Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
Prof. Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
SS 18

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 6 - Integration

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass für zwei integrierbare Funktionen $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ auch die Funktionen $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ integrierbar sind.

Aufgabe 2: Finden Sie eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ welche punktweise gegen eine integrierbare Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ konvergiert, für welche aber nicht

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t.$$

gilt

Aufgabe 3: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ auf Integrierbarkeit:

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 4: Finden Sie eine differenzierbare Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ so, dass $f'\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ nicht integrierbar ist.

Aufgabe 5: Zeigen Sie, ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0,$$

so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Ist die Voraussetzung der Stetigkeit notwendig oder reicht es die Integrierbarkeit von f zu fordern?

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass zwei integrierbare Funktionen, welche bis auf abzählbar viele Stellen übereinstimmen, das gleiche Integral haben.

Aufgabe 7: Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2+1)}$, c) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1-x}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$, d) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+4x+6}\,dx$.

Aufgabe 8: Bestimmen Sie $\int \frac{dx}{\cos x}$ und verwenden Sie $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$ und partielle Integration, um eine Rekursionsformel für

$$I_n(x) = \int \frac{dx}{\cos^n x}\ (n \in \mathbb{N})$$

herzuleiten.

Aufgabe 9: Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x|x|\,dx$, b) $\displaystyle\int_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$, c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(x)\,dx$, d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$.

Aufgabe 10: Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gilt

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

Aufgabe 11: Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen durch elementare Zurückführung auf Grundintegrale

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx$, c) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$.

Aufgabe 12: Bestimme Sie mit Hilfe geeigneter Substitutionen

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x\ln x)\,\ln(\ln x)}$, d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$.

Aufgabe 13: Bestimmen Sie mittels partieller Integration

a) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx$, b) $\displaystyle\int \sin x\,\ln(\tan x)\,dx$, c) $\displaystyle\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$.

Aufgabe 14: Berechnen Sie mittels Partialbruchzerlegung

a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}\,,$

Aufgabe 15: Bestimmen Sie

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_a^x \arctan y\,dy\,,$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt\,.$

Aufgabe 16: Es sei $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und konkav. Zeigen Sie die Abschätzung

$$(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Aufgabe 17: Begründen Sie, warum der Grenzwert

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} \sin x\,\mathrm{d}x$$

existiert, aber nicht das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Hausaufgaben

Abgabe 25.06.2018

Aufgabe 1: Man bestimme mit Hilfe (elementarer) Zurückführung auf Grundintegrale — 4 Punkte

a) $\displaystyle\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx\,,$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx\,.$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden Integrale — 11 Punkte

a) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}\,,$

c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx\,,$

d) $\displaystyle\int x\,e^{-x^2}\,dx\,,$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh x}\,,$

f) $\displaystyle\int x^2 e^{-2x}\,dx\,,$

g) $\displaystyle\int x^2 \sin 2x\,dx\,,$

h) $\displaystyle\int \arctan x\,dx\,,$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin 2x}\,,$

j) $\displaystyle\int (\arcsin x)^2\,dx\,,$

k) $\displaystyle\int x\,(\arctan x)^2\,dx\,.$

Aufgabe 3: Entwickeln Sie eine Rekursionsformel zur Berechnung von — 2 Punkte

$$S_n(x) = \int \sin^n x dx\,.$$