etwas höher als breit. Aber wie ist das Verhältnis von Höhe und Breite genau, und warum ist das so?

11. Man zeige, dass aus $p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ folgt $p + x, px \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

12. Sind folgende Mengen beschränkt? Ermitteln Sie gegebenenfalls Supremum und Infimum!
    (a) $(0, 1)$, (b) $(-\infty, 0]$, (c) $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$,
    (d) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, (e) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\right\}$, (f) $\left\{n^{(-1)^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, **(Z)** $\{\sqrt[n]{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

13. Es seien die nichtleere Menge $A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt und $-A := \{-a : a \in A\}$. Man zeige, dass dann $\sup(-A) = -\inf A$ gilt.

14. Die Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ seien nach oben beschränkt. Wir definieren

    $$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} .$$

    Zeigen Sie, dass dann $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ gilt.

15. Es seien $r, z, w \in \mathbb{R}$ und $r < zw$. Dann existieren $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < z$, $q < w$ und $r < pq$.